MATHEMATISCHE ANNALEN

136. BAND

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN | DAVID HILBERT

OTTO BLUMENTHAL | ERICH HECKE

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH BEHNKE, MÜNSTER (WESTF.)
RICHARD COURANT, NEW YORK
HEINZ HOPF, ZÜRICH
GOTTFRIED KÖTHE, HEIDELBERG
KURT REIDEMEISTER, GÖTTINGEN
BARTEL L. VAN DER WAERDEN, ZÜRICH

136. BAND

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1958

Unveränderter Nachdruck 1971
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages
ist es auch nicht gestattet, diesen Band, einzelne Beiträge oder Teile daraus
auf photomechanischem Wege (Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen
Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg
Printed in Germany

Inhalt des 136. Bandes

(In alphabetischer Ordnung)

Stein, K.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 1—8 (1958)

Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen

Von

Karl Stein in München

Seinem Lehrer Heinrich Behnke zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

1. Zum Studium mancher Eigenschaften holomorpher Abbildungen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, den Begriff der *komplexen Basis* einzuführen. Sei $f: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X in den komplexen Raum Y; X und Y werden hier — wie alle im folgenden betrachteten komplexen Räume — als *normal* im Sinne von H. Cartan (vgl. [3, 4, 7]) vorausgesetzt. Unter dem *lokalen Rang* $r_f(x)$ von f im Punkte $x \in X$ wird die Codimension der Fäser $\overset{-1}{f}(f(x))$ — die eine in X analytische Menge ist — im Punkte x verstanden; das Supremum von $r_f(x)$ auf einer zusammenhängenden Komponente X_c von X wird als der *globale Rang* $r_f(X_c)$ von f auf X_c bezeichnet. Ist eine weitere holomorphe Abbildung $f_0: X \to Y_0$ von X in einen komplexen Raum Y_0 gegeben, so heißt f_0 *abhängig* von f, wenn die durch die Zuordnung $x \to (f(x), f_0(x))$, $x \in X$, bestimmte holomorphe Abbildung $\Phi: X \to Y \times Y_0$ in jedem Punkte von X den gleichen lokalen Rang wie f besitzt; f und f_0 heißen *verwandt*, wenn f_0 von f und f von f_0 abhängig ist. Es wird nun gefragt, ob zur gegebenen Abbildung f eine von f abhängige holomorphe surjektive Abbildung $f^*: X \to X^*$ von X auf einen komplexen Raum X^* mit der folgenden Eigenschaft existiert: Ist $f_1: X \to Y_1$ irgendeine von f abhängige holomorphe Abbildung, so gibt es eine holomorphe Abbildung $\varphi_1: X^* \to Y_1$, derart, daß $f_1 = \varphi_1 \circ f^*$ gilt. Im Falle der Existenz heißt das Paar (f^*, X^*) eine *komplexe Basis zur Abbildung* f[1]). Es ist leicht einzusehen, daß f^* mit f sogar verwandt sein muß, ferner daß je zwei komplexe Basen zu f in einem naheliegenden Sinne äquivalent sind.

Auf die Bedeutung des Begriffs der komplexen Basis ist in speziellen Fällen schon 1935 von H. Behnke und E. Peschl sowie von W. Rothstein [13] hingewiesen worden. Neuerdings hat sich gezeigt, daß dieser Begriff in verschiedenartiger Hinsicht mit Nutzen verwendet werden kann (vgl. [1, 8, 10, 12, 14]). Es ist daher wichtig zu wissen, wann es zu einer holomorphen Abbildung $f: X \to Y$ eine komplexe Basis wirklich gibt; daß dies keineswegs immer zutrifft, zeigen einfache Beispiele. Bisher ist bekannt, daß jede der folgenden Bedingungen für die Existenz einer komplexen Basis hinreicht (vgl. [9, 14, 15]):

[1]) An Stelle der Bezeichnung „Komplexe Basis" ist in Sonderfällen früher der Ausdruck „Analytische Projektion" benutzt worden.

(1) X ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, Y ist der komplex-projektive Raum der Dimension 1 (f stellt also eine meromorphe Funktion ohne Unbestimmtheitsstellen dar).

(2) X ist eine komplexe Mannigfaltigkeit; die zusammenhängenden Komponenten der Fasern von f sind kompakt.

(3) X ist ein zusammenhängender komplexer Raum der Dimension n; der globale Rang $r_f(X)$ ist gleich n oder $n-1$[2]).

In der vorliegenden Note soll eine weitere hinreichende Existenzbedingung angegeben werden, in welcher insbesondere die obigen Bedingung (1) als Spezialfall enthalten ist. Wir beweisen den

Satz. *Sei $f: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X in den komplexen Raum Y. Der lokale Rang von f sei konstant und gleich r. Dann existiert zu f eine komplexe Basis (f^*, X^*), und der komplexe Raum X^* ist rein r-dimensional.*

Aus dieser Aussage folgt unmittelbar:

Ist der lokale Rang einer holomorphen Abbildung $f: X \to Y$ konstant, so gibt es zwischen der durch f bestimmten Zerlegung $Z(f)$ und der durch f bestimmten einfachen Zerlegung $Z'(f)$ von X eine feinste analytische Zerlegung. (Zum Begriff der analytischen Zerlegung eines komplexen Raumes siehe [15]).

2. Wir erläutern zunächst Begriffe, die für den Beweis des Satzes von Bedeutung sind.

Jedem komplexen Raum Y ist nach H. CARTAN ein weiterer komplexer Raum wie folgt zugeordnet (siehe hierzu [3]): Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller analytischen Primkeime $\mathfrak{m}_y$ beliebiger Dimension in allen Punkten $y \in Y$. Ist L irgendeine lokal-analytische Menge in Y, so bilden die irreduziblen Komponenten der durch L in den Punkten von L repräsentierten analytischen Keime eine Teilmenge $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{M}$. Die Gesamtheit solcher Teilmengen $\mathfrak{L}$ kann als Basis des Systems der offenen Mengen einer Topologie $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{M}$ gewählt werden; in bezug auf $\mathfrak{T}$ ist dann die durch die Zuordnung $\mathfrak{m}_y \to y$ gegebene Abbildung $\pi: \mathfrak{M} \to Y$ stetig. Es läßt sich auf $\mathfrak{M}$ in natürlicher Weise auch eine mit $\mathfrak{T}$ verträgliche (normale) komplexe Struktur einführen, derart, daß π eine holomorphe Abbildung wird. $\mathfrak{M}$ wird so zu einem komplexen Raum, der als der *Raum* $\mathfrak{S}(Y)$ *der analytischen Primkeime von* Y bezeichnet sei. Die Abbildung π heiße Projektionsabbildung; sie hat auf jeder zusammenhängenden Komponente von $\mathfrak{S}(Y)$ einen konstanten lokalen Rang, der mit der Dimension der Komponente übereinstimmt. Die Dimension von $\mathfrak{S}(Y)$ in einem seiner Punkte ist identisch mit der Dimension des durch den Punkt gegebenen analytischen Primkeims in Y.

Es sei irgendeine holomorphe Abbildung $\varphi: {}'Y \to Y$ von konstantem lokalen Rang r eines komplexen Raumes ${}'Y$ in Y gegeben. Nach Sätzen von

[2]) Nach [15] existiert in den Fällen (2) und (3) stets eine komplexe Basis (f^*, X^*), derart, daß X^* ein komplexer Raum im Sinne der von H. BEHNKE und dem Verf. in [2] gegebenen Definition ist. Inzwischen wurde von H. GRAUERT und R. REMMERT (vgl. [6, 7]) bewiesen, daß die Klasse derartiger Räume mit der Klasse der normalen komplexen Räume im Sinne von H. CARTAN übereinstimmt.

R. Remmert ([11], § 4) existiert zu jedem Punkte $'y \in 'Y$ eine Umgebungsbasis $\{'U_\nu\}$, derart, daß $\varphi('U_\nu)$ jeweils eine irreduzible r-dimensionale lokalanalytische Menge ist. Dem Punkt $'y$ ist also ein analytischer Primkeim $\mathfrak{m}_y$ im Punkte $y = \varphi('y) \in Y$ zugeordnet; hierdurch wird eine Abbildung $\tilde{\varphi} : 'Y \to \mathfrak{S}(Y)$ festgelegt, die — wie leicht zu sehen — holomorph und offen ist. Die Bildmenge $\tilde{\varphi}('Y)$ läßt sich in natürlicher Weise als ein rein r-dimensionaler komplexer Raum auffassen, welchen wir den *zur Abbildung φ kanonisch assoziierten Bildraum* $'Y_\varphi$ nennen. Man hat durch φ bzw. π bestimmte holomorphe Abbildungen $\check{\varphi} : 'Y \to 'Y_\varphi$ und $\check{\pi}_\varphi : 'Y_\varphi \to Y$, derart, daß $\varphi = \check{\pi}_\varphi \circ \check{\varphi}$ gilt. $\check{\varphi}$ ist surjektiv und mit φ verwandt (also ebenfalls eine Abbildung von konstantem lokalen Rang r).

3. Nun zum Beweise unseres Satzes! Wir betrachten zur gegebenen Abbildung $f : X \to Y$ Paare (f_i, X_i), wo X_i ein rein r-dimensionaler komplexer Raum ist und $f_i : X \to Y_i$ eine mit f verwandte holomorphe surjektive Abbildung (der lokale Rang von f_i ist also konstant und gleich r, f_i ist daher eine offene Abbildung). Ein derartiges Paar ist z. B. — mit entsprechenden Bezeichnungen wie in 2. — das Paar $(\check{f}, X_f)$. Wir sagen, das Paar (f_i, X_i) werde vom Paar (f_j, X_j) *majorisiert* — in Zeichen $(f_i, X_i) \subseteq (f_j, X_j)$ — wenn es eine holomorphe (surjektive) Abbildung $\chi_{ji} : X_j \to X_i$ gibt, derart, daß $f_i = \chi_{ji} \circ f_j$ gilt; mit f_i und f_j ist dann auch χ_{ji} offen und hat den konstanten lokalen Rang r (vgl. [11], § 5). Die Relation $\subseteq$ ist offenbar reflexiv und transitiv. Gilt $(f_i, X_i) \subseteq (f_j, X_j)$ und $(f_j, X_j) \subseteq (f_i, X_i)$, so nennen wir die beiden Paare *f-äquivalent*. In der Menge der f-Äquivalenzklassen[3]) wird durch die Relation $\subseteq$ eine Ordnungsrelation, die mit $\leq$ notiert sei, induziert; die auf diese Weise geordnete Menge der f-Äquivalenzklassen werde mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Wir behaupten:

a) *$\mathfrak{F}$ ist eine gerichtete Menge*;

b) *$\mathfrak{F}$ ist eine induktive Menge*[4]).

3.1. Nachweis von a). Zu zeigen ist: Zu zwei Paaren (f_i, X_i), (f_j, X_j) gibt es stets ein drittes Paar, das die beiden ersten majorisiert. — Sei $\Psi : X \to X_i \times X_j$ die durch $x \to (f_i(x), f_j(x))$, $x \in X$, gegebene holomorphe Abbildung von X in $X_i \times X_j$; Ψ ist mit f verwandt und hat daher den konstanten lokalen Rang r. Es existiert demnach der zu Ψ kanonisch assoziierte Bildraum X_Ψ mit den zugehörigen Abbildungen $\check{\Psi} : X \to X_\Psi$ und $\check{\pi}_\Psi : X_\Psi \to X_i \times X_j$; $\check{\Psi}$ ist mit Ψ verwandt, also auch mit f. Bezeichnen $s_i : X_i \times X_i \to X_j$ und

---

[3]) Eine „f-Äquivalenzklasse" kann interpretiert werden als ein Paar $(Z, R(Z))$, wo Z eine bestimmte Zerlegung von X ist und $R(Z)$ ein zu Z konjugierter topologischer Raum (vgl. hierzu [15], § 4). Die Menge aller Zerlegungen von X und die Menge aller zu einer Zerlegung von X konjugierten topologischen Räume sind sinnvoll definierte Mengen. Daher ist es zulässig, von der *Menge der f-Äquivalenzklassen* zu sprechen.

[4]) Zur Terminologie: Wir verwenden die Bezeichnung *Ordnung* im Sinne von N. Bourbaki, an Stelle der auch gebräuchlichen Terme *Halbordnung, teilweise Ordnung*. Eine vermöge einer Ordnungsrelation $\leq$ geordnete Menge $\mathfrak{F}$ heißt *gerichtet*, wenn es zu je zwei Elementen α, β ein Element γ von $\mathfrak{F}$ gibt, derart, daß $\alpha \leq \gamma$ und $\beta \leq \gamma$ gilt. $\mathfrak{F}$ heißt *induktiv*, wenn jede vermöge $\leq$ total-geordnete Teilmenge von $\mathfrak{F}$ eine obere Grenze in $\mathfrak{F}$ besitzt.

$s_j : X_i \times X_j \to X_j$ die Projektionen von $X_i \times X_j$ auf seine Faktoren, so sind $\sigma_i = s_i \circ \check{\pi}_\Psi : X_\Psi \to X_i$, $\sigma_j = s_j \circ \check{\pi}_\Psi : X_\Psi \to X_j$ holomorphe surjektive Abbildungen, für die $f_i = \sigma_i \circ \check{\Psi}$ bzw. $f_j = \sigma_j \circ \check{\Psi}$ gilt. Die Paare (f_i, X_i) und (f_j, X_j) werden daher von dem Paar $(\check{\Psi}, X_\Psi)$ majorisiert.

3.2. **Nachweis von b).** Wir haben zu zeigen: Zu jeder vermöge der Relation $\leqq$ total-geordneten Teilmenge $\mathfrak{F}_0$ von $\mathfrak{F}$ gibt es eine obere Grenze in $\mathfrak{F}$. — Wir repräsentieren die Klassen aus $\mathfrak{F}_0$ durch Paare (f_i, X_i), dabei durchläuft i eine zu $\mathfrak{F}_0$ isomorphe geordnete Menge I_0, in der die Ordnungsrelation wieder mit $\leqq$ notiert werde; die Menge dieser Paare heiße F_0. Zu je zwei Paaren (f_i, X_i), (f_j, X_j) mit $i, j \in I_0$ und $i \leqq j$ existiert dann eine holomorphe Abbildung $\chi_{ji} : X_j \to X_i$, so daß $f_i = \chi_{ji} \circ f_j$ gilt. Es wird jetzt im Raum X eine Äquivalenzrelation Z_0 wie folgt erklärt: Zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ heißen Z_0-*äquivalent*, wenn $f_i(x_1) = f_i(x_2)$ für alle $i \in I_0$ ist. Jeder Z_0-Äquivalenzklasse ist also in jedem X_i ein Punkt zugeordnet; sei $h_i : X/Z_0 \to X_i$ die hierdurch bestimmte Abbildung der Quotientenmenge X/Z_0 auf X_i. Bezeichnet $h : X \to X/Z_0$ die natürliche Abbildung von X auf X/Z_0, so ist $f_i = h_i \circ h$. Nun gilt, wie weiter unten bewiesen wird:

b$_1$) *Sei ein Element $\tilde{x} \in X/Z_0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert eine Teilmenge $\hat{V}(\tilde{x})$ von X/Z_0 mit $\tilde{x} \in \hat{V}(\tilde{x})$, ferner zu jedem $i \in I_0$ eine offene zusammenhängende Umgebung $V_i \subset X_i$ des Punktes $h_i(\tilde{x}) \in X_i$, sowie ein Index $i_m(\tilde{x}) = i_m \in I_0$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) Es gilt $h_i(\hat{V}(\tilde{x})) = V_i$; für $i \leqq i_1$ ist also stets $\chi_{i_1 i}(V_{i_1}) = V_i$.

(II) Für $i_m \leqq j \leqq j_1$ ist die durch Beschränkung von $\chi_{j_1 j}$ bestimmte Abbildung $'\chi_{j_1 j} : V_{j_1} \to V_j$ stets umkehrbar-eindeutig, d. h. $'\chi_{j_1 j}$ ist ein holomorpher Homöomorphismus.

Es folgt sogleich $\bigcap_{i \in I_0} \overset{-1}{h_i}(V_i) = \hat{V}(\tilde{x})$, ferner daß für $i_m \leqq j$ die durch Beschränkung von h_j bestimmte surjektive Abbildung $'h_j : \hat{V}(\tilde{x}) \to V_j$ umkehrbar-eindeutig ist. Wir übertragen nunmehr vermöge der Abbildung $'h_{i_m}^{-1} : V_{i_m} \to \hat{V}(\tilde{x})$ jeweils die Topologie und komplexe Struktur von V_{i_m} auf $\hat{V}(\tilde{x})$; dann ergibt sich mit Hilfe von b$_1$), daß auf der gesamten Menge X/Z_0 in eindeutiger Weise eine Hausdorffsche Topologie und eine mit ihr verträgliche komplexe Struktur festgelegt sind, derart, daß auf jedem $\hat{V}(\tilde{x})$ die eben erklärte Topologie und komplexe Struktur induziert werden. X/Z_0 wird so zu einem rein r-dimensionalen komplexen Raum $\tilde{X}$, und für jedes $i \in I_0$ ist die Abbildung $h_i : \tilde{X} \to X_i$ holomorph und hat den konstanten lokalen Rang r. Weiter folgt:

b$_2$) *Sei $\eta : Y_0 \to \tilde{X}$ eine Abbildung eines komplexen Raumes Y_0 in $\tilde{X}$, derart, daß für jedes $i \in I_0$ die Abbildung $h_i \circ \eta = \eta_i : Y_0 \to X_i$ holomorph ist. Dann ist η eine holomorphe Abbildung.*

In der Tat, sei y_0 ein Punkt aus Y_0 und $\eta(y_0) = \tilde{x}$ sein Bildpunkt in $\tilde{X}$; wir haben dann nach b$_1$) je eine offene zusammenhängende Umgebung $\hat{V}(\tilde{x})$ von $\tilde{x}$ und V_i von $\eta_i(y_0) \in X_i$, $i \in I_0$, mit den oben angegebenen Eigenschaften. Insbesondere gibt es für $i_m \leqq j$ surjektive umkehrbar-eindeutige holomorphe Abbildungen $'\chi_{j i_m} : V_j \to V_{i_m}$ und $'h_j : \hat{V}(\tilde{x}) \to V_j$, derart, daß $'h_{i_m} = {'\chi_{j i_m}} \circ {'h_j}$

ist. Wir wählen eine offene zusammenhängende Umgebung $W(y_0)$ von y_0 in Y_0, so daß $\eta_{i_m}(W(y_0)) \subset V_{i_m}$ gilt; sei $'\eta_{i_m} : W(y_0) \to V_{i_m}$ die durch Beschränkung von η_{i_m} bestimmte holomorphe Abbildung. Für die Punkte $\tilde{y}_0$ einer hinreichend kleinen in $W(y_0)$ enthaltenen Umgebung von y_0 ist jeweils $\eta_j(\tilde{y}_0) = {'\chi}_{j i_m}^{-1}({'\eta}_{i_m}(\tilde{y}_0))$; da aber ${'\chi}_{j i_m}^{-1} \circ {'\eta}_{i_m}$ eine in ganz $W(y_0)$ definierte holomorphe Abbildung ist, muß wegen des Identitätssatzes für holomorphe Abbildungen $\eta_j(\tilde{y}_0) = {'\chi}_{j i_m}^{-1}({'\eta}_{i_m}(\tilde{y}_0))$ für *alle* $\tilde{y}_0 \in W(y_0)$ gelten. Demnach hat man $\eta_i(W(y_0)) = h_i\{\eta(W(y_0))\} \subset V_i$ für alle $i \in I_0$, also $\eta(W(y_0)) \subset \bigcap_{i \in I_0} \overset{-1}{h_i}(V_i) = \tilde{V}(\tilde{x})$. Bezeichnet $'\eta : W(y_0) \to \tilde{V}(\tilde{x})$ die durch Beschränkung von η bestimmte Abbildung, so ist jetzt $'\eta = {'h}_{i_m}^{-1} \circ {'\eta}_{i_m}$. Folglich ist $'\eta$ eine holomorphe Abbildung, und gleiches gilt mithin für η.

Mit Hilfe von b_2) ergibt sich wegen $f_i = h_i \circ h$, $i \in I_0$, zunächst, daß die Abbildung $h : X \to \tilde{X}$ holomorph ist; h ist dann außerdem mit jedem f_i, also mit f, verwandt. Daher repräsentiert das Paar $(h, \tilde{X})$ eine Äquivalenzklasse μ_0 von $\mathfrak{F}$, die eine obere Schranke von $\mathfrak{F}_0$ darstellt.

μ_0 ist aber zugleich auch obere Grenze von $\mathfrak{F}_0$. Sei nämlich $({}^*f, {}^*X)$ ein Paar, das alle Paare (f_i, X_i) aus F_0 majorisiert. Zu jedem $i \in I_0$ gibt es also eine holomorphe Abbildung ${}^*\chi_i : {}^*X \to X_i$ mit $f_i = {}^*\chi_i \circ {}^*f$. Wir können eine Abbildung ${}^*\chi : {}^*X \to \tilde{X}$ wie folgt herstellen: Ist irgendein Punkt ${}^*x \in {}^*X$ gegeben, so sei $x \in X$ ein Punkt mit ${}^*f(x) = {}^*x$; es wird dann definitionsgemäß ${}^*\chi({}^*x) = h(x)$ gesetzt. Diese Zuordnung ${}^*x \to h(x)$ ist eindeutig. Denn ist $\bar{x} \in X$ ein weiterer Punkt mit ${}^*f(\bar{x}) = {}^*x$, so gilt für alle $i \in I_0$: ${}^*\chi_i(x^*) = {}^*\chi_i({}^*f(x)) = {}^*\chi_i({}^*f(\bar{x}))$, folglich $f_i(x) = f_i(\bar{x})$; dies besagt aber, daß x und $\bar{x}$ Z_0-äquivalent sind, daß also $h(x) = h(\bar{x})$ ist. Demnach ist ${}^*\chi : {}^*X \to X$ als eindeutige Abbildung erklärt, und so, daß $h = {}^*\chi \circ {}^*f$ und ${}^*\chi_i = h_i \circ {}^*\chi$ für jedes $i \in I_0$ gilt. Nach b_2) ist dann ${}^*\chi$ eine holomorphe Abbildung. Demnach wird das Paar $(h, \tilde{X})$ von $({}^*f, {}^*X)$ majorisiert; die durch $(h, \tilde{X})$ repräsentierte f-Äquivalenzklasse ist also in der Tat obere Grenze von $\mathfrak{F}_0$.

3.3. Es bleibt der Beweis von b_1) nachzutragen. Hierzu benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *Sei $\varphi : {'Y} \to Y$ eine holomorphe Abbildung von konstantem lokalen Rang r eines komplexen Raumes $'Y$ in einen komplexen Raum Y. Dann existiert zu jedem Punkte $'y_0 \in {'Y}$ ein zusammenhängender r-dimensionaler komplexer Raum A und eine holomorphe Abbildung $\tau : A \to {'Y}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) *Es ist $'y_0 \in \tau(A)$.*

2) *Der lokale Rang von τ ist konstant und gleich r.*

3) *Der lokale Rang der Abbildung $\varphi \circ \tau = \sigma : A \to Y$ ist konstant und gleich r; σ ist lokal-eigentlich.*

(Eine stetige Abbildung $\varrho : {'R} \to R$ eines lokal-kompakten Raumes $'R$ in einen lokal-kompakten Raum R heißt *lokal-eigentlich*, wenn jeder Punkt $p \in \varrho({'R})$ in R eine kompakte Umgebung $U(p)$ besitzt, derart, daß $\overset{-1}{\varrho}(U(p))$ in $'R$ kompakt ist.)

Beweis des Hilfssatzes. Die Dimension von $'Y$ in $'y_0$ sei n. Wir können eine zusammenhängende offene Umgebung $'U$ von $'y_0$ wählen, die zu einer analytisch-verzweigten Überlagerung des Polyzylinders $G_z : \{|z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$ im Raum C^n_z der n komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ holomorph-äquivalent ist. Es existiert dann eine eigentliche holomorphe Abbildung $\psi : 'U \to G_z$, und es darf angenommen werden, daß $'y_0$ durch ψ in den Mittelpunkt $z^{(0)}$ von G_z überführt wird. Sei $'H = \overset{-1}{\varphi}(\varphi('y_0))$ die durch $'y_0$ laufende Faser von φ und $'H_0 = 'H \cap 'U$ ihr in $'U$ gelegener Teil; $'H_0$ ist eine rein-$(n-r)$-dimensionale analytische Menge in $'U$. Nach einem Satz von R. Remmert ([11], Satz 23) ist die Bildmenge $\psi('H_0) = H_0 \subset G_z$ eine rein $(n-r)$-dimensionale analytische Menge in G_z. Es gibt daher durch den Punkt $z^{(0)}$, welcher auf H_0 liegt, eine r-dimensionale analytische Ebene E, die mit H_0 in einer Umgebung von $z^{(0)}$ nur den Punkt $z^{(0)}$ gemeinsam hat (vgl. [11], § 1). Die Menge $'E = \overset{-1}{\psi}(E \cap G_z)$ ist eine rein r-dimensionale analytische Menge in $'U$, die $'H_0$ in einer Umgebung von $'y_0$ nur im Punkte $'y_0$ schneidet. Sei a_0 eine der irreduziblen Komponenten des durch $'E$ in $'y_0$ repräsentierten analytischen Keimes und A_0 diejenige zusammenhängende Komponente des Raumes $\mathfrak{S}('Y)$ der analytischen Primkeime von $'Y$, zu welcher a_0 gehört; $\tau_0 : A_0 \to 'Y$ sei die durch Beschränkung der Projektionsbildung $'\pi : \mathfrak{S}('Y) \to 'Y$ bestimmte Abbildung. A_0 hat die Dimension r. Die Abbildung $\sigma_0 = \varphi \circ \tau_0 : A_0 \to Y$ ist holomorph, und die Faser $\overset{-1}{\sigma_0}(\sigma_0(a_0))$ besteht in einer Umgebung von a_0 nur aus a_0. Daher existiert ein a_0 enthaltender offener zusammenhängender Teilraum A von A_0, derart, daß die durch Beschränkung von σ_0 bestimmte Abbildung $\sigma : A \to Y$ den konstanten lokalen Rang r hat und lokal-eigentlich ist (vgl. [5], § 1; [15], § 3). Bezeichnet jetzt $\tau : A \to 'Y$ die durch Beschränkung von τ_0 bestimmte Abbildung, so haben A und τ die verlangten Eigenschaften.

3.4. **Zum Beweise von** b_1) werde irgendein Index $i_0 \in I_0$ herausgegriffen. Ist $x_0 \in X$ ein Punkt, der zur gegebenen Z_0-Äquivalenzklasse $\tilde{x}$ gehört, so existieren nach dem Hilfssatz zur Abbildung $f_{i_0} : X \to X_{i_0}$ und zum Punkte x_0 ein zusammenhängender r-dimensionaler komplexer Raum A, eine holomorphe Abbildung $\tau : A \to X$ sowie die Abbildung $f_{i_0} \circ \tau = \sigma_{i_0} : A \to X_{i_0}$ mit entsprechenden Eigenschaften, wie sie oben beschrieben sind. σ_{i_0} hat den konstanten lokalen Rang r und ist infolgedessen eine offene Abbildung. Für jeden Index $i \in I_0$ ist die Abbildung $f_i \circ \tau = \sigma_i : A \to X_i$ mit σ_{i_0} verwandt, also von konstantem lokalen Rang r und daher ebenfalls offen. Ist $i \leq i_1$, so hat man jeweils die Abbildung $\chi_{i_1 i} : X_{i_1} \to X_i$; wegen $f_i = \chi_{i_1 i} \circ f_{i_1}$ ist $\sigma_i = \chi_{i_1 i} \circ \sigma_{i_1}$. Sei nun $a_0 \in A$ ein Punkt, für welchen $\tau(a_0) = x_0$ gilt; dann können wir eine offene zusammenhängende Umgebung $U(a_0) \subset A$ mit folgenden Eigenschaften wählen:

(1) Ist $\sigma_{i_0}(U(a_0)) = V_{i_0}$ (V_{i_0} ist eine offene zusammenhängende Umgebung des Punktes $f_{i_0}(x_0) \in X_{i_0}$), so ist die durch Beschränkung von σ_{i_0} bestimmte Abbildung $'\sigma_{i_0} : U(a_0) \to V_{i_0}$ eigentlich.

(2) Es gibt eine eigentliche holomorphe Abbildung $\varphi_{i_0} : V_{i_0} \to G_w$ von V_{i_0} in den Polyzylinder $G_w : \{|w_1| < 1, \ldots, |w_r| < 1\}$ im Raume C^r_w der r komplexen Veränderlichen $w_1, \ldots, w_r$; das Tripel $(X_{i_0}, \varphi_{i_0}, G_w)$ stellt also eine etwa

k_{i_0}-fache analytisch-verzweigte Überlagerung von G_w dar (k_{i_0} eine natürliche Zahl).

Es folgt, daß auch die Abbildung $\varphi_{i_0} \circ {}'\sigma_{i_0} = \varphi : U(a_0) \to G_w$ eigentlich ist. — Wir setzen $h\{\tau(U(a_0))\} = \check{V}(\tilde{x})$ und $h_i(\check{V}(\tilde{x})) = \sigma_i(U(a_0)) = V_i$. Dann ist $h(\tau(a_0)) = \tilde{x}$, also $\tilde{x} \in \check{V}(\tilde{x})$; ferner ist V_i eine offene zusammenhängende Umgebung des Punktes $\sigma_i(a_0) = f_i(x_0) = h_i(\tilde{x}) \in X_i$, und für $i \leq i_1$ gilt $\chi_{i_1 i}(V_{i_1}) = V_i$. Seien ${}'\sigma_i : U(a_0) \to V_i$ bzw. ${}'\chi_{i_1 i} : V_{i_1} \to V_i$ die durch Beschränkung von σ_i bzw. $\chi_{i_1 i}$ bestimmten Abbildungen, man hat ${}'\sigma_i = {}'\chi_{i_1 i} \circ {}'\sigma_{i_1}$. Mit σ_{i_0} sind für $i_0 \leq i \leq i_1$ jeweils auch ${}'\sigma_i$, ${}'\sigma_{i_1}$ und ${}'\chi_{i_1 i}$ eigentliche Abbildungen; die Abbildung $\varphi_{i_0} \circ {}'\chi_{i i_0} = \varphi_i : V_i \to G_w$ ist daher ebenfalls eigentlich. Demnach stellen die Tripel (V_i, φ_i, G_w), $i_0 \leq i$, und $(U(a_0), \varphi, G_w)$ analytisch-verzweigte Überlagerungen von G_w dar; die Blätterzahlen seien k_i bzw. k. Für $i_0 \leq i \leq i_1$ ist $\varphi_i \circ {}'\sigma_i = \varphi_{i_0} \circ {}'\sigma_{i_0} = \varphi$ und $\varphi_{i_1} = \varphi_i \circ {}'\chi_{i_1 i}$, also gilt $k_i \leq k_{i_1} \leq k$. Sei $i_m(\tilde{x}) = i_m$ ein Index mit $i_0 \leq i_m$, für welchen k_{i_m} maximal ist. Dann muß für j, $j_1 \in I_0$ mit $i_m \leq j \leq j_1$ stets $k_{i_m} = k_j = k_{j_1}$ sein, und dies ist nur möglich, wenn die Abbildung ${}'\chi_{j_1 j} : V_{j_1} \to V_j$ umkehrbar-eindeutig, also ein holomorpher Homöomorphismus ist.

Damit ist b_1) und infolgedessen auch b) bewiesen.

3.5. Nach dem Zornschen Lemma existiert nun in der Menge $\mathfrak{F}$ wegen b) ein maximales Element μ, und dieses ist wegen a) eindeutig bestimmt. Sei (f^*, X^*) ein μ repräsentierendes Paar. Wir behaupten, daß (f^*, X^*) eine komplexe Basis zur Abbildung f darstellt. Hierzu ist zu zeigen: Ist $f_1 : X \to Y_1$ irgendeine von f abhängige Abbildung von X in einen komplexen Raum Y_1, so gibt es eine holomorphe Abbildung $\varphi_1 : X^* \to Y_1$ mit $f_1 = \varphi_1 \circ f^*$. — Es sei $\Phi : X \to Y \times Y_1$ die durch $x \to (f(x), f_1(x))$, $x \in X$, bestimmte holomorphe Abbildung. Φ hat wie f den konstanten lokalen Rang r und ist mit f verwandt. Man hat also die holomorphe Abbildung $\check{\Phi} : X \to X_\Phi$ von X auf den zu Φ kanonisch assoziierten Bildraum X_Φ sowie die holomorphe Abbildung $\check{\pi}_\Phi : X_\Phi \to Y \times Y_1$ mit $\Phi = \check{\pi}_\Phi \circ \check{\Phi}$. Das Paar $(\check{\Phi}, X_\Phi)$ repräsentiert ein Element von $\mathfrak{F}$; da μ das größte Element von $\mathfrak{F}$ ist, gibt es eine holomorphe Abbildung $\chi^* : X^* \to X_\Phi$ mit $\check{\Phi} = \chi^* \circ f^*$. Bezeichnet jetzt $s : Y \times Y_1 \to Y_1$ die Projektion von $Y \times Y_1$ auf Y_1, so hat man $f_1 = s \circ \Phi = s \circ \check{\pi}_\Phi \circ \check{\Phi} = s \circ \check{\pi}_\Phi \circ \chi^* \circ f^*$. Demnach ist $s \circ \check{\pi}_\Phi \circ \chi^*$ eine gesuchte Abbildung φ_1.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Literatur

[1] Behnke, H.: Funktionentheorie auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Proc. Int. Congr. Math. 3, 45—57 (1954). — [2] Behnke, H., u. K. Stein: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. 124, 1—16 (1951). — [3] Cartan, H.: Séminaire E.N.S. (Paris) 1951/52, 1953/54. — [4] Cartan, H.: Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. Princeton math. Ser. 12, 90—102 (1957). — [5] Grauert, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. 129, 233—259 (1955). — [6] Grauert, H., u. R. Remmert: Sur les revêtements analytiques des variétés analytiques. C. R. Acad. Sci. (Paris) 245, 918—921 (1957). — [7] Grauert, H., u. R. Remmert: Komplexe Räume. Math. Ann. (in Vor-

bereitung) (1958). — [8] Hedtfeld, K. H.: Starre einfach-zusammenhängende Holomorphiegebiete. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, H. 8 (1954). — [9] Koch, K.: Die analytische Projektion. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, H. 6 (1953). — [10] Remmert, R.: Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. Math. Ann. **132**, 277—288 (1956). — [11] Remmert, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957). — [12] Remmert, R.: Sur les espaces analytiques séparables et holomorphiquement convexes. C. R. Acad. Sci. (Paris) **243**, 118—121 (1956). — [13] Rothstein, W.: Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raum zweier komplexer Veränderlichen. Diss. Münster 1935. — [14] Stein, K.: Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, S. 97—107. Brüssel 1953. — [15] Stein, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132**, 63—93 (1956).

(Eingegangen am 28. März 1958)

HEINS, M.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 9—22 (1958)

Some Constructive Problems Concerning Analytische Gebilde

By

MAURICE HEINS in Urbana, Illinois

To Professor BEHNKE on the occasion of his sixtieth birthday

1. In the present paper we shall be concerned with the study of global properties of meromorphic solutions of the classical *Babbage equation*

$$b(b(z)) = z\,. \tag{1.1}$$

Our primary objective is the conformal characterization of the analytische Gebilde[1]) associated with a meromorphic solution of (1.1). Of course, it is essential that the meaning of a meromorphic solution of (1.1) be made precise. A broad interpretation that can reasonably be put on the notion of a meromorphic solution of (1.1) is that of a meromorphic[2]) function on a plane region Ω having the property (1): the inverses of the elements determined by b belong to the analytische Gebilde of which b is a branch. We are then concerned with the problem of characterizing conformally the analytische Gebilde which are their own inverses. We may impose stricter requirements on b, for example (2): for some $z_0 \in \Omega$, $b(z_0) \in \Omega$ and $b(b(z)) = z$ for z sufficiently near z_0. Finally, we may require (3): $b(\Omega) \subset \Omega$ and $b(b(z)) = z$ for all $z \in \Omega$. The condition (3) forces b to be a univalent map of Ω onto itself.

We shall see that, *if b is a solution of* (1.1) *in any one of the three senses just specified, there exists a non-trivial conformal involution of the analytische Gebilde of which b is a branch.* This is an easy consequence of the fact that the analytische Gebilde in question is its own inverse. The principal interest of our study lies in the opposite direction, that is, in the constructive aspect of the characterization problem. This part of the problem may be formulated as follows:

Given a Riemann surface F and a non-trivial conformal involution τ of F. Does there exist a solution of (1.1) *(in one of the above senses) such that the analytische Gebilde $\mathfrak{A}$ of which b is a branch admits a univalent conformal map φ onto F having the property that $\varphi^{-1}\tau\,\varphi$ carries each element of $\mathfrak{A}$ into its inverse?*

---

[1]) The concepts from the theory of Analytische Gebilde which are used in this paper are treated in § 2.

[2]) When we say that f is *meromorphic in a set E*, we mean that the domain of f is a neighborhood of E and that f is meromorphic at each point of E. We shall say that f is a *meromorphic function on E* provided that f is the restriction to E of a function meromorphic in E. Similar terminology will be used with "analytic" replacing "meromorphic".

This question admits an affirmative answer. In fact, there exists a b satisfying the above condition which meets the requirement (3) and has a domain conformally equivalent to an annulus.

The constructive aspect of our study depends largely on two tools. One is the fundamental approximation theorem of BEHNKE and STEIN [1]. The other is the exploitation of PICK-NEVANLINNA interpolation methods for bounded analytic functions on Riemann surfaces having finite topological characteristics (genus and contour number) [3]. Combined use of these tools was made by the author [4] in treating the problem of characterizing the set of asymptotic values of a meromorphic function whose domain is a given Riemann surface.

A by-product of our present investigation is a treatment of the non-compact case of the classical Riemann-Koebe realization problem in which not only is the *value function* (cf. § 2) of the constructed analytische Gebilde analytic i. e. polefree), but it enjoys certain distinguished covering properties.

2. ***Analytische Gebilde.*** Usage concerning analytische Gebilde is not rigid. For this reason we state succinctly in the present section the definitions which we employ. The formulation is essentially that of WEYL [7]. We shall also want to treat the notion of the *inverse* of an analytische Gebilde and to state certain theorems (Theorems 1, 2) which serve as a bridge between the special theory of analytische Gebilde and the general theory of Riemann surfaces.

We consider the class K of ordered pairs (f, g) where f and g are non-constant meromorphic functions having a common domain consisting of a plane region containing the origin and the map

$$z \to (f(z), g(z))$$

is univalent. We say that members (f_1, g_1) and (f_2, g_2) are *equivalent* provided that there exists a function φ analytic at $z = 0$ and satisfying $\varphi(0) = 0$, such that

$$f_1(z) = f_2(\varphi(z)), \ g_1(z) = g_2(\varphi(z))$$

for sufficiently small z. This requirement defines an equivalence relation in K. We term an equivalence class of this relation an *element*. The element containing (f, g) will be denoted by $e(f,g)$. We proceed by introducing a topology on the set $\mathfrak{E}$ of elements which renders each component of $\mathfrak{E}$ a 2-dimensional manifold, and thereupon endowing each component with a conformal structure. The components of $\mathfrak{E}$ are the underlying sets of the analytische Gebilde.

Given $(f, g) \in K$, we let $V(f, g)$ denote the set of elements $e(f^t, g^t)$, where $f^t(z) = f(t + z)$, $g^t(z) = g(t + z)$, $t \in$ domain of f and g, (the domain of f^t and g^t being the domain of f and g translated by $-t$). A topology is introduced on $\mathfrak{E}$ by defining $O (\subset \mathfrak{E})$ to be *open* provided that for each $e \in O$ there exists a pair $(f, g) \in e$ such that $V(f, g) \subset O$. This definition of "open" endows $\mathfrak{E}$ with a Hausdorff topology. The $V(f, g)$ are open. The map $t \to e(f^t, g^t)$ defines a homeomorphism of the domain of f and g onto $V(f, g)$. Thus $\mathfrak{E}$ is 2-dimensional. Let $\mathfrak{A}$ denote a component of $\mathfrak{E}$. Let $\mathfrak{T}$ denote the set of homeomorphisms $t \to e(f^t, g^t)$ where all (f, g) belonging to the elements $e \in \mathfrak{A}$ are taken

into account. Then $\mathfrak{T}$ endows $\mathfrak{A}$ with a conformal structure. The analytische Gebilde are the $\mathfrak{A}$ with conformal structure so defined.

We note that $(f(0), g(0))$ is independent of $(f, g) \in e$. Following the terminology of Saks and Zygmund [6] we call the common value of $f(0)$ the *center* of e and the common value of $g(0)$ the *value* of e. The center of e will be denoted by $c(e)$ and the value of e by $v(e)$. With a given analytische Gebilde $\mathfrak{A}$ we associate the two functions

$$c: e \to c(e), \quad v: e \to v(e), \quad e \in \mathfrak{A},$$

termed respectively the *center function* and the *value function* of $\mathfrak{A}$. They are both meromorphic functions on $\mathfrak{A}$.

The following two theorems which bridge the special notion of analytische Gebilde and the general concept of a Riemann surface are stated without proof. Their proofs are of an elementary character.

Theorem 1. *Let F denote a Riemann surface and let f and g denote non-constant meromorphic functions on F. There exist an analytische Gebilde $\mathfrak{A}$ and a conformal map φ of F into $\mathfrak{A}$ such that $f = c \circ \varphi$ and $g = v \circ \varphi$. There is precisely one pair $(\mathfrak{A}, \varphi)$ for which these conditions are fulfilled.*

Thanks to Theorem 1 we may characterize triples $(\mathfrak{A}, c, v)$ up to a conformal equivalence. Triples (F_k, f_k, g_k), $k = 1, 2$, where the F_k are Riemann surfaces and f_k and g_k are non-constant meromorphic functions on F_k, are said to be *equivalent* provided that there exists a univalent conformal map φ of F_1 onto F_2 such that $f_1 = f_2 \circ \varphi$, $g_1 = g_2 \circ \varphi$. An equivalence is thereby defined. A triple (F_1, f_1, g_1) is said to be *extendible* provided that there exist a triple (F_2, f_2, g_2) and a conformal map φ of F_1 into F_2 which is not a univalent map of F_1 *onto* F_2 such that $f_1 = f_2 \circ \varphi$ and $g_1 = g_2 \circ \varphi$. (An allied notion, extendibility of conformal maps of Riemann surfaces, is due to Bochner [2].) We have

Theorem 2. *The triple (F, f, g) is equivalent to a triple $(\mathfrak{A}, c, v)$ if and only if (F, f, g) is not extendible.*

Given an element e, we note that, if $(f, g) \in e$, then $(g, f) \in K$, and that $e(g, f)$ is independent of $(f, g) \in e$. We term the common element $e(g, f)$ the *inverse* of e and denote it by $\hat{e}$. The map

$$e \to \hat{e} \tag{2.1}$$

is a homeomorphism of $\mathfrak{E}$ onto itself which is involutionary. The restriction of (2.1) to an analytische Gebilde $\mathfrak{A}$ is a univalent conformal map of $\mathfrak{A}$ onto an analytische Gebilde $\hat{\mathfrak{A}}$. We term $\hat{\mathfrak{A}}$ the *inverse* of $\mathfrak{A}$. We say that $\mathfrak{A}$ is *involutionary* provided that $\mathfrak{A} = \hat{\mathfrak{A}}$. It is immediate that, if $\mathfrak{A}$ is involutionary, then (2.1) restricted to $\mathfrak{A}$ is a conformal involution of $\mathfrak{A}$ (possibly the identity map).

Let us now examine conditions under which a triple (F, f, g) is equivalent to a triple $(\mathfrak{A}, c, v)$ where $\mathfrak{A}$ is involutionary. Suppose that the two triples are equivalent and that φ is the univalent conformal map of F onto $\mathfrak{A}$ such that $f = c \circ \varphi$ and $g = v \circ \varphi$. Let σ denote the restriction of (2.1) to $\mathfrak{A}$ and let

$\tau = \varphi^{-1}\sigma\,\varphi$. First of all it is immediate that τ is an involutionary conformal map of F onto itself. From $c \circ \sigma = v$, we infer $g = f \circ \tau$. We conclude:

A necessary condition for (F, f, g) *to be equivalent to a triple* $(\mathfrak{A}, c, v)$ *where* $\mathfrak{A}$ *is involutionary is that* (1) (F, f, g) *be non-extendible and* (2) *there exist a conformal involution* τ *of* F *onto itself such that* $g = f \circ \tau$.

It is readily seen that this condition is also *sufficient* and that, if τ is a conformal involution of F satisfying $g = f \circ \tau$, then in fact the map φ of Theorem 1 is such that $\varphi\,\tau\,\varphi^{-1}$ carries each element of $\mathfrak{A}$ into its inverse.

The case where σ is the identity map occurs for precisely one analytische Gebilde, namely that which contains $e\,(\iota, \iota)$ where ι is the identity map of the finite plane onto itself. This analytische Gebilde is conformally equivalent to the extended plane and hence admits a conformal involution distinct from the identity. We are led to conclude: *a necessary condition that a Rieman surface* F *be conformally equivalent to an involutionary analytische Gebilde is that* F *admit a conformal involution distinct from the identity.*

Branch. We shall say that a non-constant meromorphic function f whose domain is a region Ω of the extended plane is a *branch* of the analytische Gebilde $\mathfrak{A}$ provided that there exists a region $\Omega_1 \subset \mathfrak{A}$ which is mapped univalently by c onto Ω and that $v(e) = f(c(e))$, $e \in \Omega_1$. Such an Ω_1 is unique. Further given a non-constant meromorphic function f whose domain is a region Ω of the extended plane, there is precisely one analytische Gebilde $\mathfrak{A}$ of which f is a branch. We shall denote it by $\mathfrak{A}(f)$. By the *elements determined by* f are meant the elements $e(\varphi, f \circ \varphi)$ where φ is a univalent conformal map of a region of the finite plane containing the origin into Ω. They belong to $\mathfrak{A}(f)$.

We see that, if b is a solution of (1.1) in any of the senses specified, then $\mathfrak{A}(b)$ is involutionary.

3. We now turn to the realization problem. Our starting point is a pair (F, τ) where F is a Riemann surface admitting non-trivial conformal involutions and τ is a non-trivial conformal involution of F. Our object is to construct a solution b of (1.1) satisfying requirement (3) with the domain of b conformally equivalent to an annulus such that there exists a univalent conformal map φ of F onto $\mathfrak{A}(b)$ having the property that $\varphi\,\tau\,\varphi^{-1}$ maps each element of $\mathfrak{A}(b)$ into its inverse.

The case where F is of genus zero and is compact is essentially trivial. We may take F to be the extended plane and $\tau(z) \equiv -z$. With $\Omega = \{1 < |z| < 2\}$ and $f(z) \equiv z$, we have $(F, f, f \circ \tau)$ non-extendible, the induced $\mathfrak{A}$ involutionary and $b(z) = -z$, $z \in \Omega$, a solution meeting the imposed requirements.

When we turn to a compact Riemann surface F of positive genus, we have two possibilities to consider according as τ possesses a fixed point or not.

4. τ possesses a fixed point. Suppose that q is a fixed point of τ. Let Δ denote a disk[3]) containing q in its interior satisfying: (1) Δ is mapped onto itself by τ, (2) Δ contains no fixed points of τ other than q. Let Δ_1 denote

[3]) We shall reserve the term *disk* for a homeomorph of $\{|z| \leq 1\}$ whose frontier is a regular analytic curve.

a disk containing Δ in its interior and satisfying (2) with Δ_1 replacing Δ as well as the condition that there exists a point $s \in \operatorname{int} \Delta_1$ such that $\tau(s) \notin \Delta_1$. Let f_0 be a univalent analytic function on Δ_1. By virtue of the theorem of Behnke and Stein there exists an analytic function on $F - \{\tau(s)\}$ which approximates f_0 uniformly on Δ_1. It follows that there exists a meromorphic function on F having a pole at $\tau(s)$ but no other poles which approximates f_0 uniformly on Δ_1.[4]) We conclude that there exists a meromorphic function f on F which has a pole only at $\tau(s)$, is univalent on Δ and has multiplicity 1 at s. The first and last of these properties insure that $(F, f, f \circ \tau)$ is non-extendible. Let A be an annulus[5]) contained in Δ which is mapped into itself by τ. Then $b = \{(f(p), f(\tau(p))) \mid p \in A\}$ is an involution of $f(A)$ which is a branch of an involutionary analytische Gebilde conformally equivalent to F where the map carrying each element of the Gebilde into its inverse corresponds to τ in the manner indicated above.

5. *τ does not possess a fixed point.* The construction leading to b in § 4 may be paralleled in this case when we replace the invariant disk Δ by the closure of a suitably chosen invariant annulus. The following lemma permits us to assert the existence of such an annulus. It will have application to the non-compact case as well.

Lemma 1. *Let τ be a conformal involution of a Riemann surface F. Then there exists an annulus $A (\subset F)$ satisfying:* (1) *$\operatorname{fr} A$ consists of two disjoint closed regular analytic Jordan curves,* (2) *τ maps A onto itself.*

Proof: We may dismiss the case where τ has a fixed point which is easy to treat when one considers an invariant disk containing a fixed point in its interior. For the remainder of the proof τ will be assumed to be fixed point free.

The cases where the domain of a conformal universal covering of F is parabolic are readily treated. One is the case of a Riemann surface conformally equivalent to $\{0 < |z| < +\infty\}$. This is of course trivial. If we take $F = \{0 < |z| < +\infty\}$, $\tau(z) \equiv -z$ and any $\{r_1 < |z| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < +\infty$, serves as A. The other is the case of a Riemann surface which is topologically a *torus*. In this case we introduce a conformal universal covering ψ of F whose domain is the finite plane. Let $\{\omega_1, \omega_2\}$ denote a generating pair of periods of ψ. Then $\tau \circ \psi = \psi \circ T$ where T is a translation of the form

$$T(z) \equiv z + {}^1/_2 (\delta_1 \omega_1 + \delta_2 \omega_2),$$

---

[4]) In fact, it suffices to introduce, as we may, a pair (g_1, g_2) where the g_k are meromorphic functions on F having poles at $\tau(s)$ but nowhere else on F and (F, g_1, g_2) is not extendible. An analytic function on $F - \{\tau(s)\}$ admits a representation of the form $\sum_{k=0}^{n-1} (A_k \circ g_1) g_2^k$ where n is the valence of g_1 and the A_k are meromorphic in the finite plane and have a finite number of poles. (In this representation we are understanding that g_1 and g_2 are restricted to $F - \{\tau(s)\}$.) It is now easy to see that, when the A_k are replaced by rational approximants having the same finite poles and principal parts at these poles as the A_k, we obtain an approximant to f_0 of the desired type.

[5]) We shall use the term *annulus* for a region conformally equivalent to some $\{r_1 < |z| < r_2\}$, where $0 < r_1 < r_2 < +\infty$.

$(\delta_1, \delta_2) = (1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. If $(\delta_1, \delta_2) = (1,0)$, it suffices to take A as the image of $\{t_1\,\omega_1 + t_2\,\omega_2 \mid 0 \leq t_1 < 1,\ 0 < t_2 < {}^1/_2\}$ with respect to ψ. The other two situations are similarly handled.

There remains to be considered the case where the domain of a conformal universal covering of F is hyperbolic. We now let ψ denote a conformal universal covering of F whose domain is $\{|z| < 1\}$. Let Γ denote the group of conformal automorphisms of $\{|z| < 1\}$ which leave ψ invariant. It will be convenient to introduce the classical *fundamental domain* of Γ, namely

$$\mathfrak{D} = \{z \mid d[z, 0] \leq d[z, \alpha(0)],\ \alpha \in \Gamma\}, \tag{5.1}$$

where $d[z_1, z_2]$ is the non-euclidean distance between the points z_1 and z_2 of $\{|z| < 1\}$. We observe that there exists a conformal automorphism β of $\{|z| < 1\}$ which satisfies $\tau \circ \psi = \psi \circ \beta$ and $\beta(0) \in \mathfrak{D}$. Since τ is a fixed point free involution of F, we conclude that β is parabolic or hyperbolic and that $\gamma = \beta \circ \beta$ is a member of Γ distinct from the identity. From

$$d[\beta(0), 0] = d[\beta(0), \gamma(0)], \tag{5.2}$$

we conclude that $\beta(0) \in fr\,\mathfrak{D}$. Further by the non-euclidean convexity of $\mathfrak{D}$, we are assured that the rectilinear segment $\overline{0\,\beta(0)}$ lies in the interior of $\mathfrak{D}$ save for $\beta(0)$. From

$$d[\beta^{-1}(0), 0] = d[0, \beta(0)] \leq d[\beta(0), \gamma\,\alpha(0)] = d[\beta^{-1}(0), \alpha(0)], \quad \alpha \in \Gamma,$$

we see that $\beta^{-1}(0) \in \mathfrak{D}$. Taken together with (5.2) this implies that $\beta^{-1}(0) \in fr\,\mathfrak{D}$. The image of the piecewise rectilinear arc $\beta^{-1}(0)\,0\,\beta(0)$ with respect to ψ is a closed (piecewise analytic) Jordan curve C in F which is mapped onto itself by τ.

Let $q \in F - C$ and let $\mathfrak{G}$ denote the Green's function with pole q of the component of $F - C$ which contains q. It is to be observed that τ maps each component of $F - C$ onto itself. Let $h = \mathfrak{G} + \mathfrak{G} \circ \tau$[6]). It is obvious that h is invariant with respect to τ[6]). If $c_1, c_2 (> c_1)$ are chosen positive and sufficiently small, then there exists a component of $\{p \mid c_1 < h(p) < c_2\}$ which meets the requirements imposed by the lemma on A. The lemma is thereby established.

Before we turn to the realization problem for F compact, τ fixed point free, it will be convenient to make the following observations concerning A for τ *fixed point free*.

(a) *If F is compact, then $F - \bar{A}$ is connected.* Suppose that $F - \bar{A}$ is not connected and that Ω is a component of $F - \bar{A}$. Then τ maps Ω onto itself. On considering (as above) the Green's function $\mathfrak{G}$ for Ω with pole $q \in \Omega$ and forming $h = \mathfrak{G} + \mathfrak{G} \circ \tau$, we are led to the conclusion that the abelian differential $\delta\,h$ (given in the parametric neighborhood associated with the local uniformizer σ by $(h \circ \sigma)_x - i(h \circ \sigma)_y$) has an *even* number of zeros since τ has no fixed points. This is impossible as is readily seen on calculating the number of zeros of $\delta\,h$ in terms of the Euler characteristic.

[6]) Actually τ restricted to the component of $F - C$ containing q.

(b) *If F is not compact, each component of $F - \bar{A}$ is not relatively compact.* The argument used in (a) remains applicable.

We return to the realization problem. It is now clear that the case where F is compact and τ is fixed point free may be treated along lines which parallel the treatment of § 4. In fact, let ψ now denote a univalent conformal map of an annulus $\{1 < |z| < r\}$ onto an admitted A. If we let $1 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r$, let $\psi\{r_2 \leq |z| \leq r_3\}$ take over the role of Δ, let the image with respect to ψ of the union of $\{r_1 \leq |z| \leq r_4\}$ and a sufficiently small closed circular disk centered at $z = r_4$ take over the role of Δ_1, let the inverse of ψ take over the role of f_0, and finally let $\psi(r_4 + \eta)$ take over the role of s. η being sufficiently small and positive, we may then paraphrase the argument of § 4.

6. The exhaustion of a non-compact F. We are now concerned with the realization problem for the case where F is not compact. Our first objective will be the introduction of a suitable exhaustion of F. The exhaustions which we give are based upon a clssification of the pairs (F, τ). It will also be convenient to introduce in this section certain auxiliary sets which depend upon our classification of (F, τ).

I. *τ has a fixed point.* Let q denote a fixed point of τ and let Δ denote a disk containing q in its interior and satisfying $\tau(\Delta) = \Delta$. We take as our exhaustion of F an exhausting sequence of regions $(\Omega_n)_0^\infty$ satisfying:

(a) for each n, Ω_n is relatively compact, $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, $fr\,\Omega_n = fr\,\bar{\Omega}_n$ and consists of a finite number of mutually disjoint regular analytic closed Jordan curves, each component of $F - \bar{\Omega}_n$ is not relatively compact, and $\tau(\Omega_n) = \Omega_n$;
(b) $\Delta \subset \Omega_0$.

It is clear that the construction of such a sequence would be straightforward were it not for the condition $\tau(\Omega_n) = \Omega_n$. A method of obtaining an exhaustion of the desired type is the following. We let G denote the Riemann surface obtained in the standard manner by identification of the points of F with their τ-images and note that F admits a conformal map π of constant valence 2 onto G. Now G admits an exhaustion $(\omega_n)_0^\infty$ meeting the requirement (a) with ω_n replacing Ω_n, apart from the irrelevent last clause, as well as the requirements that ω_0 contain $\pi(\Delta)$ and that for each n, π be not ramified over $fr\,\omega_n$. Then $(\pi^{-1}(\omega_n))_0^\infty$ meets the stipulated requirements. To be specific, the points of G are the (non-ordered) pairs $\{p, \tau(p)\}$ and π is defined by $\pi(p) = \{p, \tau(p)\}$.

It is to be observed that the condition (a) implies that an analytic function on $\bar{\Omega}_n$ admits uniform approximation on $\bar{\Omega}_n$ by an analytic function on $\bar{\Omega}_{n+1}$ thanks to the theorem of BEHNKE and STEIN.

It will be convenient to introduce an analytic function f_0 on $\bar{\Omega}_0$ which satisfies $f_0(q) = 0$, is univalent on a region containing Δ and is of modulus one on $fr\,\Omega_0$. In each of the remaining cases we shall introduce a function f_0 depending upon the special conditions prevailing.

In each of the remaining cases τ is *fixed point free.*

II α. *F is conformally equivalent to $\{0 < |z| < +\infty\}$.* We take, as we may, F as $\{0 < |z| < +\infty\}$, and have $\tau(z) = -z$. We let $A = \{{}^1/_2 < |z| < {}^3/_4\}$,

$\Omega_n = \{2^{-(n+2)} < |z| < 2^{n+2}\}$. We take q as 1. Let f_0 denote an analytic function on $\overline{\Omega}_0$ which is univalent on $\{^3/_8 < |z| < ^7/_8\}$ and is of modulus one on $fr\ \Omega_0$ and in addition has simple zeros at 1 and -1 and satisfies $f_0'(1) \neq f_0'(-1)$.

II β. *F is conformally equivalent to $\{0 < |z| < 4\}$.* On taking $F = \{0 < |z| < 4\}$, we have $\tau(z) \equiv -z$. We let $A = \{^1/_2 < |z| < ^3/_4\}$ and $q = 1$. We now let $\Omega_n = \{2^{-(n+2)} < |z| < 4 - 2^{-(n+2)}\}$. We let f_0 denote an analytic function on $\overline{\Omega}_0$ which is univalent on $\{^3/_8 < |z| < ^7/_8\}$, is of modulus one on $fr\ \Omega_0$ and has simple zeros at 1 and -1.

II γ. *F is an annulus.* We take $F = \{r^{-1} < |z| < r\}, r > 1$. Again $\tau(z) \equiv -z$. Let $(r_n)_0^\infty$ denote an increasing sequence of positive numbers where $1 < r_0$, $\lim r_n = r$. Let $A = \{r_0^{-1/2} < |z| < r_0^{1/2}\}$. Let $\Omega_n = \{r_n^{-1} < |z| < r_n\}$. Let q denote a positive number satisfying $r_0^{1/2} < q < r_0$. Let f_0 denote an analytic function on $\overline{\Omega}_0$ which is univalent on a region containing $\overline{A}$, has simple zeros at q and $-q$ and is of modulus one on $fr\ \Omega_0$.

II δ. *The fundamental group of F is not abelian.* In this case we may choose, thanks to Lemma 1 and the proper discontinuity of the group of conformal automorphisms of F, an A meeting the requirements of Lemma 1 and $q \in F - \overline{A}$ which are such that $\varphi \to \varphi(q)$ is univalent on the set of conformal automorphisms (identity included) of F onto itself and that no one of the $\varphi(q)$ lies in $\overline{A}$. We introduce a sequence $(\Omega_n)_0^\infty$ meeting the conditions (a) stipulated for case I as well as: (b) $\overline{A} \subset \Omega_0$, (c) $q, \tau(q) \in \Omega_0$. It is to be recalled that each component of $F - \overline{A}$ is not relatively compact. Also the remarks of case I concerning the existence of such a sequence $(\Omega_n)_0^\infty$ remain applicable. We let f_0 now denote an analytic function on $\overline{\Omega}_0$ which is of constant modulus 1 on $fr\ \Omega_0$, is univalent on a region containing $\overline{A}$ and has simple zeros at q and $\tau(q)$.

It will be convenient to introduce an auxiliary set $B(\subset F)$ defined as follows. In case I, B is to be the set of fixed points of τ different from q. In cases II α, β, γ, we set $B = \theta$. In case II δ, we take B as the set $\{\varphi(q)\}$ less $q, \tau(q)$.

We shall want to be assured that, among other things, the limit function which we shall construct is locally simple at q and $\tau(q)$. To that end, we shall fix a local uniformizer for a neighborhood of q and one for a neighborhood of $\tau(q)$ (provided that $\tau(q) \neq q$) and introduce the notion of the *local derivative* at $q(\tau(q))$ of a function analytic at $q(\tau(q))$. It is to be understood as the derivative of the function composed with a suitable restriction of the uniformizer in question at the parameter value corresponding to $q(\tau(q))$.

We fix a positive number c which is less than the moduli of the local derivatives of f_0 at q and $\tau(q)$. For case II α we let c_1 denote a positive number less than $|f_0'(1) - f_0'(-1)|$.

7. *The construction of f_1.* The constructions given below are based on the following observation: *Given an analytic function g on $\overline{\Omega}_m$. Then there exists a sequence $(g_n)_1^\infty$ of analytic functions on Ω_{m+1} satisfying: g_n is of constant modulus n on $fr\ \Omega_{m+1}$; g_n tends uniformly to g on $\overline{\Omega}_m$.* This observation is a consequence of the Behnke-Stein theorem and the

fact that an analytic function on Ω_{m+1} which is of modulus $\leq M$ is the limit of a sequence of analytic functions on $\overline{\Omega}_{m+1}$ which are of constant modulus M on $fr\,\Omega_{m+1}$ [cf. 3]. In fact, the Behnke-Stein theorem guarantees the existence of a sequence $(h_n)_1^\infty$ of analytic functions on Ω_{m+1} satisfying: $\sup |h_n| \leq n$; h_n tends uniformly to g on $\overline{\Omega}_m$. Each h_n may be replaced by a g_n by virtue of the second cited result.

We apply the above observation to f_0 and let $(g_n^1)_1^\infty$ denote a sequence of the desired type. In case I we set $v_n^1 = g_n^1 - g_n^1(q)$. In cases II α – II δ, we let h^{11} and h^{12} denote analytic functions on $\overline{\Omega}_1$ satisfying

$$h^{11}(q) = 1\ ,\ h^{11}(\tau(q)) = 0\ ,\ h^{12}(q) = 0\ ,\ h^{12}(\tau(q)) = 1\ ,$$

and set

$$v_n^1 = g_n^1 - [g_n^1(q)\,h^{11} + g_n^1(\tau(q))\,h^{12}]\ .$$

For n sufficiently large v_n^1 satisfies the following conditions:

(7a) $$\min_{fr\,\Omega_1} |v_n^1| > 2\ .$$

(7b) $$\max_{\overline{\Omega}_0} |v_n^1 - f_0| < 4^{-1}.$$

(7c) Each component of $\Omega_1 - \overline{\Omega}_0$ contains a zero of v_n^1.

(7d) The local derivatives of v_n^1 at q and $\tau(q)$ have modulus exceeding c (cf. last paragraph § 6).

(7e) v_n^1 is univalent on a region containing Δ or $\overline{\Delta}$.

(7f) (only for II α). The modulus of the difference of the derivatives of v_n^1 at $z = 1$ and $z = -1$ exceeds c_1.

These assertions are consequences of the fact that v_n^1 tends to f_0 uniformly on $\overline{\Omega}_0$ and the boundary behavior of the v_n^1 as well as that of f_0.

We fix an n such that v_n^1 satisfies (7a)—(7f) inclusive and denote the corresponding v_n^1 simply by v_1. We add to v_1 an analytic function on $\overline{\Omega}_1$ whose zeros are those of v_1 which are not in B, the order of each zero of the added function being that of the same zero of v_1. Further the added function is to be taken so small that the resulting function w_1 not only satisfies conditions (7a)—(7f) inclusive with w_1 replacing v_n^1, but also the condition that w_1 does not vanish at a point of B.

f_1 is now achieved by adding to w_1 an analytic function on $\overline{\Omega}_1$ whose set of zeros consists of $q, \tau(q)$ and a subset of the set of zeros $(\neq q, \tau(q))$ of w_1 which has the property that it contains precisely one point of each pair $\{r, \tau(r)\}$ where r is a zero of w_1 different from q and $\tau(q)$. It is further stipulated that at each of the zeros of the added function the multiplicity of the added function is equal to the multiplicity of w_1 and that the added function is so small that f_1 fulfills the conditions (7a)—(7f) replacing v_n^1 as well as the conditions that, if $f_1(p) = f_1(\tau(p)) = 0$, then $p = q$ or $p = \tau(q)$, and that f_1 does not vanish on B.

8. Disk family $\mathbf{D}_1$. We fix for each of the zeros of f_1 and their τ-images other than q and $\tau(q)$ a disk neighborhood in Ω_1. We require that the disks associated with distinct points be mutually disjoint, and further that neither q nor $\tau(q)$ nor a fixed point of τ belong to any of these disks and that the

disk associated with the τ-image of a zero of f_1 is the τ-image of the disk containing the zero. In case II δ we require that the set of the images of q with respect to the conformal automorphisms of F (identity included) have no point in common with the chosen disks. We assume that a family of disks, $\mathbf{D}_1$, meeting the specified requirements has been selected.

9. The recursive construction. Suppose that for a given positive integer k we are given a pair $(f_k, \mathbf{D}_k)$ where f_k is an analytic function on $\bar{\Omega}_k$ and $\mathbf{D}_k$ is a family of disks each of which is contained in Ω_k. Suppose further that the following requirements are fulfilled:

(9a) $\min_{fr\,\Omega_k} |f_k| > 2^k$.

(9b) f_k has a zero on each component of $\Omega_k - \bar{\Omega}_{k-1}$.

(9c) The local derivatives of f_k at q and $\tau(q)$ have absolute values greater than c.

(9d) f_k is univalent on a region containing $\Delta(\bar{A})$.

(9e) The zeros of f_k include q and $\tau(q)$. If $f_k(p) = f_k(\tau(p)) = 0$, then $p = q$ or $p = \tau(q)$.

(9f) (for II α only) $|f'_k(1) - f'_k(-1)| > c_1$.

(9g) $\mathbf{D}_k$ meets the conditions imposed on $\mathbf{D}_1$ of § 8 with f_k and Ω_k replacing f_1 (of § 7) and Ω_1 respectively.

What we wish to show is the *existence of a pair* $(f_{k+1}, \mathbf{D}_{k+1})$ satisfying conditions (9a)—(9g) inclusive with k replaced by $k+1$ and the following three conditions:

(i) $\max_{\bar{\Omega}_k} |f_{k+1} - f_k| < 4^{-(k+1)}$.

(ii) Each zero of f_{k+1} in Ω_k other than q and $\tau(q)$ lies in the interior of a disk of the family $\mathbf{D}_k$ which contains a zero of f_k.

(iii) Each disk of the family $\mathbf{D}_{k+1}$ which contains a zero of f_{k+1} in Ω_k is contained in the interior of a disk of $\mathbf{D}_k$; the disks of $\mathbf{D}_{k+1}$ which contain zeros of f_{k+1} in $\Omega_{k+1} - \bar{\Omega}_k$ are themselves contained in $\Omega_{k+1} - \bar{\Omega}_k$.

The existence of such a pair $(f_{k+1}, \mathbf{D}_{k+1})$ may be established by an argument which follows, insofar as the construction of f_{k+1} is concerned, that of § 7. We introduce a sequence $(g_n^{k+1})_1^\infty$ of analytic functions on $\bar{\Omega}_{k+1}$ which tends to f_k uniformly on $\bar{\Omega}_k$ and is such that g_n^{k+1} is of constant modulus n on $fr\,\Omega_{k+1}$. For case I, we introduce

$$v_n^{k+1} = g_n^{k+1} - g_n^{k+1}(q),$$

and for cases II α—II δ we let $h^{k+1,1}$ and $h^{k+1,2}$ denote analytic functions on $\bar{\Omega}_{k+1}$ satisfying

$$h^{k+1,1}(q) = 1, \; h^{k+1,1}(\tau(q)) = 0, \; h^{k+1,2}(q) = 0, \; h^{k+1,2}(\tau(q)) = 1,$$

and set

$$v_n^{k+1} = g_n^{k+1} - [g_n^{k+1}(q)\, h^{k+1,1} + g_n^{k+1}(\tau(q))\, h^{k+1,2}].$$

For n sufficiently large $\max_{\bar{\Omega}_k} |v_n^{k+1} - f_k| < 4^{-(k+1)}$, and requirements (9a)—(9f) are satisfied with v_n^{k+1} restricted to $\bar{\Omega}_k$ replacing f_k, each zero of v_n^{k+1} in Ω_k other than q and $\tau(q)$ lies in the interior of a member of $\mathbf{D}_k$ containing a zero of f_k and each component of $\Omega_{k+1} - \bar{\Omega}_k$ contains a zero of v_n^{k+1}. We fix such an n for which $\min_{fr\,\Omega_{k+1}} |v_n^{k+1}| > 2^{k+1}$ and denote the corresponding v_n^{k+1} simply by v_{k+1}. We add to v_{k+1} an analytic function on $\bar{\Omega}_{k+1}$ whose set of zeros consists of the zeros of v_{k+1} which are not in B, the order of each zero of the added function being that of the same zero of v_{k+1}. Further the added function is to be taken so small that the resulting function, w_{k+1}, has a restriction to $\bar{\Omega}_k$ which satisfies (9a)—(9f) with the restriction of w_{k+1} to $\bar{\Omega}_k$ replacing f_k and in addition is such that $\min_{fr\,\Omega_{k+1}} |w_{k+1}| > 2^{k+1}$, each zero of w_{k+1} in Ω_k different from q and $\tau(q)$ lies in the interior of a member of $\mathbf{D}_k$ containing a zero of f_k, each component of $\Omega_{k+1} - \bar{\Omega}_k$ contains a zero of w_{k+1}, no zero of w_{k+1} lies in B, $\max_{\bar{\Omega}_k} |w_{k+1} - f_k| < 4^{-(k+1)}$.

f_{k+1} is obtained by adding to w_{k+1} an analytic function on $\bar{\Omega}_{k+1}$ whose zero set consists of q, $\tau(q)$ and a subset of the zeros ($\neq q, \tau(q)$) of w_{k+1}, which has the property that it contains precisely one point of each pair $\{r, \tau(r)\}$, where r is a zero of w_{k+1}, $r \neq q, \tau(q)$. It is further stipulated that at each of the zeros of the added function the multiplicity of the added function is equal to the multiplicity of w_{k+1}, and that the added function is so small that f_{k+1} meets the requirements (9a)—(9f) with f_{k+1} replacing f_k (but everything else remaining unaltered) and in addition: the conditions (i), (ii), and $\min_{fr\,\Omega_{k+1}} |f_{k+1}| > 2^{k+1}$, as well as the conditions that $f_{k+1}(p) \neq 0$ for $p \in B \cap \Omega_{k+1}$, that f_{k+1} has a zero on each component of $\Omega_{k+1} - \bar{\Omega}_k$, and that $f_{k+1}(p) = f_{k+1}(\tau(p)) = 0$ implies $p = q$ or $p = \tau(q)$.

We note that a family $\mathbf{D}_{k+1}$ is readily constructed which satisfies (iii) thanks to the requirements imposed on f_{k+1}.

The existence of an admissible pair $(f_{k+1}, \mathbf{D}_{k+1})$ is assured.

10. It follows now from §§ 7, 8, 9 that there exists a sequence $((f_k, \mathbf{D}_k))_1^\infty$ where for each positive integer k the pair $(f_k, \mathbf{D}_k)$ satisfies (9a)—(9g) and the conditions (i), (ii), (iii) of § 9 are fulfilled. We conclude that for each compact subset C of F, f_k is defined on C for $k \geq k(C)$ and $(f_k)_{k(C)}^\infty$ converges uniformly on C. Let f denote the limit function of $(f_k)_1^\infty$; f is clearly not constant. Our object is to show that $(F, f, f \circ \tau)$ is *not extendible* and that consequently our problem is solved.

The following properties of f are readily concluded:

(10a) f is univalent on int $\Delta(A)$.

(10b) f has a zero in each component of $\Omega_{k+1} - \bar{\Omega}_k$ for each positive integer k.

(10c) $\min_{fr\,\Omega_k} |f| \to +\infty$.

(10d) The zeros of f include q and $\tau(q)$ (which are simple zeros). No point of B is a zero of f. If $f(p) = f(\tau(p)) = 0$, then $p = q$ or $p = \tau(q)$.

(10e) In case IIα, $f'(1) \neq f'(-1)$.

Non-extendibility of $(F, f, f \circ \tau)$. Suppose that θ is a conformal map of F into a Riemann surface G and g and h are meromorphic functions on G, and

suppose further that

$$f = g \circ \theta, \ f \circ \tau = h \circ \theta. \tag{10.1}$$

It is to be observed that thanks to (10c) θ enjoys special topological properties. In fact, for each relatively compact region Ω of $\theta(F)$, each component of $\theta^{-1}(\Omega)$ is a relatively compact subset of F. It is to be noted that we construe the relative compactness of Ω in the sense of the relative topology of $\theta(F)$, thus $\overline{\Omega}$ (in the sense of G) is to be compact and is to be contained in $\theta(F)$.

We now infer from (10d) that θ has constant valence 1 or 2 on $\theta(F)$. For $\theta(p) = \theta(q)$ implies by (10.1) that $f(p) = f(q)$ and $f(\tau(p)) = f(\tau(q))$. Hence $p = q$ or $p = \tau(q)$. Since f has multiplicity 1 at q and $\tau(q)$, θ has multiplicity 1 at q and $\tau(q)$. Consequently the valence of θ at $\theta(q)$ is 1 or 2. As a consequence of the covering property of θ described in the preceeding paragraph, θ has constant valence 1 or 2 on $\theta(F)$.

We now verify that the *value of the valence of θ on $\theta(F)$ is indeed* 1. At this point use is made of special properties enjoyed by f in each of the cases considered.

Case I. Here $\theta(p) = \theta(q)$ implies $p = q$ and the valence has value 1 on $\theta(F)$.

For the remaining cases we proceed as follows. Suppose that θ were not univalent. Then there is a unique conformal involution φ of F distinct from the identity which leaves θ invariant. We have from (10.1)

$$f \circ \varphi = f, \ f \circ \tau \circ \varphi = f \circ \tau,$$

whence we conclude that $\varphi \neq \tau$ by virtue of (10b) and (10d). We now bring into play the special features of the various cases II α—II δ.

Case II α. Here we have: $q = 1$; $\varphi(1) = -1$ since the multiplicity of f is 1 at $z = 1$. Hence $\varphi(z) = -z^{-1}$ since $\varphi \neq \tau$. From $f(-z^{-1}) \equiv f(z)$ we conclude $f'(-1) = f'(1)$. This is impossible. Hence θ is univalent in case II α.

Case II β. The only conformal involutions of F are the identity map and τ. We conclude the univalence of θ.

Case II γ. Here $\varphi(z)$ would have to be of the form εz^{-1}, $|\varepsilon| = 1$. But $\varphi(q) \neq q$ and $\varphi(q) \neq \tau(q)$. The univalence of θ follows.

Case II δ. From $f \circ \varphi = f$ we conclude that f vanishes at $\varphi(q) \in B$. By (10d) this is impossible. The univalence of θ is established.

There remains to be shown that $\theta(F) = G$ in order to conclude the non-extendibility of $(F, f, f \circ \tau)$. Suppose that $\theta(F) \neq G$. Each point of $fr\,\theta(F)$ would then be a pole of g. Otherwise there would exist $s \in fr\,\theta(F)$ such that $g(s) \neq \infty$ and consequently there would exist in a sufficiently small neighborhood of s a point $t \in fr\,\theta(F)$ which is an asymptotic point of θ and is not a pole of g. But then $g(t)$ would be a finite asymptotic value of f. This is impossible.

Suppose now that $s \in fr\,\theta(F)$. There would exist a disk δ satisfying: $s \in \operatorname{int} \delta$, $\delta - \{s\} \subset \theta(F)$, $\min_\delta |g| > 0$. However $\theta^{-1}(\delta)$ would then contain a component of $F - \overline{\Omega}_n$ for n sufficiently large. Hence f would have infinitely many zeros on $\theta^{-1}(\delta)$. This is impossible since g does not vanish on δ. We

must reject the assumption $\theta(F) \neq G$. The proof of the non-extendibility of $(F, f, f \circ \tau)$ is established.

11. The Riemann-Koebe realization problem (non-compact case). We shall now see that the Riemann-Koebe realization problem may be given a solution which enjoys certain special properties by a method which has much in common with that used in the realization aspects of our study of conformal involutions[7]). We observe that the Riemann-Koebe problem is equivalent to the following:

Let there be given a non-compact Riemann surface F and a non-constant meromorphic function m_1 on F. Does there exist a non-constant meromorphic function m_2 on F such that (F, m_1, m_2) is not extendible?

We shall see that *there exists such an m_2 which is analytic and has the property that for each relatively compact region Ω of the finite plane, each component of $m_2^{-1}(\Omega)$ is relatively compact.*

Suppose that $q \in F$ and that f is an analytic function on F having the covering property stated for m_2 in the preceeding paragraph and also the following property: f has a simple zero at q but does not vanish at any antecedent of $m_1(q)$ with respect to m_1 distinct from q; for each compact set $C \subset F$, each component of $F - C$ which is not relatively compact contains a zero of f. Then on paraphrasing the argument of § 10 we see that (F, m_1, f) is not extendible so that f is an admissible m_2.

Construction[8]) *of* f. Suppose that (p_k) is a univalent sequence, with domain either the set of non-negative integers or else an initial segment of the set of non-negative integers, which enumerates the set of antecedents of $m_1(q)$ with respect to m_1 and satisfies $p_0 = q$.

Let $(\Omega_n)_0^\infty$ denote a sequence of regions of F satisfying condition (a) of § 6 I (save the irrelevant last clause). We suppose that $p_0 \in \Omega_0$. The notion of the local derivative at a point of F as defined in § 6 shall persist.

Suppose that f_n is an analytic function on $\overline{\Omega}_n$ satisfying

$\mathbf{P}_n$: $f_n(p_0) = 0$; the absolute value of the local derivative of f_n at p_0 exceeds 1; $f_n(p_k) \neq 0$ for $p_k (\neq p_0) \in \Omega_n$; $\min_{fr\,\Omega_n} |f_n| > 4^{n+1}$; for $1 \leq k \leq n$, f_n has a zero on each component of $\Omega_k - \overline{\Omega}_{k-1}$ when $n \geq 1$.

Then there exists an analytic function f_{n+1} on $\overline{\Omega}_{n+1}$ satisfying

$$\mathbf{Q}_n : \mathbf{P}_{n+1};\ \max_{\overline{\Omega}_n} |f_n - f_{n+1}| < 4^{-(n+1)};$$
$$|f_{n+1}(p_k)| > (1 - 4^{-(n+1)})\, |f_n(p_k)|\,,\ p_k (\neq p_0) \in \Omega_n\,.$$

To see this we introduce a sequence $(g_m)_1^\infty$ where g_m is an analytic function on $\overline{\Omega}_{n+1}$ which is of modulus m on $fr\ \Omega_{n+1}$ and $g_m(p_0) = 0$, and $(g_m)^\infty$ tends uniformly to f_n on $\overline{\Omega}_n$. There exists a positive integer m such that g_m replacing f_{n+1} satisfies each requirement of $\mathbf{Q}_{n+1}$ save possibly the absence of zeros at the $p_k \in \Omega_{n+1} - \overline{\Omega}_n$. We fix such an m and denote the corresponding g_m simply

[7]) For the existence of an analytische Gebilde with analytic center and value functions which is conformally equivalent to a given non-compact Riemann surface, cf. [5].

[8]) When the argument parallels that already given in the preceeding sections we shall omit the details.

by g. Now let h denote an analytic function on $\overline{\Omega}_{n+1}$ whose sole zero is p_0. Then for η a sufficiently small constant $\neq 0$, $g + \eta h$ is an admissible f_{n+1}.

We conclude, since there exists f_0 satisfying $\mathbf{P}_0$ that there exists a sequence $(f_n)_0^\infty$ where f_n is an analytic function on $\overline{\Omega}_n$ satisfying $\mathbf{P}_n$ for each n and f_{n+1} satisfies $\mathbf{Q}_n$ for each n. The sequence $(f_n)_0^\infty$ converges uniformly in F to a non-constant limit function f. We see that f has a simple zero at q and $f(p_k) \neq 0$ for $k \neq 0$. Further $\min_{\Gamma \Omega_n} |f| > 4^{n+1} - (3(4)^n)^{-1}$ and f has a zero in each component of $\Omega_n - \overline{\Omega}_{n-1}$ for each positive integer n. f meets the imposed requirements.

Bibliography

[1] BEHNKE, HEINRICH, u. KARL STEIN: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. 120, 430—461 (1949). — [2] BOCHNER, SALOMON: Fortsetzung Riemannscher Flächen. Math. Ann. 98, 406—421 (1927). — [3] HEINS, MAURICE: A lemma on positive harmonic functions. Ann. of Math. (2) 52, 568—572 (1950). — [4] HEINS, MAURICE: Meromorphic functions with assigned asymptotic values. Duke Math. J. 22, 353—356 (1955). — [5] PFLUGER, ALBERT: Theorie der Riemannschen Flächen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957. — [6] SAKS, STANISŁAW, and ANTONI ZYGMUND: Analytic Functions. Warsaw 1952. — [7] WEYL, HERMANN: Die Idee der Riemannschen Fläche. 3d ed. Stuttgart 1955.

(Eingegangen am 10. Januar 1958)

WALSH, J. L.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 23—33 (1958)

A Generalization of Faber's Polynomials*

By
J. L. WALSH in Cambridge/Mass.

Dedicated to Professor HEINRICH BEHNKE on the occasion of his sixtieth anniversary

Although the polynomials of FABER [1, 2] remain outstanding as the most useful polynomials for the expansion in an arbitrary Jordan region of the complex plane of a function analytic there, other kinds of polynomials (such as those found by interpolation) have hitherto proved highly useful in the simultaneous expansion in several disjoint Jordan regions of a function analytic in those regions. It is interesting to note, and this is the purpose of the present paper, that Faber's original method applies also in the latter case, provided suitable modifications are made, and yields a new set of polynomials with important properties.

These new polynomials are found (i) by considering a suitable sequence of interpolation polynomials convergent in the interior of a lemniscate leading to a series similar to that of Jacobi, and (ii) by mapping conformally the exterior of the lemniscate (suitably chosen) onto the exterior of given closed Jordan regions; the expansion of this mapping function yields the new polynomials. The original Faber situation is of course simpler, in that the Taylor development can be used for (i), and the map in (ii) is the Riemann map of one Jordan region onto another. However, the present more general polynomials reduce when specialized to those of Faber.

Professor LENNART CARLESON has also devised a set of polynomials generalizing those of Faber; he replaces (ii) by the map of the universal covering surface of the exterior of the given Jordan regions, so the Taylor development can be used in (i). His method is simpler than the present one, but ordinarily yields a less rapidly convergent polynomial expansion.

I

We shall set forth the special case for polynomials of a more general series of rational functions of interpolation recently introduced (WALSH [7]).

Lemma 1. *Let the positive numbers $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ be given, with $\Sigma\, m_j = 1$. For the values $n = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots, \nu$, there exist integers N_{nj} satisfying the relations*

$$\sum_{j=1}^{\nu} N_{nj} = n\,, \tag{1}$$

$$0 \leq N_{nj} \leq N_{n+1,j} \leq N_{nj} + 1\,, \tag{2}$$

$$|N_{nj} - n m_j| \leq A\,. \tag{3}$$

* This research was sponsored (in part) by the U.S. Air Force Office of Scientific Research, of the Air Research and Development Command.

Here and below the numbers A with or without subscripts represent positive constants, which may however change from one formula to another.

Lemma 1 is not difficult to prove; compare (WALSH [7]).

Lemma 2. *Let there be given in the z-plane the points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ and positive weights $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ with $\sum m_j = 1$. Then there exists a sequence of points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, of which each α_j is some a_k, such that on every closed bounded point set E containing no a_k we have*

$$0 < A_1 < \left| \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)}{[U(z)]^n} \right| < A_2, \tag{4}$$

$$U(z) \equiv (z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots(z-a_\nu)^{m_\nu}. \tag{5}$$

We define the points α_k according to the properties established in Lemma 1, namely $\alpha_1 = a_j$ if $N_{1j} = 1$, and more generally $\alpha_{n+1} = a_k$, where k is uniquely determined by the inequality $N_{n+1,k} > N_{nk}$. Thus, among the points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ there are precisely N_{nj} which coincide with a_j. For every value of n we have

$$\prod_1^n (z-\alpha_j) \equiv \prod_{j=1}^n (z-a_j)^{N_{nj}}.$$

From inequality (3) we have for z on E $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$

$$|N_{nj} \log|z-a_j| - n m_j \log|z-a_j|| \leqq A',$$

$$\left| \sum_{j=1}^{\nu} \log|z-a_j|^{N_{nj}} - n \sum_{j=1}^{\nu} \log|z-a_j|^{m_j} \right| \leqq \nu A',$$

and (4) follows. The absolute value which appears in (4) approaches unity as z becomes infinite, so (4) persists even if E is not bounded.

We emphasize the importance of (4), which finds application throughout our later work; a weaker inequality would not suffice.

Theorem 1. *Let the distinct points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ and positive weights $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ be given. In the notation (5) we denote generically by $E_\sigma (\sigma > 0)$ the point set $|U(z)| < \sigma$ and by Γ_σ the set $|U(z)| = \sigma$. A function $f(z)$ analytic on the set E_ϱ (the case $\varrho = \infty$ not excluded), but not analytic throughout any $E_{\varrho'}$, $\varrho' > \varrho$, can be expanded on E_ϱ in a series of interpolation*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n u_n(z), \quad u_0(z) \equiv 1, \quad u_n(z) \equiv (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n), \tag{6}$$

which converges uniformly on each compact set in E_ϱ. Here the α_n, each of which is some a_k, are chosen to satisfy the conditions of Lemma 2. The coefficients c_n satisfy the relation

$$\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 1/\varrho; \tag{7}$$

on every set E_σ, $\sigma < \varrho$, we have

$$\limsup_{n\to\infty} [\max |f(z) - s_n(z)|, z \text{ on } E_\sigma]^{1/n} = \sigma/\varrho, \tag{8}$$

$$s_n(z) \equiv \sum_0^n c_k u_k(z).$$

Series (6) is indeed a series of interpolation; the coefficient c_0 can be found formally by setting $z = \alpha_1$, and the later coefficients similarly found by setting successively $z = \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$ with differentiation a suitable number of times to allow for the α_j which are repeated. The validity of this method of computing the c_k is a consequence of the validity of (6), including uniformity of convergence in the neighborhood of each a_k. This method shows also that the expansion (6), valid uniformly in the neighborhood of each a_k, if existent is unique.

Equation (6) follows from Hermite's interpolation formula

$$f(z) - s_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{u_{n+1}(z) f(t)\, dt}{u_{n+1}(t)(t-z)}, z \text{ on } E_\sigma, \tag{9}$$

$\sigma < \lambda < \varrho$. It follows from (4) and (9) that the first member of (8) is not greater than the second member ($\lambda \to \varrho$), so the series (6) converges uniformly to $f(z)$ on any closed subset of E_ϱ.

The coefficients c_n can be calculated by subtracting two equations (9) for successive values of n:

$$s_n(z) - s_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{u_n(z) f(t)\, dt}{u_{n+1}(t)} = c_n\, u_n(z),$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\lambda} \frac{f(t)\, dt}{u_{n+1}(t)}, \tag{10}$$

the integral being taken in the positive sense with respect to E_λ. It follows at once from (4) and (10) that the first member of (7) is not greater than the second member.

However, if the first member of (7) were less than the second member, by (4) the series (6) would converge uniformly and represent $f(z)$ throughout some $E_{\varrho'}$, $\varrho' > \varrho$, which is impossible. Equation (7) is thus established, whence again by (4) the series (6) diverges for every z exterior to E_ϱ. It follows too that the first member of (8) is not less than the second member; the contrary would imply

$$\limsup_{n\to\infty} [\max |c_n u_n(z)|, \; z \quad \text{on} \quad E_\sigma]^{1/n} < \sigma/\varrho ,$$

in contradiction to (4) and (7); thus (8) is established. Equation (8) expresses maximal convergence (WALSH [6], § 4.7) on E_σ.

Again we emphasize the power of inequality (4), which is evident at almost every step.

The Taylor development is the special case $\nu = 1$ of (6). Moreover, if the m_j are all rational, some power (say N) of $U(z)$ is a polynomial $P(z)$, necessarily of degree N, and $s_{kN-1}(z)$ can be written in the form

$$p_1(z)\, P(z) + p_2(z)\, P^2(z) + \cdots + p_{k-1}(z)\, P^{k-1}(z); \tag{11}$$

here the coefficients $p_j(z)$ are polynomials in z of degree less than N, and the series of which (11) is the partial sum is the classical Jacobi series. Even for this case, that the m_j are rational, the complete series (6) has interesting special properties.

II

An alternative interpretation of this proof of Theorem 1 is that uniformly for t on Γ_λ and z on Γ_σ $(\sigma < \lambda)$ we have an expansion

$$\frac{1}{t-z} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\, u_n(z), \tag{12}$$

from which (6) follows by Cauchy's integral formula. It is a well recognized fact that whenever such a uniform expansion as (12) exists, the roles of t and z may be reversed, to yield the expansion exterior to Γ_λ of a function $F(t)$ analytic on and exterior to Γ_σ as a series of the form

$$\sum_{0}^{\infty} d_n c_n(t); \tag{13}$$

this fact illustrates *the principle of duality* (WALSH [6], § 8.5).

When (12) is a series of interpolation in z for fixed t, the coefficients $c_n(t)$ may be found by interpolation in the points α_k. To be explicit, the form of (9) suggests that (9) may have been obtained (by Cauchy's integral formula) from the development (cf. WALSH [6], § 3.1).

$$\frac{1}{t-z} \equiv s_0(z) + [s_1(z) - s_0(z)] + [s_2(z) - s_1(z)] + \cdots, \tag{14}$$

$$\frac{1}{t-z} \equiv s_n(z) + \frac{u_{n+1}(z)}{u_{n+1}(t)\,(t-z)},$$

$$c_n(t)\, u_n(z) \equiv s_n(z) - s_{n-1}(z) \equiv u_n(z)/u_{n+1}(t),$$

$$c_n(t) \equiv 1/u_{n+1}(t); \tag{15}$$

the identity of (14) including (15) with (12) and the validity of (12) uniformly for t on Γ_λ and z on $\Gamma_\sigma (\sigma < \lambda)$ can be proved by inspection. It is interesting to notice, in accord with the principle of duality, that we have first the expansion of $1/(t-z)$ for fixed t in polynomials in z and second the expansion for fixed z in rational functions of t with their poles in the points α_j; moreover, a series of interpolation (14) of rational functions leads to a series of interpolation (6) of rational functions. The role of the points α_j is first as zeros in z of the terms of the series and as points of interpolation, then as poles in t of the terms of the series; the role of the point at infinity is first as only pole of the terms of the series in z, then as only zero of the terms of the series and only point of interpolation in t; the series (12) is a series of interpolation whether regarded with variable z or variable t. These facts are of course in accord with the geometric series ($|t| > |z|$) as special case:

$$\frac{1}{t-z} \equiv \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \cdots.$$

The development (12) can be used to expand an arbitrary function of t:

Theorem 2. *With the notation of Theorem 1, let the function $F(t)$ be analytic throughout the set $E_\sigma^\infty : |U(z)| > \sigma$ (generic notation, $\sigma = 0$ not excluded here), but not analytic throughout any $E_{\sigma'}^\infty$, $\sigma' < \sigma$. Then throughout E_σ^∞ the function $F(t)$*

can be expanded in a series of interpolation

$$(16) \qquad F(t) = \sum_0^\infty d_n/u_n(t)$$

which converges uniformly on each compact set in E_σ^∞. The coefficients d_n satisfy the relation

$$(17) \qquad \limsup_{n\to\infty} |d_n|^{1/n} = \sigma ;$$

on every set $E_{\sigma'}^\infty$, $\sigma' > \sigma$, we have

$$(18) \qquad \limsup_{n\to\infty} [\max |F(t) - S_n(t)| \, , \, t \quad on \quad E_{\sigma'}^\infty]^{1/n} = \sigma/\sigma' ,$$

$$S_n(t) = \sum_0^n d_k/u_k(t) .$$

Of course the coefficients d_k as well as the coefficient $u_n(z)$ of $c_n(t) = 1/u_{n+1}(t)$ in (12) may be found by interpolation in the point $t = \infty$. Cauchy's integral formula for $F(t)$ in $E_{\sigma'}^\infty$ is not valid in the usual form unless we have $F(\infty) = 0$, so a first term appears in (16) which has no analogue in (12). The detailed proof of Theorem 2 is left to the reader. However, we note the equation (integral counterclockwise)

$$F(t) - F(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\sigma'}} \left[\sum_0^\infty u_n(z)/u_{n+1}(t) \right] F(z)\, dz$$

for t in $E_{\sigma'}^\infty$, $\sigma' > \sigma$, whence

$$(19) \qquad d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\sigma'}} u_{n-1}(z) F(z)\, dz ;$$

equation (19) is valid even for $n = 0$, with $u_{-1}(z) = 1/(z - \alpha_1)$.

Any expansion of the form (16), valid uniformly in the neighborhood of $t = \infty$, must be unique, since the coefficients d_n are uniquely determined by interpolation at $t = \infty$. Series (16) diverges for t on E_σ, by (17) and (4).

III

The polynomials of Theorem 1 are useful in the expansion of an arbitrary function analytic in E_σ; by use of a conformal map and the method of Faber those polynomials can be modified so as to apply to an expansion on E of an arbitrary function analytic on E, where E now consists of several mutually disjoint continua:

Theorem 3. *Let E be the union of mutually disjoint continua $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ (none of which is a single point) in the z-plane, the complement of each C_k being an infinite region, and let K be the complement of E. Let Γ_σ denote generically the locus $G(z) = \log \sigma (\sigma > 1)$ in K, where $G(z)$ is Green's function for K with pole at infinity, let E_σ^∞ denote the set $G(z) > \log \sigma$ in K, and let E_σ denote the complement of $(E_\sigma^\infty + \Gamma_\sigma)$. Let the functions $w = \Phi(z)$, $z = \psi(w)$ map K onto a*

region K_1 of the w-plane, where K_1 is defined by a relation

$$(20) \qquad |U(w)| > \mu\,, \quad U(w) = \prod_1^{\nu} (w - a_k)^{m_k}, \quad m_k > 0\,, \quad \Sigma\, m_k = 1\,,$$

and where $\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(\infty) = 1$. Let Λ_σ denote generically the point set $|U(w)| = \sigma\,\mu (\sigma \geqq 1)$, let D_σ^∞ denote the set $|U(w)| > \sigma\,\mu$ in K_1, and let D_σ denote the set $|U(w)| < \sigma\,\mu$. Let the points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ be chosen in the w-plane to satisfy the conditions of Lemma 2.

For z on Γ_σ and τ in D_σ^∞ there exists an expansion

$$(21) \qquad \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} \equiv \frac{b_0(z)}{\tau - \alpha_1} + \frac{b_1(z)}{(\tau - \alpha_1)(\tau - \alpha_2)} + \cdots$$

of type (16); here the $b_k(z) \equiv z^k + \cdots$ are polynomials in z of respective degrees k. An arbitrary function $f(z)$ analytic on E can be expanded in a series

$$(22) \qquad f(z) \equiv \sum_0^\infty a_k b_k(z)$$

valid throughout $E_\varrho (\varrho = \infty$ not excluded here), the largest E_σ throughout which $f(z)$ is single-valued and analytic. The coefficients a_k can be expressed $(1 < \lambda < \varrho)$

$$(23) \qquad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_\lambda} \frac{f[\psi(\tau)]\, d\tau}{u_{n+1}(\tau)}\,.$$

Moreover, with $s_n(z) = \sum_0^n a_k b_k(z)$ we have

$$(24) \qquad \limsup_{n\to\infty} [\max |f(z) - s_n(z)|\,,\ z \quad on \quad E]^{1/n} = 1/\varrho\,;$$

that is to say, the sequence $s_n(z)$ converges to $f(z)$ on E maximally, or with the greatest geometric degree of convergence.

The existence of the map $z = \psi(w)$ is known (WALSH [8], Theorem 3). Green's function $G_1(w)$ for K_1 with pole at infinity is $\log|U(w)| - \log\mu$, also the transform under $w = \Phi(z)$ of $G(z)$. The capacity (transfinite diameter) $\delta(\Lambda_1)$ of Λ_1 is defined by

$$\lim_{w\to\infty} [G_1(w) - \log|w|] = -\log\delta(\Lambda_1) = -\log\mu\,,$$

and $\delta(\Lambda_1)$ equals the capacity $\delta(E)$ of E. The locus Λ_σ is the transform of $\Gamma_\sigma, \sigma > 1$. The expansion (21) is precisely the expansion whose validity is established in Theorem 2, an expansion where the $b_k(z)$ are computed formally from (21) by interpolation in $w = \infty$. It will be noted that the first member of (21) vanishes for $\tau = \infty$, so the first term in the second member of (16) is omitted in (21).

We compute $b_0(z)$ by setting

$$\psi(\tau) \equiv \tau + c_0 + \frac{c_1}{\tau} + \frac{c_2}{\tau^2} + \cdots,$$

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} - \frac{b_0(z)}{\tau - \alpha_1} \equiv \frac{(\tau - \alpha_1)(1 - c_1/\tau^2 - 2c_2/\tau^3 - \cdots) - b_0(z)(\tau + c_0 + \cdots - z)}{(\tau + c_0 + c_1/\tau + \cdots - z)(\tau - \alpha_1)},$$

a function which vanishes to at least the second order at $\tau = \infty$ when and

only when $b_0(z) \equiv 1$. Let us assume that $b_{n-1}(z)$ has been computed as a polynomial $b_{n-1}(z) \equiv z^{n-1} + \cdots$; we indicate the computation of $b_n(z)$. The first member of (21) minus the sum of the first n terms in the second member of (21) reduced to a common denominator has a numerator which we denote by $N_{n-1}(\tau, z)$, and $b_{n-1}(z)$ has been chosen (as we assume for the induction proof) so that the coefficients of $\tau, \tau^2, \ldots, \tau^n$ in $N_{n-1}(\tau, z)$ all vanish, so as to yield a rational function (sum of n terms of the series) whose difference from the first member of (21) has a zero at $\tau = \infty$ of order at least $n + 1$. To compute $b_n(z)$ we set similarly

$$N_n(\tau, z) \equiv N_{n-1}(\tau, z)(\tau - \alpha_{n+1}) - [\psi(\tau) - z]\, b_n(z)\,, \tag{25}$$

and choose $b_n(z)$ so that the total coefficient of τ vanishes. The function $N_n(\tau, z)$ is of degree n in z,

$$\begin{aligned} N_n(\tau, z) \equiv N_{n-2}(\tau, z)(\tau - \alpha_n)(\tau - \alpha_{n+1}) - [\psi(\tau) - z]\, b_{n-1}(z)(\tau - \alpha_{n+1}) \\ - [\psi(\tau) - z]\, b_n(z)\,, \end{aligned}$$

and we must choose $\cdots - b_{n-1}(z)\,[c_0 - \alpha_{n+1} - z] - b_n(z) = 0$, whence $b_n(z) \equiv z^n + \cdots$, a polynomial in z of degree n.

The asymptotic properties of the $b_n(z)$ are of importance. We prove

Corollary 1. *For z on an arbitrary Γ_σ, $\sigma > 1$, the polynomials $b_n(z)$ satisfy the inequality*

$$|b_n(z)| \leq A_1 \sigma^n \mu^n\,, \tag{26}$$

where A_1 is a constant depending on σ.

With z on Γ_σ, we set $z = \psi(t)$, so t lies on Λ_σ, and we write for t sufficiently near τ

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, t) &\equiv \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} - \frac{1}{\tau - t} \equiv -\frac{[\psi(\tau) - \psi(t)] - \psi'(\tau)(\tau - t)}{[\psi(\tau) - \psi(t)]\,(\tau - t)} \\ &\equiv -\frac{\psi''(\tau)/2! + \psi'''(\tau)(t - \tau)/3! + \cdots}{\psi'(\tau) + \psi''(\tau)(t - \tau)/2! + \cdots}\,; \end{aligned}$$

the function $\Psi(\tau, t)$ is analytic without exception for t on Λ_σ and τ in K_1, and is uniformly bounded for t on Λ_σ and τ on any closed bounded or unbounded set in K_1. For t on Λ_σ and τ in D_σ^∞ we write (12) in the form

$$\frac{1}{\tau - t} \equiv \sum_0^\infty \frac{u_n(t)}{u_{n+1}(\tau)}\,, \tag{27}$$

and by (4) we have

$$|u_n(t)| \leq A\, \sigma^n \mu^n\,, \quad |u_n(\tau)| > A_1 \sigma^n \mu^n\,. \tag{28}$$

By Theorem 2, the function $\Psi(\tau, t)$ can be expanded in the form

$$\Psi(\tau, t) \equiv \sum_0^\infty \frac{e_n(t)}{u_{n+1}(\tau)}\,, \tag{29}$$

valid for τ throughout D_σ^∞ and t on Λ_σ. The coefficients $e_n(t)$ can be calculated by integration over Λ_{σ_0}, $1 < \sigma_0 < \sigma$, as in (19), whence by (4)

$$|e_n(t)| \leq A_2 \sigma_0^n\, \mu^n\,.$$

From (27) and (29) follows (21) with $b_n(z) \equiv u_n(t) + e_n(t)$, which yields both (26) and the relation

$$b_n(z) \equiv u_n(t) + O(\sigma_0^n \mu^n). \tag{30}$$

Series (21) converges uniformly for z on Γ_σ and τ on any closed set in D_σ^∞.

The proof of Theorem 3 can now be completed rapidly. Let $f(z)$ be given; for Z on Γ_λ, $1 < \sigma < \lambda < \varrho$, and for z on Γ_σ we have

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} \frac{f(Z)\,dZ}{Z-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\lambda} \frac{f[\psi(\tau)]\,\psi'(\tau)\,d\tau}{\psi(\tau)-z}. \tag{31}$$

By (21), there follows (22) uniformly for z on E_σ, where σ $(< \varrho)$ is arbitrary, and where (23) holds. From (23) we have

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} \leqq 1/\lambda\,\mu, \quad 1 < \lambda < \varrho,$$

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} \leqq 1/\varrho\,\mu.$$

By (26) the strong inequality here would yield in the second member of (22) a series converging uniformly to $f(z)$ throughout some $E_{\varrho'}$, $\varrho' > \varrho$, which contradicts the definition of ϱ. Thus we have

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} = 1/\varrho\,\mu. \tag{32}$$

By (21), (31), and (26) it follows that the first member of (24) is not greater than the second member. The strong inequality would contradict (30) and (32), so Theorem 3 is established.

The polynomials $b_k(z)$ are clearly linearly independent; a linear combination $\sum_0^n B_k b_k(z)$ with $B_n \neq 0$ contains the term $B_n z^n$. More generally, a series of the form $\sum_0^\infty B_k b_k(z)$ which represents the function zero uniformly on some Γ_λ, $\lambda > 1$, must satisfy $B_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$; in other words, *an expansion of form* (22) *valid uniformly on some* Γ_λ *must be unique.* This fact follows at once from the equation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\lambda} \frac{b_j[\psi(\tau)]\,d\tau}{u_{k+1}(\tau)} = \delta_{jk} \tag{33}$$

(Kronecker δ), which is suggested by the expansion (22) of the function $f(z) \equiv b_j(z)$ as in (31). Equation (33) follows immediately from $b_j[\psi(\tau)] \equiv \equiv \tau^j + \cdots$, $u_{k+1}(\tau) \equiv \tau^{k+1} + \cdots$ in the case $k \geqq j$, since the integral may be taken over any Λ_λ. If (33) is false for some j and k, $k < j$, then $b_j(z)$ has (Theorem 3) a non-trivial expression as a linear combination of $b_0(z), b_1(z), \ldots, b_j(z)$, a contradiction which establishes (33).

We add a further remark concerning the $b_k(z)$. If we identify (21) with (16), formula (19) becomes

$$b_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_\lambda} \frac{u_n(\tau)\,\psi'(\tau)\,d\tau}{\psi(\tau)-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\lambda} \frac{u_n[\Phi(Z)]\,dZ}{Z-z}$$

for z interior to Γ_λ.

We have shown that (32) is a consequence of our assumptions concerning $f(z)$. Conversely, if the a_k are chosen arbitrarily with (32) satisfied, it follows from (26) that the series in (22) converges uniformly on any closed set on E_ϱ, so $f(z)$ defined by (22) is analytic within E_ϱ; but by (32) in Theorem 3 the function $f(z)$ (whose expansion interior to E_ϱ is unique) cannot be single valued and analytic throughout any $E_{\varrho'}$, $\varrho' > \varrho$. Whenever (32) is valid, the series (22) diverges exterior to E_ϱ, as follows from (30). It also follows from (30) that if σ is given, for n sufficiently large the polynomial $b_n(z)$ has no zeros exterior to E_σ.

The situation of Theorem 3 reduces to that of Theorem 1 if E is defined by $|U(z)| \leqq \mu$, where $U(z)$ is given by (5).

It may be noted that the polynomials $b_n(z)$ are the same for E as for E_σ; indeed, the function $z = \psi(w)$, $w = \Phi(z)$ maps E_σ^∞ onto D_σ^∞ for every $\sigma (> 1)$. It is a consequence of this fact that if E is bounded by analytic Jordan curves, equation (30) holds even for $\sigma = 1$ and for suitable $\sigma < 1$, $\sigma_0 < \sigma$.

IV

The polynomials $b_n(z)$ defined in Theorem 3 are unique, once the series (6) has been chosen; but in (6) the important relation is (4), which does not determine the α_k uniquely in terms of the a_j, so the $b_n(z)$ (satisfying the definition (21)) are in that sense not unique. However, the $b_n(z)$ can properly be considered a generalization of Faber's polynomials, for the following reasons: (i) they are defined by an interpolation series expansion of the first member of (21), where $z = \psi(w)$ is a schlicht map onto the complement of E so that $\psi(\infty) = \infty$; (ii) the expansion (22) becomes the classical Faber expansion if $\nu = 1$, and becomes the Taylor expansion if E is a circular disc; (iii) if $f(z)$ is analytic on E the expansion (22), like the Faber expansion, converges to $f(z)$ on E with the greatest geometric degree of convergence; (iv) the $b_n(z)$ are unchanged if E is replaced by E_σ; (v) the relation

$$\limsup_{n\to\infty} [\max |b_n(z)|, z \text{ on } E]^{1/n} = \delta(E) = \mu \tag{34}$$

is satisfied.

Equation (34) is a consequence of (26), for by (26) we may write ($\sigma \to 1$)

$$\limsup_{n\to\infty} [\max |b_n(z)|, z \text{ on } E]^{1/n} \leqq \delta(E), \tag{35}$$

since $[\max |b_n(z)|, z \text{ on } E] \leqq [\max |b_n(z)|, z \text{ on } E_\sigma]$; the strong inequality in (35) is known (Walsh [6], § 7.3) to be impossible.

If it is desired to emphasize final results rather than method, it should be noted that if E in Theorem 3 is *specialized so as to be bounded by Jordan curves*, there exists (Walsh [6], § 7.6) a sequence of points $z_1, z_2, \ldots$ on the boundary of E such that $f(z)$ analytic on E can be expanded in the interpolation series

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_1) + a_2(z - z_1)(z - z_2) + \cdots$$

which converges to $f(z)$ on E with the greatest geometric degree of convergence; the case $\nu = 1$ is due to Fejér. But here the fundamental polynomials cannot

be the same for E_σ as for E. These polynomials have interesting properties of invariance under suitable conformal transformation (op. cit., § 9.12) of the complement of E.

FABER (loc. cit.) indicates a close connection between his polynomials and the polynomials $T_n(z) \equiv z^n + \cdots$ of Tchebycheff, namely those for which $[\max |T_n(z)|, z \text{ on } E]$ is least, where n is given. The $b_n(z)$ seem to have a somewhat less close relation to the $T_n(z)$, but it should be remarked that (34) implies

$$\limsup_{n\to\infty} [\max |T_n(z)|\,,\ z \text{ on } E]^{1/n} = \delta(E)\,, \tag{36}$$

since $[\max |T_n(z)|, z \text{ on } E] \leqq [\max |b_n(z)|, z \text{ on } E]$, and since (WALSH [6], § 7.3) the strong inequality in such a relation as (35) is not possible. The analogue of (36) holds for many sets of polynomials defined by extremal properties (FEKETE and WALSH [3, 4]). But close comparison polynomials for the $T_n(z)$ when E consists of several components are rare (compare SEWELL [5], Lemma 2.5.6).

In connection with the relation between Tchebycheff polynomials and a unique interpolation series of polynomials of form

$$a_0 + a_1(z-\alpha_1) + a_2(z-\alpha_1)(z-\alpha_2) + \cdots, \tag{37}$$

it is instructive to consider approximation on the sets $E_\sigma : |z^2 - 1| = \sigma\ (>0)$. The Tchebycheff polynomial of degree unity is $T_1(z) \equiv z$ for all E_σ, since that polynomial is known to be unique and therefore its zeros have the symmetry of E_σ. But for $\sigma < 1$ a function analytic on E_σ need not be defined in $z = 0$, so the expansion (37) need not exist if we choose $\alpha_1 = 0$.

FABER (loc. cit.) studies also the derivatives of his polynomials and of the Tchebycheff polynomials. It is interesting to remark the inequality (S. Bernstein)

$$[\max |P_n'(z)|\,,\ z \text{ on } E] \leqq n\,[\max |P_n(z)|\,,\ z \text{ on } E] \tag{38}$$

whenever $P_n(z)$ is a polynomial of degree n and E is the union of the closed interiors of several mutually exterior analytic Jordan curves. Under those conditions, the inequality

$$\limsup_{n\to\infty} [\max |P_n(z)|\,,\ z \text{ on } E]^{1/n} = \delta(E) \tag{39}$$

implies

$$\limsup_{n\to\infty} [\max |P_n'(z)|\,,\ z \text{ on } E]^{1/n} = \delta(E)\,. \tag{40}$$

If more generally E consists of a finite number of components (none a single point), (38) remains true (SEWELL [5], § 2.1) if the factor n is replaced by An^2, so (39) still implies (40).

References

[1] FABER, G.: Über polynomische Entwickelungen. Math. Ann. 57, 389—408 (1903). — [2] FABER, G.: Über Tschebyscheffsche Polynome. J. reine angew. Math. 150, 79—106 (1920). — [3] FEKETE, M., and J. L. WALSH: On the asymptotic behavior of polynomials

with extremal properties, and of their zeros. J. d'Analyse Math. 4, 49—87 (1954). — [4] FEKETE, M., and J. L. WALSH: Asymptotic behavior of restricted extremal polynomials, and of their zeros. Pacific J. Math. 7, 1037—1064 (1957). — [5] SEWELL, W. E.: Degree of approximation by polynomials in the complex domain. Ann. of Math. Stud. No. 9. Princeton 1942. — [6] WALSH, J. L.: Interpolation and Approximation, vol. 20 of the Colloquium Series of the Amer. Math. Soc. 1935. — [7] WALSH, J. L.: Sur l'approximation par fonctions rationnelles et par fonctions holomorphes bornées. Ann. di Mat. (4) 39, 267—277 (1955). — [8] WALSH, J. L.: On the conformal mapping of multiply connected regions. Trans. Amer. Math. Soc. 82, 128—146 (1956).

(Eingegangen am 29. Januar 1958)

PINL, M.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 34—40 (1958)

Minimalflächen fester Gaußscher Krümmung

Von

M. PINL in Köln

HEINRICH BEHNKE zum 60. Geburtstag

Wir betrachten im folgenden Minimalflächen des komplexen n-dimensionalen euklidischen oder Riemannschen Raumes R_n bzw. V_n. Dabei zählen wir komplexe Dimensionen und setzen $n \geqq 3$ voraus. Von den zahlreichen bekannten Definitionen für Minimalflächen bevorzugen wir diejenige, welche das Verschwinden des mittleren Krümmungsvektors $\mathfrak{h}$ zum Ausdruck bringt. Die quadratische Metrik der Einbettungsräume sei nicht ausgeartet, d. h. die Matrix der metrischen Fundamentalkomponenten dieser Räume sei vom Höchstrang n und im Falle reeller Flächen und reeller Einbettungsräume positiv definit. Dann erhalten wir auf der Fläche die induzierte binäre quadratische Metrik $g_{\alpha\beta}(u_1, u_2) = g_{\beta\alpha}(u_1, u_2)$, deren Diskriminante $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ nicht überall verschwindet. Wir dürfen also den kontravarianten Tensor $g^{\alpha\beta}(u_1 u_2)$ und die Christoffelklammern $\left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\,\beta\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\mu\\ \beta\,\alpha\end{matrix}\right\}$ bilden. Dann ergibt sich für den Krümmungsaffinor $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ und den mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ der Fläche im Falle euklidischer Einbettung[1])

$$(1)\qquad \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{\begin{matrix}\mu\\ \alpha\,\beta\end{matrix}\right\}\mathfrak{x}_\mu\,,\qquad \mathfrak{h} = g^{\alpha\beta}\mathfrak{h}_{\alpha\beta}\,,\qquad \alpha, \beta, \mu = 1,2\,.$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{x}_\mu$ und $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}$ die ersten bzw. zweiten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ der Fläche bei euklidischer Einbettung in R_n; für im gleichen Term oben und unten auftretende gleiche Indizes gilt die Summationsvorschrift des Tensorkalküls. Da $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ nach Voraussetzung nicht identisch verschwindet, können wir die Fläche auf isotrope Parameter u_1, u_2 beziehen. In solchen Parametern gilt

$$(2)\qquad g_{11} = g_{22} = 0\,,\quad g^{11} = g^{22} = 0\,,\quad g_{12}g^{12} = 1\,,\quad \left\{\begin{matrix}1\\ 12\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}2\\ 12\end{matrix}\right\} = 0$$

und somit

$$(3)\qquad \mathfrak{h} = g^{\alpha\beta}\,\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 2\,g^{12}\,\mathfrak{x}_{12} = \frac{2}{g_{12}}\,\mathfrak{x}_{12}\,.$$

Bei euklidischer Einbettung verschwindet somit auf Minimalflächen in isotropen Parametern mit $\mathfrak{h}$ stets auch die gemischte Ableitung $\mathfrak{x}_{12}$ des Ortsvektors der Fläche und umgekehrt. Darin liegt eine Verallgemeinerung des für $n = 3$ von S. LIE gefundenen Satzes[2]): *Die Minimalflächen des euklidischen*

[1]) Vgl. z. B. SCHOUTEN-STRUIK: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, Bd. II, 86—87 ff. Groningen 1938.

[2]) Vgl. S. LIE: Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. Math. Ann. 14, 3, 331—416 (1879).

R_n sind Schiebflächen isotroper Kurven ($n \geq 3$). Die Verallgemeinerung auf Fälle Riemannscher (nichteuklidischer) Einbettungen verdankt man E. BOMPIANI[3]): *Die Minimalflächen des Riemannschen V_n sind Schiebflächen isotroper Kurven im Sinne des Parallelismus von* T. LEVI-CIVITA. Die Gaußsche Krümmung K der eingebetteten Flächen definieren wir stets im Sinne des Gaußschen "*theorema egregium*"[4]). Dann ergibt sich im Falle isotroper Parameter $u_1 u_2$ aus der binären Metrik $ds^2 = 2\, g_{12} d\, u_1 d\, u_2$ die Gaußsche Krümmung in der Gestalt

$$K = -\frac{1}{g_{12}} \frac{\partial^2 \lg g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2}. \tag{4}$$

§ 1. Feste Gaußsche Krümmung und euklidische Einbettung

Auf den Minimalflächen $\mathfrak{x}(u_1 u_2)$ des euklidischen R_n gilt nach unseren Voraussetzungen

$$\mathfrak{h} \equiv 0 \ \{u_1, u_2\}, \text{ d. h. } \mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2); \quad g_{11} \equiv \mathfrak{y}'^2 \equiv 0 \ \{u_1\};$$
$$g_{12} \equiv \mathfrak{y}' \dot{\mathfrak{z}} \ \{u_1, u_2\}; \ g_{22} \equiv \dot{\mathfrak{z}}^2 \equiv 0 \ \{u_2\}.$$

Dabei bedeuten Striche Ableitungen nach u_1, Punkte solche nach u_2; $\mathfrak{y}(u_1)$ und $\mathfrak{z}(u_2)$ sind die Ortsvektoren der isotropen Schiebkurven auf der Minimalfläche.

Setzen wir nunmehr die Gaußsche Krümmung der Fläche konstant voraus, so besteht nach (4) für die Fundamentalkomponente $g_{12}(u_1, u_2)$ in isotropen Parametern die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{g_{12}} \frac{\partial^2 \lg g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} = c.$$

Sie ist vom Liouvilleschen Typus, wenn wir die (komplexe) Konstante $c \neq 0$ voraussetzen, und läßt sich mit Hilfe zweier willkürlicher analytischer Funktionen $U(u_1)$ und $V(u_2)$ durch

$$g_{12} = \frac{2\, U'(u_1)\, \dot{V}(u_2)}{c\,[U(u_1) + V(u_2)]^2} \tag{5}$$

allgemein integrieren[5]). Da die Minimalflächen des R_n mit identisch verschwindender Gaußscher Krümmung bereits allgemein untersucht worden sind[6]), halten wir im folgenden an der Annahme $c \neq 0$ fest und benutzen das Integrationsresultat (5). Da g_{12} auf der Fläche nicht identisch verschwindet, können die „alten" Parameter u_1, u_2 durch „neue", wiederum isotrope Parameter $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ ersetzt werden, die durch die „Skalentransformation"

$$\bar{u}_1 = U(u_1), \ \bar{u}_2 = V(u_2), \ \frac{\partial(\bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\partial(u_1, u_2)} = U' \cdot \dot{V} \neq 0 \tag{6}$$

[3]) Vgl. E. BOMPIANI: Surfaces de translation et surfaces minima dans les espaces courbes. C. Acad. Sci. R. (Paris) **169**, 840—843 (1919).

[4]) Vgl. W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, § 45. Berlin 1930.

[5]) Vgl. W. BLASCHKE: Vorlesungen über Differentialgeometrie II, § 86. Berlin 1923.

[6]) Vgl. M. PINL: Über die komplexen Minimalflächen mit der Gaußschen Krümmung Null. Arch. d. Math. **2**, 4, 283—288 (1949/50).

eingeführt werden. Damit bekommen wir die Tensortransformation

$$\bar g_{11} = g_{11} = 0\,,\ \bar g_{12} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u_1}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar u_2} = \frac{2}{c[U(u_1)+V(u_2)]^2} = \frac{2}{c}(\bar u_1 + \bar u_2)^{-2},\ \bar g_{22} = g_{22} = 0. \tag{7}$$

Die Metrik einer Fläche des euklidischen R_n mit der konstanten (komplexen) Gaußschen Krümmung $-c \neq 0$ kann also unter Umständen auf die Gestalt (7) transformiert werden. Wir behaupten jetzt: das Ergebnis (7) ist unvereinbar mit den für Minimalflächen, die auf isotrope Parameter $\bar u_1, \bar u_2$ bezogen sind, modifizierten Identitäten

$$\bar g_{11} \equiv \mathfrak{y}'(\bar u_1)^2 \equiv 0 \quad \{\bar u_1\}\,,\ \bar g_{12} \equiv \mathfrak{y}'\,\dot{\mathfrak{z}} \quad \{\bar u_1, \bar u_2\}\,,\ \bar g_{22} \equiv \dot{\mathfrak{z}}^2(\bar u_2) \equiv 0 \quad \{\bar u_2\}\,. \tag{8}$$

Zum Nachweis leiten wir aus den mittleren der Gleichungen (7) und (8) einen Widerspruch ab, wobei wir den analytischen Charakter der Funktionen

$$\mathfrak{y}'_\nu(\bar u_1) = f_\nu(\bar u_1)\,,\quad \dot{\mathfrak{z}}_\nu(\bar u_2) = g_\nu(\bar u_2)\,,\quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

benutzen, der durch den Umstand garantiert ist, daß die $f_\nu(\bar u_1)$ und $g_\nu(\bar u_2)$ die Komponenten der isotropen Tangentenvektoren $\mathfrak{y}'(\bar u_1)$ und $\dot{\mathfrak{z}}(\bar u_2)$ bilden.[7] Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise lassen wir im folgenden die Querstriche wieder weg. Dann handelt es sich um die Diskussion der Identität:

$$\Phi(u_1, u_2) \equiv f_1(u_1)\, g_1(u_2) + \dots + f_n(u_1)\, g_n(u_2) \equiv \frac{2}{c(u_1+u_2)^2} \quad \{u_1, u_2\}\,. \tag{9}$$

Versucht man einen Widerspruch aus dem verschiedenen Verhalten der Polsingularitäten der linken und rechten Seiten in (9) zu gewinnen, so müßte gezeigt werden, daß zum Definitionsbereich (Meromorphiebereich) von $\Phi(u_1, u_2)$ wenigstens ein Punkt $(u_1^{(0)}, u_2^{(0)})$ der Ebene $u_1 + u_2 = 0$ gehört. Diese Schwierigkeit läßt sich nach einem Vorschlag von W. THIMM vermeiden, indem man durch n-malige Differentiation nach einer der beiden Veränderlichen, etwa nach u_1, aus der Identität

$$(u_1 + u_2)^2 \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(u_1)\, g_\nu(u_2) \equiv \frac{2}{c} \quad \{u_1, u_2\} \tag{10}$$

ein lineares homogenes Bedingungssystem für die von der anderen Veränderlichen (u_2) abhängenden Komponentenfunktionen ($g_\nu(u_2)$) gewinnt, nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{n} [(u_1 + u_2)\, f_\nu^{(\lambda)}(u_1) + (\lambda+1)\, f_\nu^{(\lambda-1)}(u_1)]\, g_\nu(u_2) \equiv 0 \quad \{u_1, u_2\}\,,\ \lambda = 1, 2, \dots, n. \tag{11}$$

Da die Komponenten g_ν des isotropen Tangentenvektors $\dot{\mathfrak{z}}$ nicht alle verschwinden sollen, gilt notwendig

$$|(u_1 + u_2)\, f_\nu^{(\lambda)}(u_1) + (\lambda+1)\, f_\nu^{(\lambda-1)}(u_1)| \equiv 0 \quad \{u_1, u_2\}\,,\quad \lambda, \nu = 1, 2, \dots, n\,. \tag{12}$$

Die Determinante (12) ist ein Polynom in u_2, in dessen Definitionsbereich die Wahl $u_2 = -u_1$ zulässig ist. Daher verschwindet mit (11) auch die Wronski-

[7] Dieser Umstand trifft für reelle „Pseudominimalflächen", d. h. für Minimalflächen, die in pseudoeuklidischen Räumen (mit indefiniter Maßbestimmung) eingebettet sind, nicht mehr zu. Vgl. F. SH. WOODS, Diss. Göttingen 1895.

sche Determinante

$$(n+1)!\begin{vmatrix} f_1, & f_2 & ,\ldots, f_n \\ f_1', & f_2' & ,\ldots, f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}, & f_2^{(n-1)} & ,\ldots, f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = (n+1)!\ W(f_1,\ldots,f_n) = 0\ \{u_1\}$$

identisch im gemeinsamen Definitionsbereich der Funktionen $f_1(u_1), \ldots, f_n(u_1)$. Da die Funktionen $f_1(u_1), \ldots, f_n(u_1)$ nach Voraussetzung analytische Funktionen sind, folgt[8])

$$f_n(u_1) = c_1 f_1(u_1) + \cdots + c_{n-1} f_{n-1}(u_1) \qquad \{u_1\}$$

mit konstanten Koeffizienten $c_1, \ldots, c_{n-1}$. Damit reduziert sich die Identität (10) auf

$$(u_1+u_2)^2 \sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu(u_1)\, g_\nu^*(u_2) = \frac{2}{c} \quad \{u_1, u_2\}\,;\; g_\nu^*(u_2) = g_\nu(u_2) + c_\nu\, g_n(u_2) \quad \{u_2\}$$

und gestattet eine Wiederholung des eben geschilderten Verfahrens. Bei jedem Schritt reduziert sich die Anzahl der in die jeweilige Identität noch eingehenden Funktionen um je eine solche, und im Endergebnis verwandelt sich der isotrope Tangentenvektor $\mathfrak{y}'$ in den Nullvektor, und die metrische Fundamentalform $ds^2 = 2\, g_{12}\, du_1\, du_2$ der Fläche verschwindet identisch entgegen der Voraussetzung. Damit ist gezeigt:

(I) Unter den Minimalflächen eines euklidischen n-dimensionalen Raumes gibt es weder reelle noch komplexe Flächen mit fester nichtverschwindender Gaußscher Krümmung.

§ 2. Feste Gaußsche Krümmung und nichteuklidische Einbettung

Nach einem Satz von Kommerell und Struik[9]) kann unter hinreichenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen jede Fläche als Minimalfläche angesehen werden, wenn man sie in einem geeigneten Riemannschen Raum einbettet. Eine solche Einbettung sei im folgenden eine *extremale* oder auch eine *Minimaleinbettung* genannt. Ein Beispiel einer solchen bietet die bekannte Modellfläche der euklidischen Ebene

$$x_1 = \cos u\,,\ x_2 = \sin u\,,\ x_3 = \cos v\,,\ x_4 = \sin v$$

im euklidischen vierdimensionalen Raum. Sie ist in diesem keine Minimalfläche, wohl aber eine solche im dreidimensionalen sphärischen Raum

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2\,.$$

Sie ist außerdem geschlossen und hat die Gaußsche Krümmung Null[10]).

---

[8]) Vgl. z. B. Haupt-Aumann-Pauc: Differential- und Integralrechnung II, 1.5.2, S. 27, 2. Aufl., Berlin 1950; die Konstanten $c_1, \ldots, c_{n-1}$ können auch alle verschwinden, wenn $f_n(u_1) \equiv \{u_1\}$; die Reduktion wird durch allfällig auftretende lineare Abhängigkeiten zwischen den Funktionen $g_\nu(u_2)$ beschleunigt; setzt man den Rang r_1 einer der beiden Matrizen $\|\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \ldots, \mathfrak{y}^{(n)}\|$ und $\|\dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}, \ldots, \mathfrak{z}^{(n)}\|$ von Null verschieden voraus, so folgt für den Rang r_2 der anderen Matrix nach dem geschilderten Verfahren notwendig $r_2 = 0$.

[9]) Vgl. Fußnote 1, S. 94.

[10]) Vgl. M. Pinl: Geschlossene Minimalflächen I. Compositio math. 12, 2, 178—184 (1954).

Im folgenden gewinnen wir ein weiteres Beispiel einer geschlossenen Minimalfläche mit konstanter positiver Krümmung $+1$[11]). Wir betrachten den Koordinatenraum

$$x_1 = u_1,\ x_2 = u_2,\ x_3 = u_3,\ x_4 = 0 \tag{13}$$

des euklidischen vierdimensionalen Raumes der kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und dazu in diesem den Zylinderraum

$$x_1 = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2},\quad x_2 = i\,\frac{v_2 - v_1}{1 + v_1 v_2},\quad x_3 = \frac{v_1 v_2 - 1}{v_1 v_2 + 1},\quad x_4 = v_3\,. \tag{14}$$

Die metrischen Fundamentaltensoren dieser beiden dreidimensionalen Räume (13) und (14) bezeichnen wir mit $g_{\alpha\beta}$ und $g^*_{\alpha\beta}$ und erhalten

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1\,,\ g^*_{12} = g^*_{21} = 2\,(1 + v_1 v_2)^{-2},\ g^*_{33} = 1\,,$$

alle anderen Komponenten dieser Tensoren verschwinden. Für die Diskriminanten g und g^* der zugehörigen metrischen Fundamentalformen erhalten wir die Werte

$$g = 1\,,\ g^* = -4(1 + v_1 v_2)^{-4}$$

und für die kontravariante Metrik des Hyperzylinders

$$g^{*11} = 0,\ g^{*12} = {}^1\!/_2(1 + v_1 v_2)^2,\ g^{*13} = 0\,,\ g^{*22} = 0\,,\ g^{*23} = 0\,,\ g^{*33} = 1\,.$$

Der Schnitt der beiden Räume ist die Einheitskugel bezogen auf isotrope Parameter v_1, v_2:

$$x_1 = \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2 + 1},\quad x_2 = i\,\frac{v_2 - v_1}{v_1 v_2 + 1},\quad x_3 = \frac{v_1 v_2 - 1}{v_1 v_2 + 1},\quad x_4 = 0\,. \tag{15}$$

Für die metrischen Komponenten auf der Kugel erhält man:

$$a_{11} = 0\,,\ a_{21} = 2(1 + v_1 v_2)^{-2},\ a_{22} = 0;\ a = -4(1 + v_1 v_2)^{-4};\ a^{11} = 0\,,$$
$$a^{12} = {}^1\!/_2(1 + v_1 v_2)^2,\ a^{22} = 0$$

und für die Christoffelsymbole der Metrik $g_{\alpha\beta}$ und $g^{*\alpha\beta}$

$$\left\{{\alpha \atop \beta\gamma}\right\} = 0\,,\ \left\{{1 \atop 11}\right\}^* = -2\,v_2(1 + v_1 v_2)^{-1},\ \left\{{2 \atop 22}\right\}^* = -2\,v_1(1 + v_1 v_2)^{-1}, \tag{16}$$
$$\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, 2, 3\,.$$

Alle anderen Christoffelsymbole verschwinden. Auch die Werte der nichtverschwindenden Christoffelsymbole der Metrik $a_{\alpha\beta}$ sind durch (16) gegeben.

Wir bezeichnen den Ortsvektor des Zylinderraums (14) mit $\mathfrak{z}(v_1, v_2, v_3)$ und den der Kugel (15) mit $\mathfrak{k}(v_1, v_2)$. Partielle Ableitungen werden mit Indizes bezeichnet. Dann ist [vgl. (1)] der zu $\mathfrak{k}(v_1, v_2)$ gehörige Krümmungsaffinor $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ durch

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{k}_{\alpha\beta} - \left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\}^* \mathfrak{k}_\mu\,,\quad \alpha,\ \beta,\ \mu = 1, 2$$

gegeben und der mittlere Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ durch die Überschiebung[12])

$$\mathfrak{h} = a^{\alpha\beta}\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 2\,a^{12}\left(\mathfrak{k}_{12} - \left\{{\mu \atop 12}\right\}^* \mathfrak{k}_\mu\right) = 2\,a^{12}\mathfrak{k}_{12} = (1 + v_1 v_2)^2\mathfrak{k}_{12}\,. \tag{17}$$

---

[11]) Vgl. M. Pinl: Geschlossene Minimalflächen II. Proc. int. Congress of Math. 1, 491—492 (1954). Amsterdam 1957.

[12]) Vgl. Fußnote 1.

Da x_4 auf der Kugel überall verschwindet, liegt der mittlere Krümmungsvektor im Koordinatenraum $x_4 = 0$. Jetzt berechnen wir den Normalvektor des Zylinderraums (14). Seine Komponenten bestimmen sich bis auf einen nichtverschwindenden Faktor aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{z}_1 \\ \mathfrak{z}_2 \\ \mathfrak{z}_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial v_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial v_1}, & \frac{\partial x_3}{\partial v_1}, & 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial v_2}, & \frac{\partial x_3}{\partial v_2}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \begin{matrix} \mathfrak{z}_1^2 = g_{11}^* = \mathfrak{t}_1^2 = a_{11} = 0, \; \mathfrak{z}_2^2 = g_{22}^* = \mathfrak{t}_2^2 = a_{22} = 0, \\ \mathfrak{z}_3^2 = g_{33}^* = 1. \end{matrix}$$

Der Vektor $\mathfrak{t}_{12}$ hat die Komponenten

$$\mathfrak{t}_{12} = \left\{ \frac{-2(v_1+v_2)}{(v_1 v_2+1)^2}, \frac{2i(v_1+v_2)}{(v_1 v_2+1)^2}, \frac{-2(v_1 v_2-1)}{(v_1 v_2+1)^2}, 0 \right\}. \tag{18}$$

Somit gilt $\mathfrak{t}_{12} \cdot \mathfrak{z}_3 = 0$, aber auch $\mathfrak{t}_{12} \cdot \mathfrak{z}_1 = \mathfrak{t}_{12} \mathfrak{z}_2 = 0$, da $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{t}_2$ isotrope Vektoren sind. Der Vektor $\mathfrak{t}_{12}$ steht somit in jedem Punkte der Kugel senkrecht zum zugehörigen Tangentialraum des Hyperzylinders, und dasselbe gilt wegen der Proportionalität (17) für den (nichtverschwindenden) mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ der Kugel. Daraus folgt nach einem Satz von D. J. Struik[13]):

(II) Die Einbettung der Kugel (15) *im Zylinderraum* (14) *hat extremalen Charakter, die Einheitskugel* (15) *ist im Zylinderraum* (14) *ein Beispiel einer geschlossenen Minimalfläche von der konstanten positiven Gaußschen Krümmung* $+1$.

Nach einem Satz von E. Bompiani[14]) sind die Minimalflächen eines Riemannschen Raumes Schiebflächen isotroper Kurven, wenn die Parallelverschiebung einer Kurve der einen Schar des isotropen Netzes zur Erzeugung der Fläche längs einer solchen der zweiten Schar im Sinne des Parallelismus des Riemannschen Raumes nach T. Levi-Civita durchgeführt wird. Dazu ist in unserem Falle notwendig und hinreichend, daß die Funktionen

$$v_1 = t_1, \; v_2 = t_2, \; v_3 = 0,$$

welche die Kugel (15) in den Zylinderraum (14) einbetten, dem System

$$\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t_1 \partial t_2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix}^* \frac{\partial v^\beta}{\partial t_1} \frac{\partial v^\gamma}{\partial t_2} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \tag{19}$$

genügen. Das ist aber offensichtlich der Fall. Denn es gilt

$$\alpha = 1, \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_1 \partial t_2} = 0, \begin{Bmatrix} 1 \\ 11 \end{Bmatrix}^* \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t_1} \frac{\partial v_1}{\partial t_2} = 0; \; \alpha = 2, \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_1 \partial t_2} = 0,$$

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ 22 \end{Bmatrix}^* \frac{\partial v_2}{\partial t_1} \frac{\partial v_2}{\partial t_2} = 0; \; \alpha = 3, \frac{\partial^2 v_3}{\partial t_1 \partial t_2} = 0, \begin{Bmatrix} 3 \\ \beta\gamma \end{Bmatrix}^* = 0, \; \beta, \gamma = 1, 2, 3.$$

Ein Imprimitivitätssystem[15]) der Kugel im Zylinderraum ist also durch die Kugelerzeugenden $t_1 = \text{const}$ und $t_2 = \text{const}$ gegeben. Diese sind auch im

---

[13]) Vgl. Fußnote 9.

[14]) Vgl. Fußnote 3.

[15]) Vgl. N. Tschebotaröw: Über Flächen, welche Imprimitivitätssysteme in bezug auf eine gegebene kontinuierliche Transformationsgruppe enthalten. Rec. Math. Moscou **34**, 2, 149—206 (1927).

Sinne der Metrik des Zylinderraums isotrope Kurven. Denn der isotrope Komplex des Zylinderraumes ist durch die Integralkurven der Mongeschen Gleichung

$$g^*_{\alpha\beta}\,dv^\alpha dv^\beta = 2\,g^*_{12}\,dv_1 dv_2 + dv_3^2 = 0$$

bestimmt, die für $v_3 = 0$ und konstante Werte v_1 bzw. v_2 (längs der Kugelerzeugenden) erfüllt ist. Demgegenüber ist die Bedingung von E. BOMPIANI im Koordinatenraum $x_4 = 0$ nicht erfüllt. Denn in diesem verschwinden (in euklidischen Parametern) alle Christoffelsymbole, und die Bedingungen (19) müßten entsprechend der Einbettung (15) durch das Verschwinden der gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial v_1 \partial v_2}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ ersetzt werden. Das ist aber nach (18) unmöglich. Damit hat sich ergeben:

(III) Durch Minimaleinbettung in einem geeigneten Zylinderraum verwandelt sich die Kugel in eine Schiebfläche im Sinne des nichteuklidischen Parallelismus des Zylinderraums.

(Eingegangen am 2. Dezember 1957)

TIETZ, H.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 41—45 (1958)

Zur Realisierung Riemannscher Flächen. II

Von
HORST TIETZ in Münster (Westf.)

Herrn Professor BEHNKE zum 9. Oktober 1958 in herzlicher Verehrung

1. In einer früheren Arbeit wurde gezeigt[1]), daß auf einer Riemannschen Fläche R zu jeder kompakten Punktmenge M, die sich aus schlichtartigen Komponenten zusammensetzt, meromorphe Funktionen existieren, die auf M schlicht sind.

Dieses Resultat ist, wie in folgendem gezeigt werden soll, auch richtig, wenn M nicht kompakt ist, sondern sich gegen den idealen Rand der nichtkompakten Riemannschen Fläche R häuft; wesentlich ist aber die Voraussetzung, daß M in kompakte Komponenten zerfällt, die sich nicht im Innern von R häufen.

Wird R beispielsweise durch ein Kurvensystem in lauter schlichtartige relativ kompakte Gebiete G_i $(i = 1, 2, \ldots)$ zerlegt, so gibt es zu beliebigen kompakten Punktmengen $M_i \subset G_i$ auf R meromorphe Funktionen, die auf $M = \bigcup M_i$ schlicht sind. Als konform invariantes Flächenmaß für die Restmenge $R - M$, auf der die Mehrwertigkeiten stattfinden, eignet sich ihr Modul, der beliebig klein vorgeschrieben werden kann.

Die Beweismethode besteht darin, daß geeignete Funktionen f_i, die G_i schlicht abbilden, auf hinreichend großen kompakten Punktmengen $B_i \subset G_i$ simultan approximiert werden durch Funktionen, die auf R meromorph sind; bei geeigneter Approximationsgenauigkeit ist eine solche Funktion dann schlicht auf allen M_i.

2. Zum Beweis der simultanen Approximierbarkeit der f_i auf den B_i ist zunächst der von H. BEHNKE und K. STEIN aufgestellte Satz[2]) über meromorphe Approximation noch zu erweitern; denn in der bestehenden Form gibt er nur die Möglichkeit, lediglich endlich viele der f_i auf den zugehörigen B_i durch meromorphe Funktionen abzuschätzen.

Satz 1. *Auf der nicht kompakten Riemannschen Fläche R seien disjunkte relativ-kompakte Gebiete G_i $(i = 1, 2, \ldots)$ so gelegen, daß jeder kompakte Teil von R nur endlich viele G_i trifft; ferner sei in jedem G_i eine kompakte Punktmenge $\overline{B}_i$ fixiert. Dann gibt es zu beliebigen in G_i holomorphen Funktionen f_i und Zahlen $\varepsilon_i > 0$ eine auf R meromorphe und auf den $\overline{B}_i$ holomorphe Funktion f, für die $|f_i - f| \leq \varepsilon_i$ auf $\overline{B}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, gilt.*

---

[1]) Vgl. [3].

[2]) Vgl. [2], Satz 13 und 14.

Beweis: $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \to R$ sei eine Ausschöpfung von R durch kompakte Punktmengen. Es kann angenommen werden, daß für beliebige i und n entweder G_i zu F_n punktfremd oder in ihm enthalten ist; andernfalls erhielte man durch einfache Abänderung eine solche Ausschöpfung.

Unter dieser Voraussetzung ist $(F_n - F_{n-1}) \cap \bigcup_1^\infty G_i$ (es sei $F_0 = \theta$ gesetzt) Vereinigung von endlichen vielen G_i, die — in neuer Indizierung — $G_1^n, \ldots, G_{k_n}^n$ heißen mögen. Jedes G_i kommt für genau ein n und j als G_j^n vor; entsprechend werden die zugehörigen $f_i, \overline{B}_i, \varepsilon_i$ mit $f_j^n, \overline{B}_j^n, \varepsilon_j^n$ bezeichnet. Ferner seien rekursiv die folgenden positiven Zahlen definiert:

$$\eta_1 = \mathrm{Min}\,(1, \varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_{k_1}^1), \quad \eta_n = \mathrm{Min}\,(\eta_{n-1}, \varepsilon_1^n, \ldots, \varepsilon_{k_n}^n)\,.$$

Da es zu jedem F_n eine umfassende offene Punktmenge F_n^* gibt, die noch zu allen $\overline{B}_j^m$ mit $m > n$ punktfremd ist, kann man nach dem zitierten Satz von H. Behnke und K. Stein für festes n Funktionen φ_j^n $(j = 1, 2 \ldots, k_n)$, die in G_j^n holomorph sind, und eine auf F_{n-1} holomorphe Funktion ψ_{n-1} simultan durch eine auf R meromorphe Funktion g_n so approximieren, daß gilt

$$|\varphi_j^n - g_n| \leq \frac{1}{2}\,\varepsilon_j^n \text{ auf } \overline{B}_j^n,\ j = 1, 2, \ldots, k_n,$$

$$|\psi_{n-1} - g_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\,\eta_{n-1} \text{ auf } F_{n-1} \quad \text{(für } n = 1 \text{ ist diese Aussage leer)};$$

dabei kann g_n so gewählt werden, daß seine Pole in $F_n - F_{n-1} - \bigcup_j \overline{B}_j^n$ liegen.

Die zu approximierenden Funktionen werden nun wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \psi_n &= 0 && \text{für alle } n,\\ \varphi_j^1 &= f_j^1 && j = 1, \ldots, k_1,\\ \varphi_j^n &= f_j^n - (g_1 + g_2 + \cdots + g_{n-1}), && j = 1, \ldots, k_n; \end{aligned}$$

da $g_1, \ldots, g_{n-1}$ in $R - F_{n-1}$ holomorph ist, sind die φ_j^n in den G_j^n holomorph.

Nun wird ein F_{n_0} betrachtet. Für $n > n_0$ ist g_n auf F_{n_0} holomorph und dem Betrage nach nicht größer als $\frac{1}{2^n}\,\eta_n \leq \frac{1}{2^n}$; folglich ist $\sum\limits_{n_0+1}^\infty g_n$ holomorph auf F_{n_0} und daher $f = \sum\limits_1^\infty g_n$ dort meromorph. Da das für beliebiges n_0 gilt und die F_{n_0} eine Ausschöpfung von R bilden, ist f also auf ganz R meromorph und auf allen $\overline{B}_j^n$ holomorph.

Diese Funktion f approximiert die gegebenen Funktionen f^n in der gewünschten Weise simultan; denn es gilt auf $\overline{B}_j^n$ wegen $\overline{B}_j^n \subset F_m$ für $m > n$:

$$|f_j^n - f| = \left|\varphi_j^n - g_n - \sum_{n+1}^\infty g_m\right| \leq |\varphi_j^n - g_n| + \sum_{n+1}^\infty |g_m|$$

$$\leq \frac{1}{2}\,\varepsilon_j^n + \sum_{n+1}^\infty \frac{\eta_m}{2^m} \leq \frac{1}{2}\,\varepsilon_j^n + \frac{\eta_n}{2^n} \leq \varepsilon_j^n\,.$$

Zusatz[3]**):** ***Falls alle Gebiete G_i relativ einfach zusammenhängend***[4]***) sind, kann f sogar als holomorph auf R angenommen werden.***

[3]) Dieses Ergebnis ist enthalten in einem Approximationssatz, den Herr R. Remmert in seiner demnächst erscheinenden Habilitationsschrift bewiesen hat.

[4]) $R - G_i$ besitzt keine kompakte Komponente.

Wählt man nämlich relativ einfach zusammenhängende Gebiete F_n für die Ausschöpfung von R, so ist nach H. BEHNKE und K. STEIN holomorphe Approximation[5]) möglich: alle g_n können als holomorph angenommen werden, folglich auch f.

3. Mit $N(\alpha, h, A)$ werde im folgenden die Häufigkeit bezeichnet, mit welcher der Wert α auf der Punktmenge A von der dort holomorphen Funktion h angenommen wird.

Satz 2[6]): *Die nicht-konstante Funktion f_0 sei auf der Riemannschen Fläche R_0 holomorph. Zu jeder kompakten Punktmenge $M_0 \subset R_0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für jede auf R_0 holomorphe Funktion f aus $|f_0 - f| < \varepsilon$ auf R_0 folgt:*

$$N(\beta, f, M_0) \leq N(\beta, f_0, R_0) \qquad \textit{für jedes } \beta.$$

Beweis: Da M_0 kompakt ist, ist $N(\alpha, f_0, M_0)$ für jedes α endlich, und es gibt ein relativ kompaktes Gebiet B_α mit $M_0 \subset B_\alpha$, auf dessen Rand $f_0 \neq \alpha$ ist. Folglich[7]) gibt es ein $\varepsilon_\alpha > 0$, so daß aus $|f_0 - f| < \varepsilon_\alpha$ auf R_0 folgt:

$$N(\alpha, f, B_\alpha) = N(\alpha, f_0, B_\alpha).$$

Wendet man dies Ergebnis auf eine Funktion f an, für die $|f_0 - f| < \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha$ auf R_0 gilt, so erhält man für jeden Wert β aus $|\beta - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha$:

$$\begin{aligned} N(\beta, f, M_0) &= N(\alpha, f - \beta + \alpha, M_0) \leq N(\alpha, f - \beta + \alpha, B_\alpha) \\ &= N(\alpha, f_0, B_\alpha) = N(\alpha, f_0 - \beta + \alpha, B_\alpha) \\ &= N(\beta, f_0, B_\alpha) \leq N(\beta, f_0, R_0). \end{aligned}$$

Wählt man nun zunächst ein beliebiges $\varepsilon_0 > 0$ und bezeichnet mit W die Vereinigung aller abgeschlossenen Kreisscheiben mit dem Radius ε_0 und Mittelpunkten aus der Wertmenge $f_0(M_0)$, so liegen alle Werte, die eine Funktion f auf M_0 annimmt, in W, wenn $|f_0 - f| < \varepsilon_0$ ist auf R_0. Wegen der Kompaktheit von M_0 ist $f_0(M_0)$ und daher auch W kompakt; folglich genügen endlich viele der Kreisscheiben $|\beta - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha$ mit Mittelpunkten $\alpha \in W$, um W zu überdecken; die endlich vielen Mittelpunkte seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Mit

$$\varepsilon = \operatorname{Min}\left(\varepsilon_0, \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha_k}\right)$$

folgt aus

$$|f_0 - f| < \varepsilon \text{ auf } R_0,$$

daß jeder von f auf M_0 angenommene Wert β in W und folglich in einer dieser Kreisscheiben liegt; daher gilt für jedes solche β nach obigem

$$N(\beta, f, M_0) \leq N(\beta, f_0, R_0),$$

während diese Beziehung trivial ist, falls die linke Seite verschwindet.

---

[5]) Vgl. [2], Satz 6.

[6]) Dieser Satz stimmt im wesentlichen mit den in [3] und [3'] angegebenen Hilfssätzen 2 und 3 überein; der hier gegebene Beweis ist einfacher als der frühere.

[7]) Vgl. etwa [1*], S. 218, Satz 21a.

4. Nun seien auf der nicht-kompakten Riemannschen Fläche R gemäß der Voraussetzung von Satz 1 Gebiete G_i gegeben und dort nicht-konstante holomorphe Funktionen f_i mit disjunkten Wertmengen; in jedem G_i sei ferner eine kompakte Punktmenge M_i beliebig ausgewählt. In jedem G_i gibt es bzgl. G_i relativ-kompakte Gebiete B_i mit $M_i \subset B_i \subset G_i$ und nach Satz 2 (B_i statt R_0, M_i und f_i statt M_0 und f_0) positive Zahlen ε_i, so daß für eine auf R meromorphe und auf den B_i holomorphe Funktion f aus

$$|f_i - f| < \varepsilon_i \text{ auf } B_i \text{ für alle } i$$

auf $M = \bigcup M_i$ folgt:

$$N(\beta, f, M) \leqq N(\beta, f_i, B_i) \leqq N(\beta, f_i, G_i) \text{ für jeden Wert } \beta;$$

eine solche Funktion f kann aber nach Satz 1 gefunden werden.

Satz 3: *Auf der nicht-kompakten Riemannschen Fläche R seien auf den disjunkten Gebieten $G_i (i = 1, 2, \ldots)$, die sich nicht im Innern von R häufen, nicht-konstante holomorphe Funktionen f_i mit disjunkten Wertmengen gegeben. Zu beliebigen kompakten Punktmengen $M_i \subset G_i$ gibt es eine auf R meromorphe Funktion f, für die auf $M = \bigcup M_i$ gilt*

$$N(\beta, f, M) \leqq N(\beta, f_i, G_i) \text{ für jeden Wert } \beta.$$

5. Von diesem Satz seien drei Anwendungen aufgeführt.

Auf R sei eine beliebige Triangulierung gegeben. Die offenen abzählbar vielen Dreiecke G_i werden durch Funktionen f_i etwa auf disjunkte Kreise schlicht abgebildet.

Für diesen Fall ergibt Satz 3 zusammen mit dem Zusatz von Satz 1 den folgenden

Satz 4: *Die Kanten einer Triangulierung der nicht-kompakten Riemannschen Fläche R seien von einer beliebigen offenen Punktmenge S überdeckt. Dann gibt es eine auf R holomorphe Funktion, die auf $R - S$ jeden Wert höchstens einmal annimmt.*

Nun werde R durch eine Folge relativ kompakter Gebiete F_n, deren Ränder aus je endlich vielen disjunkten Jordankurven bestehen, mit $\overline{F}_n \subset F_{n+1}$ ausgeschöpft; es kann — evtl. nach Verfeinerung — angenommen werden, daß $F_{n+1} - \overline{F}_n$ stets in schlichtartige Komponenten G_i zerfällt. Diese mögen durch Funktionen f_i auf disjunkte Kreisbereiche schlicht abgebildet werden. Überdeckt man die abzählbar vielen Randkurven durch beliebig kleine disjunkte Ringgebiete U_j, so ist auf die Restmenge wieder Satz 3 anwendbar. Als Maß für die Kleinheit dieser Ringgebiete U_j bieten sich ihre Moduln μ_j an; definiert man als konformen Flächeninhalt ihrer Vereinigung $U = \bigcup U_j$ den Ausdruck

$$\mu(U) := \sum_j \mu_j\,,$$

so kann man etwa durch $\mu_j < \frac{\varepsilon}{2^j}$ erreichen, daß $\mu(U) < \varepsilon$ wird; es ist dafür noch zu zeigen der folgende

Hilfssatz: *Um eine Jordankurve C gibt es Ringumgebungen mit beliebig kleinem Modul.*

Beweis: Zunächst kann man durch Abbildung einer beliebigen Umgebung von C auf einen Kreisring erreichen, daß C in einer Zahlenkugel liegt; diese

wird durch C in zwei Gebiete zerlegt; zwei Ausschöpfungsfolgen dieser Gebiete durch kompakte Mengen definieren in den Restmengen eine Folge von Ringumgebungen

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots \text{ mit } \bigcap_1^\infty R_n = C.$$

R_n habe den Modul μ_n, wird also etwa durch die Funktion γ_n eineindeutig und konform abgebildet auf den Kreisring K_n mit den Radien 1 und $e^{2\pi\mu_n}$. Da die μ_n monoton abnehmen, gilt $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$. Wäre $\lim \mu_n = \mu > 0$, so wäre $\bigcap_1^\infty K_n = K$ ein Kreisring mit den Radien 1 und $e^{2\pi\mu} > 1$. Die Umkehrabbildungen γ_n^{-1}, beschränkt auf K, bilden eine normale Familie; eine Teilfolge, mit der die obige identifiziert werden möge, konvergiert also in K gegen eine holomorphe Grenzfunktion ϱ. Diese ist nicht konstant, da für alle n Punkte aus $\gamma_n^{-1}(K)$ in beliebiger Nähe von C liegen, also $\gamma_n^{-1}(K)$ nicht von einem n_0 ab in einer beliebig vorgeschriebenen Umgebung eines Punktes liegen kann; $\varrho(K)$ ist also ein Gebiet R. Offenbar ist aber $\gamma_m^{-1}(K) \subset R_m \subset R_n$ für $m \geqq n$ also auch $R = \varrho(K) = \lim \gamma_m^{-1}(K) \subset R_n$, d. h. $R \subset \bigcap_1^\infty R_n = C$, was widersinnig ist. Folglich ist $\lim \mu_n = 0$ und damit der Hilfssatz bewiesen.

Obige Überlegungen ergeben also den

Satz 5: *Die nicht-kompakte Riemannsche Fläche R werde durch das sich im Innern von R nicht häufende System punktfremder Jordankurven C_i in lauter relativ-kompakte schlichtartige Gebiete zerlegt. Zu jeder Überdeckung der C_i durch disjunkte Ringgebiete U_i — die Vereinigung U der U_i darf beliebig kleinen konformen Flächeninhalt haben —, gibt es eine auf R meromorphe Funktion, die auf $R - U$ holomorph und schlicht ist.*

Schließlich sei auf R ein beliebiges System disjunkter und sich im Innern von R nicht häufender Jordankurven C_i gegeben. Bildet man nun disjunkte Ringumgebungen G_i der C_i auf disjunkte Kreisringe durch Funktionen f_i ab und wendet Satz 3 auf $M_i = C_i$ an, so erhält man — evtl. mit dem Zusatz von Satz 1 — den folgenden

Satz 6: *Zu jedem sich nicht im Innern der nicht-kompakten Riemannschen Fläche R häufenden System C aus disjunkten Jordankurven gibt es eine auf R meromorphe und auf C holomorphe Funktion, welche C schlicht abbildet; sind die Kurven speziell so gelegen, daß kein von ihnen berandetes relativ-kompaktes Gebiet eine Kurve des Systems enthält, so gibt es sogar eine auf R holomorphe Funktion dieser Art.*

Literatur

[1*] Behnke, H., u. F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955. — [2] Behnke, H., u. K. Stein: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430—461 (1948). — [3] Tietz, H.: Zur Realisierung Riemannscher Flächen. Math. Ann. **128**, 453—458 (1955). — [3′] Tietz, H.: Berichtigung zu [3]. Math. Ann. **129**, 450 (1955).

(Eingegangen am 12. Februar 1958)

HILLE, E.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 46—57 (1958)

On Roots and Logarithms of Elements of a Complex Banach Algebra*

By

EINAR HILLE in New Haven (Conn., USA)

To HEINRICH BEHNKE on his sixtieth anniversary October 9, 1958

1. Introduction. Let $\mathfrak{B}$ be a complex non-commutative Banach algebra having unit element e. Let $\mathfrak{G}$ be the group of regular (= inversible) elements, $\mathfrak{G}_0$ the principal component of $\mathfrak{G}$ containing e. Further, let $\mathfrak{R}_k (k \geqq 2)$, $\mathfrak{R}_\infty$, and $\mathfrak{L}$ denote the set of elements of $\mathfrak{B}$ having kth roots, roots of all orders, and logarithms respectively.

We say that $a \in \mathfrak{B}$ has a kth root if there exists an $x \in \mathfrak{B}$ such that

$$x^k = a\,, \tag{1.1}$$

and a has a logarithm if there exists a $y \in \mathfrak{B}$ such that

$$\exp(y) = a\,. \tag{1.2}$$

It is well known that

$$[x \mid \|x - e\| < 1] \subset \mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{R}_\infty \cap \mathfrak{L}\,. \tag{1.3}$$

Further $\mathfrak{L}$ is connected via the unit element and

$$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{G}_0\,,\ \mathfrak{L} \subset \mathfrak{R}_\infty\,. \tag{1.4}$$

The first relation says merely that every element of $\mathfrak{L}$ has an inverse and hence is in $\mathfrak{G}_0$ since $\mathfrak{L}$ is connected. The second relation says that every element having a logarithm must have roots of all orders. This inclusion is always proper for there are singular elements having roots of all orders, any idempotent ($\neq e$) being an example. In particular, the zero element is in $\mathfrak{R}_\infty$.

The first inclusion under (1.4) is more doubtful. We have $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}_0$ for commutative B-algebras and also for finite complex matrix algebras. If $\mathfrak{L}$ is a group then $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}_0$. IRVING KAPLANSKY, according to SHIZUO KAKUTANI, has observed that the inclusion is proper for real 2 by 2 matrices. For the case of the algebra $\mathfrak{E}[\mathfrak{H}]$ of linear bounded operators on an infinite dimensional Hilbert space, P. HALMOS, G. LUMER and J. J. SCHÄFFER [3] have exhibited elements of $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0$ which are not in $\mathfrak{R}_2$ and AUREL WINTNER [9] has shown that $\mathfrak{L}$ is not a group and hence that $\mathfrak{L}$ is properly contained in $\mathfrak{G}_0$.

---

* This research was supported by the United States Air Force through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under Contract No. AF 18 (600) — 1127.

Moreover, G. LUMER [8] has recently sharpened this result by showing that in $\mathfrak{E}[\mathfrak{H}]$ the set $\mathfrak{G}_0 \ominus \mathfrak{R}_2$ has interior points and $\mathfrak{R}_2$ is not even dense in $\mathfrak{G}_0$.

Two problems are discussed in the present paper:

(1) Suppose that x_1 and x_2 are two kth roots of a. What relations hold between x_1 and x_2? We ask the same question for logarithms.

(2) If a has a kth root (or logarithm), do elements in some neighborhood of a admit kth roots (or logarithms)?

We restrict ourselves to regular elements a even in the case of roots.

In this investigation the author has had the benefit of long discussions with his colleague Professor SHIZUO KAKUTANI. In particular, Section 5 below represents joint work with KAKUTANI.

2. Notation and auxiliary lemmas. Lower case italics represent elements of $\mathfrak{B}$ except for j, k, m, n which stand for positive integers. If $\mathfrak{B}$ is an operator algebra, $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}[\mathfrak{X}]$ the algebra of linear bounded operators mapping the complex B-space $\mathfrak{X}$ into $\mathfrak{X}$, then elements are denoted by capital italics and for the unit element we write I instead of e. Complex numbers are denoted by Greek letters.

With respect to a given element a of $\mathfrak{B}$ the complex numbers λ fall into two classes, $\varrho(a)$ the resolvent set of a and $\sigma(a)$ the spectrum of a, according as $\lambda e - a$ has an inverse in $\mathfrak{B}$ or not. For $\lambda \in \varrho(a)$ we write

$$(\lambda a - a)^{-1} = R(\lambda; a)\,. \tag{2.1}$$

The set $\varrho(a)$ is open but not necessarily connected and $R(\lambda; a)$ is holomorphic in each component of $\varrho(a)$. The set $[\lambda \mid |\lambda| > \|a\|]$ belongs to $\varrho(a)$. The spectrum is closed. At an isolated point $\lambda = \lambda_0$ of $\sigma(a)$ the principal part of $R(\lambda; a)$ has the form

$$e_0(\lambda - \lambda_0)^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} q_0^{n-1}(\lambda - \lambda_0)^{-n}, \tag{2.2}$$

where e_0 is idempotent, q_0 quasi-nilpotent, and $e_0 q_0 = q_0 e_0 = q_0$.

If $f(\lambda)$ is an analytic function of λ, holomorphic in a domain D containing $\sigma(a)$, then we may define $f(a)$ by

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R(\lambda; a)\, f(\lambda)\, d\lambda\,, \tag{2.3}$$

where Γ is a contour in D surrounding $\sigma(a)$. The spectral mapping theorem asserts that

$$\sigma[f(a)] = f[\sigma(a)]\,. \tag{2.4}$$

If $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}[\mathfrak{X}]$, we may subject $\sigma[A]$ to further analysis. In particular, we say that $\lambda_0 \in P\sigma[A]$, the point spectrum of A, if there exists a characteristic vector $x_0 \in \mathfrak{X}$, $x_0 \neq 0$, such that

$$(\lambda_0 I - A)\,[x_0] = 0\,. \tag{2.5}$$

The fine structure theorem then asserts that

$$P\sigma[f(A)] = f[P\sigma[A]]\,,\ \ [f(\lambda_0)\, I - f(A)]\,[x_0] = 0\,. \tag{2.6}$$

For further details concerning these questions, see E. HILLE and R. S. PHILLIPS [6].

Let $F(x)$ be a function on $\mathfrak{B}$ to $\mathfrak{B}$ defined in a domain $\mathfrak{D}$ of $\mathfrak{B}$. We say that $F(x)$ is Fréchet analytic in $\mathfrak{D}$ if $F(x)$ is single-valued, locally bounded and (G)-differentiable, that is,

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} [F(x + \alpha h) - F(x)] \equiv \delta F(x, h) \tag{2.7}$$

exists for every $h \in \mathfrak{B}$. Under the stated assumptions this (G)-differential is actually an (F)-differential and for fixed x there exists a linear bounded operator $F'(x)$ on $\mathfrak{B}$ to $\mathfrak{B}$ such that

$$\delta F(x, h) = F'(x)[h]. \tag{2.8}$$

Finally we shall need the abstract implicit function theorem due to T. H. HILDEBRANDT and L. M. GRAVES [5]. We formulate what we need as

Lemma 1. *Let $G(x,y)$ be a function on $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}$ to $\mathfrak{B}$, defined and Fréchet analytic in both variables in $\|x - x_0\| < \varrho$, $\|y - y_0\| < \varrho$. Define the partial Fréchet differential with respect to y at (x_0, y_0) by*

$$\delta_y G(x_0, y_0; h) \equiv \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} [G(x_0, y_0 + \alpha h) - G(x_0, y_0)] \equiv D_0[h]. \tag{2.9}$$

Suppose that the linear bounded transformation D_0 has a bounded inverse. Then there exists a $\varrho_0 \leqq \varrho$ and a function $y(x)$ defined in $\|x - x_0\| < \varrho_0$ having values in $\mathfrak{B}$ and being Fréchet analytic in x such that

$$G(x, y(x)) \equiv G(x_0, y_0), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.10}$$

and this solution is unique.

I. Roots

3. The operator $S(b)$. Suppose that $b \in \mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}$ and consider the linear bounded operator $S(b) \in \mathfrak{E}[\mathfrak{B}]$ defined by

$$S(b)[x] = b^{-1} x b, \quad x \in \mathfrak{B}. \tag{3.1}$$

If a_1, a_2 are arbitrary elements of $\mathfrak{B}$, we define

$$L(a_1)[x] = a_1 x, \quad R(a_2)[x] = x a_2 \tag{3.2}$$

in terms of which

$$S(b) = L(b^{-1}) R(b). \tag{3.3}$$

We note that

$$L(a_1) R(a_2) = R(a_2) L(a_1). \tag{3.4}$$

We note the relations

$$\sigma[L(a_1)] = \sigma[a_1], \quad \sigma[R(a_2)] = \sigma[a_2] \tag{3.5}$$

where on the left occurs the spectrum of the operator relative to the algebra $\mathfrak{E}[\mathfrak{B}]$ and on the right the spectrum of the element in question with respect to the algebra $\mathfrak{B}$.

Lemma 2[1]**).** *The spectrum of $S(b)$ with respect to $\mathfrak{E}[\mathfrak{B}]$ satisfies*

$$\sigma[S(b)] \subset [\lambda \mid \lambda = \lambda_1^{-1}\lambda_2;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma[b]]. \tag{3.6}$$

Proof. Let $\mathfrak{A}$ be the commutative subalgebra of $\mathfrak{E}[\mathfrak{B}]$ generated by I, $L(b^{-1})$, and $R(b)$ to which $S(b)$ belongs by (3.3). Let $\mathfrak{A}^c$ be the first commutant of $\mathfrak{A}$, that is, the set of all elements of $\mathfrak{E}[\mathfrak{B}]$ which commute with every element of $\mathfrak{A}$, and let $\mathfrak{A}^{cc} = [\mathfrak{A}^c]^c$. Then $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^{cc} \subset \mathfrak{A}^c$ and $\mathfrak{A}^{cc}$ is abelian. Suppose $A \in \mathfrak{A}$ and that A is regular in $\mathfrak{E}[\mathfrak{B}]$. If $T \in \mathfrak{A}^c$

$$A^{-1}T = A^{-1}TA\,A^{-1} = A^{-1}A\,TA^{-1} = T\,A^{-1},$$

so that $A^{-1} \in \mathfrak{A}^{cc}$, that is A is also regular as element of $\mathfrak{A}^{cc}$. It follows that the spectra of A with respect to $\mathfrak{E}[\mathfrak{B}]$ and $\mathfrak{A}^{cc}$ are identical. But $\mathfrak{A}^{cc}$ is abelian and the spectral theory in a commutative algebra may be studied with the aid of the Gelfand representation theory. Thus if $\mathfrak{m}$ is any maximal ideal of $\mathfrak{A}^{cc}$ and if $A \equiv A[\mathfrak{m}]\,I$ (mod. $\mathfrak{m}$), then by (3.3) and (3.5)

$$S(b)\,[\mathfrak{m}] = L(b^{-1})\,[\mathfrak{m}]\,R(b)\,[\mathfrak{m}] = \lambda_1^{-1}\lambda_2\,,\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(b)\,,$$

so that (3.6) holds. This is all that we can expect to prove, it may very well happen that the spectrum of $S(b)$ reduces to $\lambda = 1$.

The following observations deal with point spectra.

Suppose that $\alpha \in P\sigma[L(b^{-1})]$, $\beta \in P\sigma[R(b)]$ and that

$$b^{-1}x_1 = \alpha\, x_1\,,\quad x_2 b = \beta\, x_2\,.$$

Then

$$b^{-1}(x_1 x_2)\, b = \alpha\,\beta(x_1 x_2)\,,$$

so that either

$$\alpha\,\beta \in P\sigma[S(b)] \text{ or } x_1 x_2 = 0\,. \tag{3.7}$$

If $\mathfrak{B}$ is a prime ring (see N. Jacobson [7], p. 196), than there exists at least one $z \in \mathfrak{B}$ such that $x_1 z\, x_2 \neq 0$ and now

$$b^{-1}(x_1\, z\, x_2)\, b = \alpha\,\beta(x_1\, z\, x_2)$$

so that the first alternative under (3.7) holds.

Suppose that

$$\lambda_0 \in P\sigma[S(b)]\,,\quad S(b)\,[x_0] = \lambda_0 x_0\,.$$

If n is a positive integer, then

$$S(b)\,[x_0^n] = \{S(b)\,[x_0]\}^n = \lambda_0^n\, x_0^n\,,$$

that is, either

$$\lambda_0^n \in P\sigma[S(b)] \text{ or } x_0^n = 0\,. \tag{3.8}$$

We see in particular that if $|\lambda_0| \neq 1$, then x_0 must be nilpotent since $S(b)$ is bounded and has the bounded inverse

$$[S(b)]^{-1} = S(b^{-1})\,. \tag{3.9}$$

---

[1]) This result is not new. For a detailed study of the spectra of sums and products of operators, see R. S. Foguel [2]. The proof of Lemma 2 is included to facilitate the reading of this paper. For the properties of the commutants and of functions on maximal ideals see E. Hille and R. S. Phillips [6], p. 21 and p. 134 respectively.

4. Distinct roots. Suppose that $a \in \mathfrak{G} \cap \mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{B}$ and that x is a solution of

$$x^k = a. \tag{4.1}$$

Obviously $x \in \mathfrak{G}$. We say that $\sigma(x)$ is *irrotational* (mod. $2\pi/k$) if

$$\sigma(x) \cap \sigma(\omega^j x) = \theta, \; j = 1, 2, \ldots, k-1, \; \omega = e^{2\pi i/k}. \tag{4.2}$$

Theorem 1. *Suppose that x_1 and x_2 are two distinct roots of* (4.1) *and that x_1 satisfies condition* (4.2). *Then x_1 and x_2 commute and there exists a set of k idempotents $e_1, \ldots, e_k$, some of which may be zero, such that the e_α' s commute with x_1 and x_2 and*

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \; \Sigma e_\alpha = e, \; \Sigma \omega^\alpha e_\alpha = x_1 x_2^{-1}. \tag{4.3}$$

Proof. The assumption that $\sigma(x_1)$ is irrotational (mod. $2\pi/k$) implies that $\sigma[S(x_1)]$ does not contain any kth root of unity besides $\lambda = 1$. Now

$$[S(x_1)]^k [x_2] = x_1^{-k} x_2 x_1^k = x_2^{-k} x_2 x_2^k = x_2.$$

Thus $\lambda = 1$ is a characteristic value of $[S(x_1)]^k$ with x_2 as a characteristic vector. Thus

$$\prod_{\alpha=1}^{k} [\omega^{\alpha-1} I - S(x_1)] [x_2] = 0. \tag{4.4}$$

Since $R(\omega^{\alpha-1}, S(x_1))$ exists for $\alpha = 2, 3, \ldots, k$, we get

$$[I - S(x_1)] [x_2] = 0 \text{ or } x_1 x_2 = x_2 x_1$$

as asserted.

We shall now examine $x_1 x_2^{-1}$. Since

$$(x_1 x_2^{-1})^k = x_1^k x_2^{-k} = e,$$

the spectral mapping theorem shows that the spectrum of $x_1 x_2^{-1}$ is contained in the set of the kth roots of unity. Hence there exist idempotents e_α, some of which may be zero, such that

$$e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha, \; \Sigma e_\alpha = e$$

and corresponding quasi-nilpotents q_α such that

$$e_\alpha q_\alpha = q_\alpha e_\alpha = q_\alpha, \; q_\alpha q_\beta = 0, \; \alpha \neq \beta,$$

in terms of which

$$R(\lambda; x_1 x_2^{-1}) = \sum_{\alpha=1}^{k} e_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} q_\alpha^{n-1} (\lambda - \omega^\alpha)^{-n}, \tag{4.5}$$

where $q_\alpha^0 = e_\alpha$ by definition. For the series on the right is the sum of the principal parts of the resolvent; the difference between the two sides must be an entire function of λ, but both sides are holomorphic at infinity and vanish there, hence the two sides must be equal. By formula (2.3)

$$e = (x_1 x_2^{-1})^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda^k R(\lambda; x_1 x_2^{-1}) \, d\lambda, \tag{4.6}$$

where Γ is $|\lambda| = \varrho > 1$. Substituting the series and integrating termwise we get

$$e = \sum_{\alpha=1}^{k} e_\alpha \sum_{n=1}^{k+1} \binom{k}{n-1} \omega^{-\alpha(n-1)} q_\alpha^{n-1}.$$

Thus the q's are nilpotents. We shall show that they are actually zero. Multiplying both sides by e_α we get

$$\sum_{n=2}^{k+1} \binom{k}{n-1} \omega^{-(n-1)\alpha} q_\alpha^{n-1} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k.$$

Here q_α is a factor of the left side and the remaining factor has an inverse, since $e + q$ has an inverse if q is nilpotent. Hence every $q_\alpha = 0$ and

$$R(\lambda; x_1 x_2^{-1}) = \sum_{\alpha=1}^{k} e_\alpha (\lambda - \omega^\alpha)^{-1}. \tag{4.7}$$

Expanding both sides in powers of λ^{-1} and comparing the coefficients of λ^{-2} we get (4.3).

It remains to prove that the idempotents e_α commute with x_1 and x_2. To prove this we observe that any power of $x_1 x_2^{-1}$ commutes with x_1 as well as with x_2. Hence we have identities of the form

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \omega^{n\alpha} (e_\alpha x_1 - x_1 e_\alpha) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4.8}$$

and similar identities with x_1 replaced by x_2. It follows that each parenthesis must be zero. This completes the proof.

For the validity of this theorem it is essential that the spectrum of at least one of the two kth roots be irrotational. The two matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

are non-commuting square roots of the unit matrix in the algebra of two by two matrices and their spectra are identical, namely $\lambda = 1$ and -1 which are carried into each other by a rotation of π.

5. Interior points of $\mathfrak{R}_k$. We turn now to the second problem and shall prove

Theorem 2. *If $a \in \mathfrak{S}$ is the kth power of b and if $\sigma(b)$ is irrotational* (mod. $2\pi/k$), *then a is an interior point of $\mathfrak{R}_k$. There exists a neighborhood of $x = a$ all the points of which are kth powers of elements in a neighborhood of b.*

Proof. We shall study the mapping

$$(b + y)^k = a + x \tag{5.1}$$

in the neighborhood of $(0, 0)$. We have

$$x = \sum_{j=1}^{k} B_j(b, y), \tag{5.2}$$

where $B_j(b, y)$ is a homogeneous polynomial in y of degree j and in b of degree $k - j$. In particular

$$B_1(b, y) = \sum_{n=0}^{k} b^n \, y \, b^{k-n-1} = b^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} [S(b)]^j [y] \tag{5.3}$$

so that

$$B_1(b, y) = b^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} [\omega^j I - S(b)] [y], \quad \omega = e^{2\pi i/k}. \tag{5.4}$$

This is a linear bounded transformation on $\mathfrak{B}$ to $\mathfrak{B}$ and, since $\sigma(b)$ is irrotational, the operator has a linear bounded inverse given by

$$b^{1-k}\prod_{j=1}^{k-1} R(\omega^j;\ S(b))\,. \tag{5.5}$$

Putting

$$G(x, y) \equiv (b+y)^k - a - x\,,\ x_0 = y_0 = 0\,, \tag{5.6}$$

we see that

$$\delta_y G(0, 0; h) = B_1(b, h) \equiv D_0[h]$$

and the inverse of D_0 is given by (5.5). Thus the assumptions of Lemma 1 are satisfied. Hence there exists a sphere $\|x\| < \varrho_0$ and a function $y(x)$, Fréchet analytic in this sphere, such that

$$[b + y(x)]^k = a + x\,,\ \|x\| < \varrho_0\,,\ y(0) = 0\,.$$

This proves the theorem.

6. Disjoint spectra. The condition that $\sigma(b)$ be irrotational (mod. $2\pi/k$) in order that $a = b^k$ be an interior point of $\mathfrak{R}_k$ is unnecessarily restrictive. It suffices that $\sigma(b)$ breaks up into disjoint spectral sets σ_α distributed between k congruent sectors. We can then find another kth root of a, whose spectrum is confined to one of these sectors, and Theorem 2 applies to this root.

More precisely, we shall say that $\sigma(b)$ may be *sectorized* (mod. $2\pi/k$) if there exists a rectifiable arc C leading from $\lambda = 0$ to a distant point of the plane such that the k arcs

$$C,\ \omega C,\ \omega^2 C, \ldots, \omega^{k-1} C\,, \qquad \omega = e^{2\pi i/k} \tag{6.1}$$

do not contain any points of $\sigma(b)$. These k arcs then subdivide the spectrum of b into k spectral set σ_α, one for each sector, and it is understood that one or more of these sets may be void. The spectral set σ_α lies between $\omega^\alpha C$ and $\omega^{\alpha+1} C$.

Theorem 3. *If $a \in \mathfrak{S}$ is the kth power of b and if $\sigma(b)$ may be sectorized* (mod. $2\pi/k$), *then a is an interior point of $\mathfrak{R}_k$. There exists an element c of $\mathfrak{S}$ such that $a = c^k$ and a neighborhood of $x = a$, all the elements of which are kth powers of elements in some neighborhood of c.*

Proof. Let C_1 and C_2 be two circles with center at $\lambda = 0$ such that $\sigma(b)$ lies in the open annulus bounded by C_1 and C_2. Let Γ_α be the closed positively oriented contour surrounding σ_α which is formed by the subarcs of $\omega^\alpha C$ and $\omega^{\alpha+1} C$ between C_1 and C_2 joined by the two arcs of these circles. Here $\alpha = 0, 1, \ldots, k-1$. A positive rotation through an angle of $\alpha\, 2\pi/k$ will take Γ_0 into Γ_α. We set

$$e_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\alpha} R(\lambda; b)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0} R(\lambda; b\,\omega^{-\alpha})\, d\lambda\,, \tag{6.2}$$

$$b_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\alpha} \lambda R(\lambda; b)\, d\lambda = \frac{\omega^\alpha}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0} \lambda R(\lambda; b\,\omega^{-\alpha})\, d\lambda\,. \tag{6.3}$$

Then

$$\sum_{\alpha=0}^{k-1} e_\alpha = e\,,\ e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha\,,\ \sum_{\alpha=0}^{k-1} b_\alpha = b\,,\ b_\alpha b_\beta = 0\,,\ \alpha \neq \beta,\ b_\alpha = e_\alpha b = b e_\alpha\,. \tag{6.4}$$

For these properties and for the facts regarding the spectra of b_α used below, see E. Hille and R. S. Phillips [6] Theorem 5.6.1. We set

$$c = b \sum_{\alpha=0}^{k-1} \omega^{-\alpha} e_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \omega^{-\alpha} b_\alpha . \tag{6.5}$$

By (6.4)

$$\lambda e - \sum_{\alpha=0}^{k-1} \omega^{-\alpha} b_\alpha = \lambda^{-k+1} \prod_{\alpha=0}^{k-1} (\lambda e - \omega^{-\alpha} b_\alpha) , \ \lambda \neq 0 .$$

Thus the left side has an inverse if and only if each of the factors on the right has an inverse. But

$$\sigma[\omega^{-\alpha} b_\alpha] = \omega^{-\alpha} \sigma[b_\alpha] = \omega^{-\alpha} \sigma_\alpha \cup \{0\}$$

and $\omega^{-\alpha}\sigma_\alpha$ is confined to the interior of Γ_0. The point $\lambda = 0$ is not in $\sigma[c]$ for in the second member of (6.5) both factors have inverses. In the case of b this was a part of the assumption since $a \in \mathfrak{S}$ and a simple calculation shows that the resolvent of the second factor is

$$R(\lambda; \sum_{\alpha=0}^{k-1} \omega^{-\alpha} e_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} e_\alpha (\lambda - \omega^{-\alpha})^{-1}$$

which is holomorphic at $\lambda = 0$. Hence $\sigma[c]$ lies in the interior of Γ_0. Finally

$$c^k = b^k \left[\sum_{\alpha=0}^{k-1} \omega^{-\alpha} e_\alpha \right]^k = b^k \sum_{\alpha=0}^{k-1} \omega^{-k\alpha} e_\alpha = b^k = a .$$

Thus c is a kth root of a and Theorem 2 applies to c. This completes the proof.

II. Logarithms

7. The operator $T(a)$. In problems involving the exponential function the *commutator operator* $T(a)$ plays a similar role to that of the operator $S(b)$ in the study of powers. We set

$$T(a)[x] = a x - x a \tag{7.1}$$

so that

$$T(a) = L(a) - R(a) . \tag{7.2}$$

The spectral properties of $T(a)$ are listed in

Lemma 3. *We have*

$$\sigma[T(a)] \subset [\lambda \mid \lambda = \lambda_1 - \lambda_2 ; \ \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(a)] . \tag{7.3}$$

We omit the proof which follows the same lines as that of Lemma 2. The following remarks refer to point spectra. Suppose that

$$\lambda_1 \in P\sigma[L(a)] , \ \lambda_2 \in P\sigma[R(a)]$$
$$a x = \lambda_1 x , \ y a = \lambda_2 y .$$

Then

$$a x y - x y a = (\lambda_1 - \lambda_2) x y ,$$

that is, either

$$\lambda_1 - \lambda_2 \in P\sigma[T(a)] \text{ or } xy = 0 . \tag{7.4}$$

If $\mathfrak{B}$ is a prime ring, we can find a z such that $xzy \neq 0$ and then

$$a xzy - xzya = (\lambda_1 - \lambda_2) xzy$$

so that the first alternative under (7.4) must hold.

Suppose that $\lambda_0 \neq 0$ is in $P\sigma[T(a)]$ and

$$a\,x_0 - x_0 a = \lambda_0 x_0\,, \quad x_0 \neq 0\,,$$

then

$$a\,x_0^n - x_0^n\,a = n\,\lambda_0 x_0^n\,,$$

so that either

(7.5) $$n\,\lambda_0 \in P\sigma[T(a)] \text{ or } x_0^n = 0\,.$$

It is clear that the second alternative must hold for all large n, that is, every characteristic vector corresponding to a $\lambda_0 \neq 0$ must be nilpotent.

We list finally the important formula

(7.6) $$\exp(a)\,x\exp(-a) = \{\exp[T(a)]\}\,[x]\,,$$

due to J. E. Campbell ([1], p. 385—386) and F. Hausdorff ([4], p. 26). This formula is basic for the following discussion.

8. Distinct logarithms. We suppose now that $a \in \mathfrak{L}$ and that y is a solution of

(8.1) $$\exp(y) = a\,.$$

We say that $\sigma(y)$ is *incongruent* (mod. $2\pi i$) if

(8.2) $$\sigma(y) \cap [\sigma(y) + 2\,k\,\pi\,i] = \Theta\,, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\,.$$

Theorem 4. *Suppose that y_1 and y_2 are two distinct solutions of* (8.1) *and that $\sigma(y_1)$ is incongruent* (mod. $2\pi i$). *Then y_1 and y_2 commute and there exist idempotents $e_1, e_2, \ldots, e_n$, commuting with y_1 and y_2, and distinct integers $k_1, k_2, \ldots, k_n$ such that*

(8.3) $$y_1 - y_2 = 2\pi\,i \sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha e_\alpha\,, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha = e\,, \quad e_\alpha e_\beta = \delta_{\alpha\beta} e_\alpha\,.$$

Proof. We start by assuming that neither y_1 nor y_2 is zero. Since $\sigma(y_1)$ is incongruent (mod. $2\pi i$), the spectrum of $T(y_1)$ does not contain any multiple of $2\pi i$ different from zero. Formula (7.6) asserts that

(8.4) $$\exp(y_1)\,y_2\exp(-y_1) = \{\exp[T(y_1)]\}\,[y_2]\,.$$

Since $\exp(y_1) = \exp(y_2)$ and y_2 commutes with $\exp(y_2)$, the left member reduces to y_2 so that

(8.5) $$\{\exp[T(y_1)]\}\,[y_2] = y_2\,.$$

This states that $\lambda = 1$ is a characteristic value of the operator $\exp[T(y_1)]$ and that y_2, $y_2 \neq 0$, is a corresponding characteristic vector. By (2.6), the fine structure theorem, there exists a characteristic value α of $T(y_1)$ such that $\exp\alpha = 1$ and the assumption on $\sigma(y_1)$ implies that $\alpha = 0$. We have to show that y_1 is a corresponding characteristic vector. Let us set

(8.6) $$E(\alpha) = [1 - \exp(-a)]/\alpha\,.$$

Then

$$\{\exp[T(y_1)] - I\}\,[y_2] = E[-T(y_1)]\,T(y_1)\,[y_2]\,.$$

Since

$$\sigma\{E[-T(y_1)]\} = E\{-\sigma[T(y_1)]\}$$

does not contain the origin, $E[-T(y_1)]$ has a bounded inverse, $F(-y_1)$ say, so that

$$F(-y_1)\{\exp[T(y_1)]-I\}[y_2]=T(y_1)[y_2].$$

Here the left side is zero so that $T(y_1)[y_2]=0$ or y_1 commutes with y_2 as asserted.

We have then

$$\exp(y_1-y_2)=\exp(y_1)\exp(-y_2)=e,$$

so that

$$\sigma(y_1-y_2)\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ 2\pi i)$$

by the spectral mapping theorem. This implies

$$R(\lambda;y_1-y_2)=\sum_{\alpha=1}^{n}e_\alpha\sum_{m=1}^{\infty}q_\alpha^{m-1}\quad(\lambda-2k_\alpha\pi i)^{-m},$$

where $\Sigma e_\alpha=e$ and the e_α's and q_α's have the usual orthogonality properties. With the aid of (2.3) we then obtain

$$\exp(y_1-y_2)=\sum_{\alpha=1}^{n}e_\alpha\exp(q_\alpha)=\exp\left[\sum_{\alpha=1}^{n}q_\alpha\right]\equiv\exp(q).$$

From $\exp q=e$ we get

$$q\left\{e+\sum_{1}^{\infty}\frac{q^m}{(m+1)!}\right\}=0.$$

The quantity inside the braces differs from e by a quasi-nilpotent and consequently has an inverse. This implies $q=0$ and in the same manner we prove that

$$q_\alpha=0,\ \alpha=1,2,\ldots,n.$$

Thus the spectral singularities of $R(\lambda;y_1-y_2)$ are all simple poles. Expanding the resolvent in powers of λ^{-1} and comparing coefficients of λ^{-2} we get (8.3). Here the k_α's are distinct integers one of which may be zero.

If $y_1=0$, it is clear that y_1 and y_2 commute and there is nothing to change in the second part of the proof.

Since any power of (y_1-y_2) commutes with y_1 as well as with y_2 we obtain identities of the form

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(k_\alpha)^m[e_\alpha y_1-y_1e_\alpha]=0,\ m=1,2,3,\ldots,$$

whence it follows that every bracket must be zero, that is, the e_α's commute with y_1 and here we may replace y_1 by y_2. This completes the proof.

If neither y_1 nor y_2 satisfies condition (8.2), the conclusion of Theorem 4 need not hold. S. Kakutani has called my attention to the fact that in the algebra of two by two matrices the unit matrix has non-commuting logarithms. If (8.2) does not hold, there exists a polynomial $P(\alpha)$ such that $P[T(y_1)][y_2]=0$ but in general we cannot conclude from this that $T(y_1)[y_2]=0$.

9. Interior points of L. We turn now to the second problem for logarithms and shall prove

Theorem 5. *If $a \in L$, if b is a logarithm of a, and if $\sigma(b)$ is incongruent* (mod. $2\pi i$), *then a is an interior point of L. There exists a neighborhood of $x = a$, all the points of which have logarithms in some neighborhood of b.*

Proof. In this case we set

$$G(x, y) \equiv \exp(-b)\exp(b + y) - \exp(x)\,, \quad x_0 = y_0 = 0\,. \tag{9.1}$$

Here $G(0, 0) = 0$ and

$$\delta_y G(0, 0; h) = \exp(-b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n-1} b^j\, h\, b^{n-1-j} \equiv D(b)\,[h]\,. \tag{9.2}$$

A simple calculation gives

$$D(b)\,[h] = \{E\,[T(b)]\}\,[h] \tag{9.3}$$

with $E(\alpha)$ defined by (8.6). Just as in the preceding section we see that $\sigma\,\{E\,[T(b)]\} = E\,\{\sigma[T(b)]\}$ does not contain $\lambda = 0$ since none of the zeros of $E(\alpha)$ belongs to $\sigma[T(b)]$. It follows that $D(b)$ has a bounded inverse and Lemma 1 applies. Thus there exists a $\varrho_0 = \varrho_0(b)$ and a Fréchet analytic function $y(x) = y(x; 0, b)$ such that

$$\exp(b)\exp(x) = \exp[b + y(x; 0, b)]\,, \quad \|x\| < \varrho_0(b)\,. \tag{9.4}$$

The mapping $x \to a \exp x$ being open, we conclude the existence of a neighborhood of a, all the points of which have logarithms, that is, belong to $\mathfrak{L}$, and these logarithms may be found in some neighborhood of b as asserted.

10. Disjoint spectra. The condition that $\sigma(b)$ be incongruent (mod. $2\pi i$) in order that $a = \exp(b)$ be an interior point of L is of course unnecessarily restrictive. Just as in the case of roots, it suffices that $\sigma(b)$ breaks up into disjoint spectral set σ_α which are distributed between the period strips of the exponential function. We can then find another logarithm of a whose spectrum is confined to a single period strip, and Theorem 5 applies to this logarithm.

We shall say that $\sigma(b)$ may be ***stratified*** (mod. $2\pi i$) if rectifiable arcs $C_0, C_1, \ldots, C_n$ exist with the following properties:

(1) $C_\alpha = C_{\alpha-1} + 2\pi i$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$.

(2) Every vertical line in the λ-plane intersects C_0 in at most one point.

(3) $\sigma(b)$ is confined to the domain bounded by C_0 and C_n and two vertical lines. No point of $\sigma(b)$ lies on any of the arcs C_α.

Theorem 6. *If $a = \exp(b)$ and if $\sigma(b)$ may be stratified* (mod. $2\pi i$), *then a is an interior point of L.*

Proof. We proceed as in the proof of Theorem 3. Let σ_α be the spectral set between $C_{\alpha-1}$ and C_α and let Γ_α be the closed positively oriented contour surrounding σ_α which is formed by $C_{\alpha-1}$ and C_α and the vertical line segments joining their endpoints. A translation by $2\alpha\pi i$ takes Γ_1 into $\Gamma_{\alpha+1}$. We now define e_α and b_α by formulas (6.2) and (6.3) giving Γ_α its new meaning and in each case omitting the third member which is no longer relevant. These quantities again satisfy (6.4). We now set

$$c_\alpha = b_\alpha - (\alpha - 1)\, 2\pi i\, e_\alpha\,, \quad c = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha\,. \tag{10.1}$$

Here

$$c_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\alpha} [\lambda - (\alpha - 1)\, 2\,\pi\, i]\, R(\lambda; b)\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \lambda\, R(\lambda + (\alpha - 1)\, 2\,\pi\, i\,; b)\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \lambda\, R(\lambda; b - (\alpha - 1)\, 2\,\pi\, i\, e)\, d\lambda\,.$$

The spectrum of $b - (\alpha - 1)\, 2\,\pi\, i\, e$ is also stratified; one of its spectral sets lies interior to Γ_1 and is congruent to σ_α. It follows that $\sigma(c_\alpha) = \{\sigma_\alpha - (\alpha - 1)\, 2\,\pi\, i\} \cup \{0\}$. If σ_α is void, $c_\alpha = 0$ and gives no contribution to the value of c. We note that in any case $c_\alpha c_\beta = 0$ when $\alpha \neq \beta$. This implies that for every $\lambda \neq 0$

$$e\,\lambda - \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha = \lambda^{1-n} \prod_{\alpha=1}^{n} (\lambda\, e - c_\alpha)\,.$$

It follows that the left side has an inverse if and only if each factor on the right has one, that is,

$$\sigma(c) = \cup_1^n\, \sigma(c_\alpha)\,.$$

Without restricting the generality we may suppose that $\lambda = 0$ is interior to Γ_1. This can always be achieved by subtracting a suitable multiple of $2\,\pi\, i\, e$ from b. It follows that $\sigma(c)$ is interior to Γ_1 and is a fortiori incongruent (mod. $2\,\pi\, i$). Since

$$c = b - 2\,\pi\, i \sum_{\alpha=2}^{n} (\alpha - 1)\, e_\alpha\,, \tag{10.2}$$

we have

$$\exp c = \exp b = a.$$

Here c satisfies the conditions of Theorem 5 and the desired conclusion follows.

References

[1] Campbell, J. E.: On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups. Proc. London math. Soc. **28**, 381—390 (1897); **29**, 14—32 (1898). — [2] Foguel, R. S.: Sums and products of commuting spectral operators. Ark. f. Mat. **3**, no. 41, 449—461 (1957). — [3] Halmos, P., G. Lumer and J. J. Schäffer: Square roots of operators. Proc. Amer. math. Soc. **4**, 142—149 (1953); Part II [Halmos and Lumer), Proc. Amer. math. Soc. **5**, 589—595 (1954). — [4] Hausdorff, F.: Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie. S.-B. kgl. sächs. Ges. Wiss. Leipzig, Math.-phys. Kl. **58**, 19—48 (1906). — [5] Hildebrandt, T. H., and L. M. Graves: Implicit functions and their differentials in general analysis. Trans. Amer. math. Soc. **29**, 127—153 (1927). — [6] Hille, E., and R. S. Phillips: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. math. Soc. Coll. Publ. **31**, 2nd ed. (1957), xii + 808 pp. — [7] Jacobson, N.: Structure of Rings. Amer. math. Soc. Coll. Publ. 37 (1956) vii + 263 pp. — [8] Lumer, G.: The range of the exponential function. Fac. Ingen. Agrimens. Montevideo. Publ. Inst. Mat. Estadist. **3**, 53—55 (1957). — [9] Wintner, A.: Bounded matrices and linear differential equations. Amer. J. Math. **79**, 139—151 (1957).

(Eingegangen am 21. März 1958)

SEBASTIÃO E SILVA, J.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 58—96 (1958)

Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel

Par

J. SEBASTIÃO E SILVA à Lisbonne

A Monsieur HEINRICH BEHNKE, à l'occasion de son 60me anniversaire

Introduction

Dans notre article «Le calcul opérationnel au point de vue des distributions» (voir Bibliographie, [11] et [12]) nous avons étudié d'abord l'espace — que nous désignons maintenant par $\mathfrak{A}_\infty^+$ — des fonctions $\varphi(z)$ holomorphes à croissance lente sur des demi-plans $\Re z > k$, $k = 0, 1, \ldots,$ ces fonctions étant les images de LAPLACE des distributions nulles à gauche de l'origine et de type exponentiel à droite; ensuite, pour donner un sens à des «fonctions de l'opérateur D» telles que $\exp iD$, sen $\sqrt{D}$, etc. (voir ici n°. 28), nous avons considéré, plus généralement, l'espace — que nous notons maintenant $\mathfrak{Z}$ — des fonctions holomorphes de type exponentiel sur des demi-plans $\Re z > k$. Or, pour prolonger à $\mathfrak{Z}$ la transformation inverse de LAPLACE, $\mathfrak{L}^{-1}$, il faut sortir du cadre des distributions, en ajoutant de nouveaux êtres à l'espace de distributions considéré, $\Lambda_{+\infty}$, image de $\mathfrak{A}_\infty^+$ par $\mathfrak{L}^{-1}$ — et il nous a semblé naturel d'appeler «ultra-distributions» ces entités, ainsi que les distributions elles-mêmes (pour commodité de langage). Une telle extension de $\Lambda_{+\infty}$ pourrait s'obtenir immédiatement, en considérant le complété de $\Lambda_{+\infty}$ pour la topologie image, par $\mathfrak{L}^{-1}$, de la topologie induite dans $\mathfrak{A}_\infty^+$ par $\mathfrak{Z}$ ($\mathfrak{A}_\infty^+$ étant dense dans $\mathfrak{Z}$). Mais c'était là une solution triviale, qui nous sembla peu maniable et dépourvue d'intérêt. Notre but était de représenter les ultra-distributions par des fonctions analytiques, de manière à pouvoir traduire la somme, le produit par polynômes, la dérivation et les translations, par ces opérations appliquées aux fonctions analytiques elles-mêmes de la façon usuelle. D'ailleurs, certains espaces, que l'on pouvait dire aussi de «ultra-distributions», avaient déjà été considérés.

D'une part, M. KÖTHE, dans [5], avait introduit les «Randverteilungen» (c.a.d. «ultra-distributions de frontière») des fonctions $f(z)$ holomorphes dans le complémentaire d'une courbe $\mathfrak{C}$ analytique, simple et fermée, identifiant ensuite une partie de ces Randverteilungen aux distributions sur $\mathfrak{C}$ au sens de SCHWARTZ. Cette conception a été généralisée par M. TILLMANN, dans [14], au cas de produits (dans $\mathbf{C}^n$) de lignes analytiques simples, ouvertes ou fermées.

D'autre part M. EHRENPREIS, dans le but de prolonger à tout l'espace $\mathfrak{D}'$ des distributions, la transformation $\mathfrak{F}$ de FOURIER, définie par M. SCHWARTZ

comme un automorphisme topologique de l'espace $\mathfrak{S}'$ (des distributions tempérées ou «à croissance polynômiale»), a considéré, dans [2], l'espace image de $\mathfrak{D}'$ par $\mathfrak{F}$, comme le dual topologique de l'espace $\mathbf{D} = \mathfrak{F}(\mathfrak{D})$ des fonctions entières à décroissance rapide sur l'axe réel et de type exponentiel sur les verticales[1]):

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{D}') = (\mathfrak{F}(\mathfrak{D}))' = \mathbf{D}' .$$

Pour atteindre notre but initial, nous avons dû adopter un point de vue mixte, qui tient à la fois de celui de M. Köthe et de celui de M. Ehrenpreis, tout en divergeant de l'un et de l'autre: seul l'espace des ultra-distributions que nous appelons ici «tempérées» est identifiable à un sous-espace de $\mathbf{D}'$, et il n'est pas contenu (ni ne le contient, à ce que nous pensons) l'espace des Randverteilungen de Köthe-Tillmann sur l'axe réel. (Nous nous bornons ici au cas d'une seule variable, mais l'extension au cas de n variables, que nous nous proposons d'exposer dans un prochain travail, n'offre pas de difficultés sérieuses).

Au lieu de prolonger $\mathfrak{F}$ à l'espace $\mathfrak{D}'$ de toutes les distributions sur $\mathbf{R}$ (ce dont nous n'avions pas besoin), nous avons pris pour point de départ un espace compris entre $\mathfrak{S}'$ et $\mathfrak{D}'$ — celui des distributions de «type exponentiel à droite et à gauche» que nous désignons ici par Λ_∞ (voir n°. 8) — et nous avons envisagé une extension, $\mathfrak{U}$, de $\mathfrak{S}'$, de façon à prolonger $\mathfrak{F}$ en un isomorphisme topologique de Λ_∞ sur $\mathfrak{U}$. Ce sont les éléments de $\mathfrak{U}$ que nous appelons «ultra-distributions tempérées».

Pour réaliser $\mathfrak{U}$, on pourrait tout simplement utiliser la construction de M. Ehrenpreis, en considérant $\mathfrak{U}$ comme le sous-espace de $\mathbf{D}'$ qui est l'image de Λ_∞ par $\mathfrak{F}$. On pourrait aussi employer la méthode de complétion topologique, indiquée plus haut, qui servirait d'ailleurs, également, pour construire $\mathfrak{F}(\mathfrak{D}')$. Mais, comme nous l'avons déjà dit, notre but était d'obtenir une représentation concrète des ultra-distributions au moyen de fonctions analytiques, ce qui, outre les avantages indiqués, permettrait d'introduire un critère convenable de localisation (n°. 20) et d'étudier commodément les opérateurs linéaires continus définis dans $\mathfrak{U}$, au moyen d'une intégration complexe, voisine de la notion usuelle d'intégrale (n^{os}. 13—19). Or la façon la plus directe, et presque immédiate, de parvenir à cette réalisation fonctionnelle de $\mathfrak{U}$, est celle que nous avons adopté ici (n°. 8):

Chaque $T \in \Lambda_\infty$ admet la décomposition $T = T^+ - T^-$, où T^+ (resp. T^-) est une distribution de Λ_∞ nulle à gauche (resp. à droite) de l'origine, ces distributions T^+ et T^- étant déterminées à une même combinaison linéaire près de dérivées de δ. Or, si l'on adopte la formule

$$\mathfrak{F}\, T^+ = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izu}\, T_u^+\, du ,$$

où z est la variable complexe $x + i\,y$ et où l'intégrale par rapport à T^+ est définie par prolongement continu, la transformation $\mathfrak{F}$, appliquée aux distributions $T^+ (\in \Lambda_{+\infty})$, s'identifie à la transformation de Laplace suivie du

[1]) Pour commodité de notation nous désignons toujours par $\mathfrak{F}$ les divers prolongements de la transformation de Fourier et par $\mathfrak{L}$ ceux de la transformation de Laplace.

changement de variable $z \to -iz$. Donc $\mathfrak{F}T^{+}$ (resp. $\mathfrak{F}T^{-}$) est représentée par une fonction φ^{+} (resp. φ^{-}) holomorphe à croissance lente dans un demi plan $\mathfrak{I}z > k$ (resp. $\mathfrak{I}z < -k$). Alors $\mathfrak{F}T$ se «réalise» par le couple $(\varphi^{+}, \varphi^{-})$ de telles fonctions, i. e. par une fonction $\varphi(z)$ holomorphe à croissance lente dans l'ouvert $|\mathfrak{I}z| > k$, cette fonction étant déterminée à un polynôme près (image d'une combinaison linéaire de dérivées de δ). Il est alors naturel de poser $\mathfrak{F}T = \varphi^{+} - \varphi^{-}$ (convention analogue à celle des vecteurs comme différences de points); d'ailleurs, cette différence reprend le sens usuel, lorsque les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{izu}\, T_u^{+}\, du$, $\int_{-\infty}^{0} e^{izt}\, T_u^{-}\, du$ sont convergentes pour tout $z \in \mathbf{R}$, l'intégrale de Fourier jouant ici un rôle tout à fait analogue à celui de la série de Laurent pour les Randverteilungen de Köthe (voir encore th. 10. 1.).

Dans cette interprétation fonctionnelle de l'espace $\mathfrak{U}$, il est essentiel de préciser quelles sont les fonctions φ qui représentent les distributions tempérées: *ce sont les fonctions holomorphes en dehors de l'axe réel, à croissance lente vers cet axe et vers l'* ∞ (th. 12. 1.). Le passage de la «représentation réelle» à la «représentation complexe» s'effectue par la transformation de Stieltjes généralisée et légèrement modifiée (n°. 19), la distribution δ donnant lieu à la fonction $-1/(2\pi i. z)$ et la «formule intégrale de Dirac» étant remplacée par la «formule intégrale de Cauchy». Voilà donc les racines profondes de l'analogie frappante, que nous avions déjà signalée dans [11], entre ces deux formules.

Dans le n°. 21, on étudie les ultra-distributions (tempérées) à support compact. Considérées comme opérateurs de convolution, elles s'identifient à certains opérateurs différentiels d'ordre fini ou infini (ces derniers n'ayant pas de sens en théorie des distributions).

Ensuite, on étudie la transformation de Laplace pour les ultra-distributions tempérées de support limité à gauche (th. 23. 1). Leurs images par $\mathfrak{L}$ forment un sous-espace de $\mathfrak{Z}$. Pour interpréter $\mathfrak{L}^{-1}(\mathfrak{Z})$ on est amené naturellement à élargir $\mathfrak{U}$: *on obtient alors l'espace* $\mathfrak{V}$ *des ultra-distributions de type exponentiel sur* $\mathbf{R}$ *— contenant à la fois* $\mathfrak{U}$ *et* Λ_∞ (ce dernier n'est plus contenu dans l'espace $\mathbf{D}'$ de Ehrenpreis). L'image de $\mathfrak{Z}$ par $\mathfrak{L}^{-1}$ est donc l'espace $\mathfrak{V}_{+}$ des distributions de type exponentiel sur $\mathbf{R}$ et de support limité à gauche (th. 26.1): *voilà donc atteint notre but initial.* Le calcul opérationnel général établi dans [11] et [12] pour $\mathfrak{A}_\omega^{+}$ et $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega^{+}$ s'étend maintenant à $\mathfrak{Z}$ (n°. 27). En particulier, l'opérateur e^{hD}, avec *h complexe quelconque*, est bien la translation τ_h, qui n'a de sens pour les distributions que *si h est réel*; et certains développements en série, défendus en théorie des distributions, deviennent maintenant utilisables. Au n°. 28 on donne une première esquisse d'application de ces méthodes.

Enfin, la transformation de Fourier se prolonge en un automorphisme vectoriel-topologique de $\mathfrak{V}$: ainsi la belle symétrie créée par M. Schwartz avec son espace $\mathfrak{S}'$ est rétablie dans $\mathfrak{V}$, par une sorte de synthèse Fourier-Laplace[2]).

[2]) Tandis que $\mathfrak{U}$ s'identifie au dual de l'espace des fonctions entières à décroissance rapide sur $\mathbf{R}$, $\mathfrak{V}$ peut s'interpréter comme le dual de l'espace des fonctions entières à décroissance sous-exponentielle sur $\mathbf{R}$, qui coïncide avec son image de Fourier.

No. *Tableau des principales notations employées*

1. $\mathfrak{A}_\omega(F)$: — espace des fonctions holomorphes à croissance lente sur un ensemble fermé F.
1. Espaces $(\mathfrak{S}_1)$: — espaces de SCHWARTZ métrisables complets; appelés espaces $(\mathfrak{M}^*)$ dans [10].
1. Espaces $(\mathfrak{S}_2)$: —duals forts des espaces $(\mathfrak{S}_1)$; appelés espaces $(\mathfrak{L}\mathfrak{N}^*)$ dans [10].
3. $\mathfrak{H}_\omega(\complement D)$: espace des fonctions holomorphes à décroissance presque rapide dans tout ensemble $\complement D_k$ (complémentaire de D_k).
5. $\mathfrak{A}_\omega^+$ (resp. $\mathfrak{A}_\omega^-$): — espace des fonctions holomorphes à croissance lente sur des demi-plans droits (resp. gauches).
6. $\Lambda_{+\infty}$ (resp. $\Lambda_{-\infty}$): — espace des distributions du type exponentiel, nulles à gauche (resp. droite) de l'origine.
6, etc. $\mathfrak{L}$: — transformation de LAPLACE.
8. $\mathfrak{A}_\omega^{i+}$ (resp. $\mathfrak{A}_\omega^{i-}$): — image de $\mathfrak{A}_\omega^+$ (resp. $\mathfrak{A}_\omega^-$) par le changement de variable $z \to -iz$.
8. $\mathfrak{A}_\omega = \mathfrak{A}_\omega^+ \times \mathfrak{A}_\omega^-$, $\mathfrak{A}_\omega^i = \mathfrak{A}_\omega^{i+} \times \mathfrak{A}_\omega^{i-}$.
8. Π: — espace des polynômes en z.
8. $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}_\omega^i/\Pi$, espace des ultra-distributions tempérées.
8. $\varkappa$: — application canonique de $\mathfrak{A}_\omega^i$ dans $\mathfrak{U}$ (interprétation analogue pour d'autres espaces).
8. Λ_∞: — espace des distributions du type exponentiel sur $\mathbf{R}$.
8, etc. $\mathfrak{F}$: — transformation de FOURIER.
11. $\mathfrak{U}_f$: — espace des ultra-distributions tempérées de frontière.
15. $\mathfrak{M}_\mathfrak{U}$: — espace des opérateurs de multiplication dans $\mathfrak{U}$.
17. $\mathfrak{C}_\mathfrak{U}$: — espace des opérateurs de convolution dans $\mathfrak{U}$.
21. $\mathfrak{U}_c$: — espace des ultra-distributions tempérées à support compact.
22. $\mathfrak{U}_+$: — espace des ultra-distributions tempérées de support limité à gauche.
23. $\mathfrak{Z}_0$: — image de LAPLACE de $\mathfrak{U}_+$.
24. $\mathfrak{Z}$: — limite inductive des espaces $\tau_k \mathfrak{Z}_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
25. $\mathfrak{E}_\omega$: — espace des fonctions holomorphes dans des ensembles $|\mathfrak{I} z| > k$, à croissance lente sur les verticales et du type exponentiel sur les horizontales.
25. $\mathfrak{N}$: — espace des fonctions entières du type exponentiel sur les horizontales et à croissance lente sur les verticales.
25. $\mathfrak{V} = \mathfrak{E}_\omega/\mathfrak{N}$, espace des ultra-distributions du type exponentiel sur $\mathbf{R}$.
25. $\mathfrak{V}_f$: — espace des ultra-distributions $\Phi \in \mathfrak{V}$ de frontière.
26. $\mathfrak{V}_+$: — espace des ultra-distributions du type exponentiel sur $\mathbf{R}$ et de support limité à gauche, image de $\mathfrak{Z}$ par $\mathfrak{L}^{-1}$.

Tous les espaces vectoriels ici considérés seront des espaces vectoriels sur le corps complexe.

1. L'espace $\mathfrak{A}_\omega(F)$ des fonctions holomorphes à croissance lente sur un ensemble fermé[3])

Soit F un vrai sous-ensemble, fermé et non vide, du plan $\mathbf{C}$ de la variable complexe. Pour tout $k = 1, 2, \ldots$ nous désignerons par F_k l'ensemble des points de $\mathbf{C}$ dont la distance à F est $\leq 1/k$ et par $\dot{F}_k$ sa frontière. Cela étant, nous désignerons par $\mathfrak{A}_k(F)$ l'espace des fonctions complexes, $\varphi(z)$, définies et continues sur F_k, holomorphes à l'intérieur de F_k et telles que le quotient de $\varphi(z)$ par $(1 + |z|)^k$ soit borné sur F_k; nous considérons $\mathfrak{A}_k(F)$ muni des notions de somme et de produit par scalaires et d'une topologie, $\mathfrak{T}_k$, au moyen de la norme suivante

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \frac{|\varphi(z)|}{(1 + |z|)^k} .$$

On voit aussitôt que l'application $\varphi(z) \to (1 + |z|)^{-k} \varphi(z)$ est alors un isomorphisme bicontinu de $\mathfrak{A}_k(F)$ sur un sous-espace fermé de l'espace (de Banach) des fonctions continues bornées sur F_k. D'autre part, si, pour tout k, on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_k(F)$ à la fonction $\bar{\varphi} \in \mathfrak{A}_{k+1}(F)$ qui est la restriction de φ à F_{k+1}, on voit, à peu près comme dans [11], p. 109, que:

Pour tout k, l'application canonique de $\mathfrak{A}_k(F)$ dans $\mathfrak{A}_{k+1}(F)$ est totalement continue [c.a.d. transforme toute partie bornée de $\mathfrak{A}_k(F)$ en une partie relativement compacte de $\mathfrak{A}_{k+1}(F)$].

Il s'ensuit que la limite inductive de la suite d'espaces normés $\mathfrak{A}_k(F)$ est un espace $(\mathfrak{L}\,\mathfrak{N}^*)$, d'après les définitions que nous avons introduites dans [10]. *Désormais nous appellerons «espaces du type $(\mathfrak{S}_1)$» les espaces de* Schwartz *métrisables complets, d'après* Grothendieck [3], *et «espaces du type $(\mathfrak{S}_2)$» leurs duals forts, qui coïncident avec nos espaces $(\mathfrak{L}\,\mathfrak{N}^*)$*[4]).

Nous désignerons par $\mathfrak{A}_\omega(F)$ la limite inductive des espaces $\mathfrak{A}_k(F)$ et par $\mathfrak{T}_\omega$ la topologie de $\mathfrak{A}_\omega(F)$. Puisque chaque élément de $\mathfrak{A}_\omega(F)$ se représente par une fonction $\varphi(z)$ appartenant à l'un des espaces $\mathfrak{A}_k(F)$, nous apellerons encore fonctions les éléments de $\mathfrak{A}_\omega(F)$, qui, en réalité, ne sont que des classes d'équivalence de fonctions.

2. Les espaces $\mathfrak{A}_\omega(D)$

Par la suite nous nous limiterons au cas où F est l'intersection ou la réunion de deux demi-plans fermés à frontières parallèles; dans ce cas, nous désignerons l'ensemble F par D. En particulier, D peut être un demi-plan; alors, pour tout k, D_k est un demi-plan contenant D, et sa frontière, $\dot{D}_k$, est une droite située à la distance $1/k$ de D. Il se peut encore que D soit une bande ou une droite; alors D_k est la bande fermée determinée par les deux droites (dont la réunion est $\dot{D}_k$) situées à la distance $1/k$ de D. Enfin, D peut être le complémentaire d'une bande ouverte; alors les D_k sont des ensembles de même type ou le plan $\mathbf{C}$.

---

[3]) Le lecteur qui connaisse déjà nos travaux [11] et [12] peut se borner ici à une lecture rapide des n$^{\text{os}}$. 1—7.

[4]) Les espaces $(\mathfrak{S}_1)$ sont les mêmes que nous appelons «espaces $(\mathfrak{M}^*)$» dans [10].

Cela étant, pour tout $k = 1, 2, \ldots$, nous désignerons par $\mathfrak{A}_k^*(D)$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{A}_k(D)$ tels que $(1 + |z|)\ \varphi(z)$ soit une fonction de z bornée sur D_k et nous poserons $\mathfrak{A}_\infty^*(D) = \bigcup\limits_0^\infty \mathfrak{A}_k^*(D)$. On démontre comme dans [11], p. 111, que:

Proposition 2.1. *L'ensemble* $\mathfrak{A}_\infty^*(D)$ *est dense dans* $\mathfrak{A}_\omega(D)$.

D'autre part, si l'on considère la frontière de D_k *orientée de façon à laisser à gauche les points de D*, on voit aussitôt que

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{D}_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda ,$$

pour tout $z \in D_{k+1}$ et toute $\varphi \in \mathfrak{A}_k^*(D)$.

Nous désignerons par $\mathfrak{h}$ l'application $\lambda \to (\lambda - z)^{-1}$ de $\complement D$ dans $\mathfrak{A}_\omega(D)$, c'est-à-dire, nous poserons

$$\mathfrak{h}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \hat{z}}, \qquad \text{pour tout } \lambda \in \complement D ,$$

où le signe $\hat{}$ sert à indiquer que z est une variable muette.

On démontre, à peu près comme dans [11], p. 112—113, les deux propositions suivantes:

Proposition 2.2. *La fonction vectorielle* $\mathfrak{h}(\lambda)$ *est holomorphe dans* $\complement D$, *par rapport à* $\mathfrak{T}_\omega$.

Proposition 2.3. *La fonction* $\lambda\, \mathfrak{h}(\lambda)$ *de* λ *est bornée sur* $\complement D_k$, *par rapport à* $\mathfrak{T}_\omega$, *pour* $k = 1, 2, \ldots$

Pour démontrer la prop. 2.3 il est commode de se ramener au cas où D ne contient pas l'origine et sa frontière est verticale, au moyen d'un déplacement $z \to \alpha z + \beta$ (avec $|\alpha| = 1$), qui détermine, évidemment, une application linéaire continue $\varphi(z) \to \varphi[\alpha^{-1}(z - \beta)]$ de $\mathfrak{A}_\omega(D)$ sur $\mathfrak{A}_\omega(\alpha D + \beta)$.

Maintenant, il est aisé de voir que l'on a, pour tout k et toute $\varphi \in \mathfrak{A}_k^*(D)$, la *formule de représentation*

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{D}_k} \mathfrak{h}(\lambda)\ \varphi(\lambda)\, d\lambda , \qquad \text{par rapport à } \mathfrak{T}_\omega ,$$

que l'on peut étendre à tout élément φ de $\mathfrak{A}_k(D)$, avec k arbitraire, en posant, par définition:

$$\int_{\dot{D}_k} \mathfrak{h}(\lambda)\ \varphi(\lambda)\, d\lambda = \lim_{\zeta \to \varphi} \int_{\dot{D}_k} \mathfrak{h}(\lambda)\ \varphi(\lambda)\, d\lambda , \quad \text{avec} \quad \zeta \in \mathfrak{A}_k^*(D) .$$

3. Applications linéaires continues de $\mathfrak{A}_\omega(D)$ dans un espace localement convexe

Soit encore D un ensemble du type indiqué au n°. 2 et soit $\mathbf{E}$ un espace localement convexe, complet pour les suites

Définition 3.1. Nous dirons qu'une fonction $\mathfrak{f}(\lambda)$ à valeurs dans $\mathbf{E}$, définie dans $\complement D$, est à *décroissance presque rapide dans* $\complement D$, si, pour tout k, il existe k

éléments $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ de $\mathbf{E}$ et une partie bornée $\mathbf{L}_k$ de $\mathbf{E}$, tels que

$$\mathfrak{f}(\lambda) \in \frac{\mathbf{a}_1}{\lambda} + \cdots + \frac{\mathbf{a}_k}{\lambda^k} + \frac{\mathbf{L}_k}{\lambda^{k+1}}, \qquad \text{pour tout } \lambda \in \complement D, \ \lambda \neq 0 .$$

On voit aussitôt que, si cette condition est vérifiée, les éléments $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ sont déterminés par la seule donnée de $\mathfrak{f}(\lambda)$, indépendamment de k, par récurrence:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = \lim\limits_{\lambda \to \infty} [\lambda\, \mathfrak{f}(\lambda)] \\ \mathbf{a}_{j+1} = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \left[\lambda^{j+1} \left(f(\lambda) - \sum\limits_{1}^{j} \frac{a_r}{\lambda^r} \right) \right] \end{cases} \quad \text{sur} \quad \complement D$$

Ces éléments $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \ldots$ de $\mathbf{E}$ seront dits les *coefficients asymptotiques de* $\mathfrak{f}(\lambda)$. Si $\mathbf{a}_k = 0$ pour tout k, nous dirons que $\mathfrak{f}(\lambda)$ est à *décroissance rapide dans* $\complement D$; cela équivaut à dire, évidemment, que la fonction $\lambda^j \mathfrak{f}(\lambda)$ de λ est bornée sur $\complement D$, quel que soit $j = 1, 2, \ldots$

Compte tenu de la prop. 2.3 et de la formule

$$\frac{1}{\lambda - z} = \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2} + \cdots + \frac{z^{k+1}}{\lambda^k} + \frac{z^k}{\lambda^{k+1}} \frac{\lambda}{\lambda - z}, \qquad \text{pour } z \neq \lambda \neq 0,$$

on voit que

Proposition 3.1. *La fonction* $\mathfrak{h}(\lambda) = (\lambda - \hat{z})^{-1}$, *définie dans* $\complement D$ *et à valeurs dans* $\mathfrak{A}_\omega(D)$, *est une fonction à décroissance presque rapide sur* $\complement D_k$, *quel que soit* $k = 1, 2, \ldots$

On peut maintenant établir le théorème suivant, en raisonnant comme dans [11] et [12]:

Théorème 3.1. *Il existe une correspondance biunivoque* $F \leftrightarrow \mathfrak{f}$ *entre les applications linéaires continues* F *de* $\mathfrak{A}_\omega(D)$ *dans* $\mathbf{E}$ *et les fonctions* $\mathfrak{f}(\lambda)$ *de la variable complexe* λ, *à valeurs dans* $\mathbf{E}$, *qui sont holomorphes dans* $\complement D$ *et à décroissance presque rapide sur tout* $\complement D_k$. *Cette correspondance est définie par les formules*

$$\mathfrak{f}(\lambda) = F\left[\frac{1}{\lambda - \hat{z}}\right], \qquad \text{pour } \lambda \in \complement D$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{D}_k} \mathfrak{f}(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda, \qquad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{A}_\omega(D),$$

où k *est tel que* $\varphi \in \mathfrak{A}_k(D)$ *et où l'intégrale est définie par rapport à la topologie* $\mathfrak{T}_\omega$ *de* $\mathfrak{A}_\omega(D)$, *d'après la convention:*

$$\int_{\dot{D}_k} \mathfrak{f}(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda = \lim_{\zeta \to \varphi} \int_{\dot{D}_k} \mathfrak{f}(\lambda) \zeta(\lambda)\, d\lambda, \quad \textit{avec} \quad \zeta \in \mathfrak{A}_k^*(D),$$

en considérant la frontière $\dot{D}_k$ *orientée de façon à laisser à gauche les points de* D.

(Pour la démonstration, il sera encore commode de se ramener au cas où D ne contient pas l'origine).

La fonction $\mathfrak{f}(\lambda) = F[\mathfrak{h}(\lambda)]$ est nommée l'*indicatrice* de F.

En particulier on voit ainsi que:

L'espace dual, $\mathfrak{A}'_\omega(D)$, *de* $\mathfrak{A}_\omega(D)$ *est isomorphe (algébriquement) à l'espace des fonctions complexes* $f(\lambda)$, *holomorphes et à décroissance presque rapide dans les ensembles* $\complement D_k$; *nous désignerons par* $\mathfrak{H}_\omega(\complement D)$ *cet espace.*

On peut rendre bicontinu l'isomorphisme entre $\mathfrak{A}'_\omega(D)$ et $\mathfrak{H}_\omega(\complement D)$ par rapport à la topologie forte de $\mathfrak{A}'(D)$, en munissant $\mathfrak{H}_\omega(\complement D)$ d'une topologie convenable, définie au moyen des coefficients asymptotiques des fonctions appartenant à cet espace. Alors on peut identifier $\mathfrak{A}'_\omega(D)$ à $\mathfrak{H}_\omega(\complement D)$.

Il faut remarquer que, du th. 3.1., on déduit les propositions suivantes:

Corollaire 1. *Si $\mathfrak{f}(\lambda)$ est holomorphe dans $\complement D$ et à décroissance presque rapide sur tout $\complement D_k$, les coefficients asymptotiques de $\mathfrak{f}(\lambda)$ sont les mêmes pour tout k.*

Corollaire 2. *Si $\mathfrak{f}(\lambda)$ est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathfrak{A}_\omega(D)$ dans* **E**, *alors $\mathfrak{f}'(\lambda)$ est encore l'indicatrice d'une telle application.*

Corollaire 3. *Si $\mathfrak{f}(\lambda)$ est l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\mathfrak{A}_\omega(D)$ dans* **E**, *alors pour tout $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ et tout k, il existe k éléments $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ de* **E** *et un borné $\mathbf{L}_k$ de* **E**, *tels que*

$$\mathfrak{f}(\lambda) \in \frac{\mathbf{c}_1}{\lambda - \lambda_0} + \cdots + \frac{\mathbf{c}_k}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \frac{\mathbf{L}_k}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}, \qquad \text{pour } \lambda \in \complement D_k .$$

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que $\mathfrak{h}(\lambda)$ possède les mêmes propriétés.

4. Décomposition canonique de $\mathfrak{A}_\omega(D)$ dans le cas où D est une droite

Supposons maintenant que D est une droite. Alors le complémentaire de D est la réunion de deux demi-plans *ouverts*, que nous désignerons par D^1 et D^2.

Nous avons vu que le dual de $\mathfrak{A}_\omega(D)$ est constitué par les fonctions $f(\lambda)$ holomorphes et à décroissance presque rapide sur tout $\complement D_k$. Si l'on désigne par f_1 et f_2 les restrictions de f à D^1 et D^2 respectivement, il est évident que f_1 (resp. f_2) est une fonction holomorphe dans D^1 (resp. D^2) et à décroissance presque rapide sur le complémentaire de tout D_k^2 (resp. D_k^1); et que, en outre, *ces deux fonctions f_1 et f_2 ont la même suite de coefficients asymptotiques*. La réciproque est aussi évidente: *tout couple (f_1, f_2) de fonctions holomorphes dans D^1 et D^2, respectivement, vérifiant ces conditions, définit une fonction holomorphe à décroissance presque rapide dans le complémentaire de tout D_k.* Il s'ensuit que:

— *l'espace $\mathfrak{A}'_\omega(D)$ est isomorphe (algébriquement) au sous-espace de $\mathfrak{H}_\omega(D^1) \times \times \mathfrak{H}_\omega(D^2)$ formé par les couples (f_1, f_2) de fonctions ayant la même suite de coefficients asymptotiques dans D^1 et D^2.*

Il est aisé de voir, d'ailleurs, que cet isomorphisme est topologique. Et, comme $\mathfrak{A}_\omega(D)$ est réflexif [5]), ainsi que $\mathfrak{A}_\omega(\overline{D}^1)$ et $\mathfrak{A}_\omega(\overline{D}^2)$, il en résulte que *$\mathfrak{A}_\omega(D)$ est isomorphe au quotient de $\mathfrak{A}_\omega(\overline{D}^1) \times \mathfrak{A}_\omega(\overline{D}^2)$ par le sous-espace de ce produit orthogonal à $\mathfrak{A}'_\omega(D)$.*

Pour préciser ce résulat, considérons une fonctionnelle linéaire continue Φ, quelconque, sur $\mathfrak{H}_\omega(\complement D) \cong \mathfrak{A}'_\omega(D)$. Il existe alors un entier k et deux fonctions

[5]) Puisqu'il s'agit d'espaces du type $(\mathfrak{S}_2)$ (voir n°. 1 et [10]).

$\varphi_1 \in \mathfrak{A}_k(\bar{D}^1), \varphi_2 \in \mathfrak{A}_k(\bar{D}^2)$, tels que

$$\Phi(f) = \int_{\dot{D}_k^1} \varphi_1(\lambda)\, f_2(\lambda)\, d\lambda + \int_{\dot{D}_k^2} \varphi_2(\lambda)\, f_1(\lambda)\, d\lambda\,,$$

pour toute fonction $f = (f_1, f_2) \in \mathfrak{H}_\omega(D^1) \times \mathfrak{H}_\omega(D^2)$.

On aura donc

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\dot{D}_k} [\varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)]\, f(\lambda)\, d\lambda\,,$$

ce qui montre que $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ est la fonction indicatrice de Φ. Pour essayer de déterminer φ_1, supposons, pour fixer les idées, que D_k^1 ne contient pas l'origine (dans le cas général, on peut remplacer l'origine par un point quelconque, en tenant compte du corollaire 3 du th. 3.1). Alors, si l'on rappelle que

$$\frac{1}{\lambda - z} = \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2} + \cdots + \frac{z^k}{\lambda^{k+1}} + \frac{z^k}{\lambda^{k+1}(z-\lambda)}\,,$$

pour $\lambda \neq z$, on voit aisément que, pour tout $z \in D_k^1$:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\dot{D}_k^1} \frac{z^k \varphi_1(\lambda)}{\lambda^{k+1}(z-\lambda)}\, d\lambda\,,$$

tandis que, pour les mêmes valeurs de z:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\dot{D}_k^1} \frac{z^k \varphi_2(\lambda)}{\lambda^{k+1}(z-\lambda)}\, d\lambda = -\sum_{r=0}^{k} \frac{z^r}{r!}\, \varphi_2^{(r)}(0)\,.$$

Et, comme $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, on aura donc, pour $z \in D_k^1$:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\dot{D}_k^1} \frac{z^k \varphi(\lambda)}{\lambda^{k+1}(z-\lambda)}\, d\lambda + \sum_{r=0}^{k} \frac{z^r}{r!}\, \varphi_2^{(r)}(0)\,, \tag{4.1}$$

ce qui permet de déterminer φ_2 (et par suite φ_1), à partir de φ, *à moins d'un polynôme*. Alors, si l'on pose $\varphi^+ = \varphi_1$, $\varphi^- = -\varphi_2$, on conclut:

Théorème 4.1. *Tout élément φ de $\mathfrak{A}_\omega(D)$ est de la forme $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, avec $\varphi^+ \in \mathfrak{A}_\omega(\bar{D}^1)$, $\varphi^- \in \mathfrak{A}_\omega(\bar{D}^2)$, où φ^+ et φ^- sont déterminées à un même polynôme arbitraire près.*

On verra par la suite l'avantage de mettre φ sous la forme d'une différence, plutôt que sous la forme d'une somme.

5. Les espaces $\mathfrak{A}_\omega^+$, $\mathfrak{A}_\omega^-$ et $\mathfrak{A}_\omega$

Pour tout nombre réel α, nous désignerons par V_α la droite verticale $\Re z = \alpha$, par V_α^+ [resp. V_α^-] le demi-plan $\Re z \geq \alpha$ [resp. $\Re z \leq \alpha$] et par $\mathfrak{A}_\alpha^+$ [resp. $\mathfrak{A}_\alpha^-$] l'espace de Banach des fonctions $\varphi(z)$ holomorphes à l'intérieur de V_α^+ (resp. V_α^-) et telles que le quotient de $\varphi(z)$ par $(1+|z|)^{|\alpha|}$ se prolonge comme fonction continue bornée à V_α^+ (resp. V_α^-).

La limite inductive des espaces normés $\mathfrak{A}_\alpha^+$ pour $\alpha > 0$ est l'espace des *fonctions holomorphes à croissance lente sur des demi-plans droits*, que nous

avons étudié dans [11] sous la notation $\mathfrak{A}_\omega$ et que nous désignerons maintenant par $\mathfrak{A}_\omega^+$. Il est aisé de voir que $\mathfrak{A}_\omega^+$ est aussi la limite inductive des espaces localement convexes $\mathfrak{A}_\omega(V_\alpha^+)$.

D'autre part, nous désignerons par $\mathfrak{A}_\omega^-$ l'espace image de $\mathfrak{A}_\omega^+$ par la symétrie $z \to -z$ et nous noterons $\mathfrak{A}_\omega$ l'espace $\mathfrak{A}_\omega^+ \times \mathfrak{A}_\omega^-$. On peut encore considérer, plus généralement, les espaces images de $\mathfrak{A}_\omega^+$ et $\mathfrak{A}_\omega^-$ par des rotations quelconques.

Il va sans dire que le th. 3.1 et ses conséquences s'étendent, d'une façon naturelle, à ces nouveaux espaces. D'ailleurs, le th. 1 établi dans [11] et [12] n'en est qu'un cas particulier.

6. La transformation unilatérale de Laplace

D'après ce que nous avons vu dans [11], la formule

$$\mathfrak{R}\,\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-\infty i}^{\alpha+\infty i} e^{\hat{i}\lambda}\,\varphi(\lambda)\,d\lambda, \tag{6.1}$$

pour $\varphi \in \mathfrak{A}_\alpha^+$, $\alpha \in \mathbf{R}^+$, définit une application linéaire continue $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{A}_\omega^+$ dans l'espace $\mathfrak{C}_\pi^+$ des ***distributions de support limité à gauche***. L'image de $\mathfrak{A}_\omega^+$ par $\mathfrak{R}$ est précisément l'espace que nous avons représenté dans [11] par $\mathfrak{F}_\omega$ et que nous désignerons maintenant par $\Lambda_{+\infty}$, constitué par les distributions Φ du type

$$\Phi = D_t^k\,[e^{k\,t}F(t)]\,,$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots$ et F est une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$, nulle pour $t < 0$; cet espace étant muni de la topologie de la limite inductive de ses sous-espaces normés par $\|\Phi\|_k = \sup\limits_{t\in\mathbf{R}} |F(t)|$. Nous savons, en outre, que $\mathfrak{R}$ est une application biunivoque de $\mathfrak{A}_\omega^+$ sur $\Lambda_{+\infty}$ et que son inverse est la transformation Laplace (encore continue) donnée par

$$\mathfrak{L}\,\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\hat{z}\,t}\,\Phi_t\,dt\,. \tag{6.2}$$

Évidemment, la restriction de $\mathfrak{R}$ à chaque espace $\mathfrak{A}_\omega(V_\alpha^+)$ est encore continue et l'image de cet espace par $\mathfrak{R}$ est formée par les distributions Φ du type

$$\Phi = D_t^k\,[e^{\beta\,t}F(t)]$$

avec $\beta < \alpha$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ et F fonction continue bornée, nulle pour $t < 0$.

Observons enfin que la formule (6.1), pour $\varphi \in \mathfrak{A}_\alpha^-$ et α parcourant $\mathbf{R}^-$, définit une application linéaire bicontinue $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{A}_\omega^-$ sur l'espace image de $\Lambda_{+\infty}$ par la symétrie $t \to -t$, espace que nous désignerons par $\Lambda_{-\infty}$. L'inverse de cette application est encore la transformation de Laplace (relative à ce dernier espace), donnée par (6.2).

7. La transformation bilatérale de Laplace

Nous désignerons par $\mathfrak{C}_b$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbf{R}$ avec sa norme usuelle:

$$\|f\| = \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|\,;$$

et par Λ_0 l'espace des distributions T de la forme

$$T = D_t^k \left[e^{-\frac{|t|}{k}} F(t) \right],$$

où $k=1,2,\ldots$ et $F \in \mathfrak{C}_b$, muni de la topologie de la limite inductive des espaces images de l'espace normé $\mathfrak{C}_b$ par ces applications $F \to T$. Plus généralement, nous désignerons par Λ_α, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, l'image de Λ_0 par la transformation $T \to e^{\alpha t}\, T$. Et nous noterons Λ_α^+ (resp. Λ_α^-) le sous-espace de Λ_α constitué par les distributions $T \in \Lambda_\alpha$ qui sont nulles à gauche (resp. à droite) de l'origine. On voit aussitôt que

Proposition 7.1. *Tout élément T de Λ_α peut se mettre sous la forme $T = T^+ - T^-$, avec $T^+ \in \Lambda_\alpha^+$, $T^- \in \Lambda_\alpha^-$, où T^+ et T^- sont déterminées à une même combinaison linéaire arbitraire de dérivées de δ près.*

Alors, si l'on pose

$$\mathfrak{L}T = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\hat{z}u}\, T_u\, du\,,$$

on voit aisément, à l'aide de la prop. 7.1 et du th. 4.1, que cette formule définit une application linéaire continue $\mathfrak{L}$ de Λ_α sur $\mathfrak{A}_\omega(V_\alpha)$, telle que $\mathfrak{L}(DT) = \hat{z}(\mathfrak{L}T)$ et $\mathfrak{L}\delta = 1$, et que, pour cette raison, nous nommerons encore *transformation (bilatérale)* de LAPLACE.

8. L'espace des ultra-distributions tempérées

L'espace des distributions *tempérées*, ou *à croissance lente*, a été défini par M. SCHWARTZ comme le dual fort, $\mathfrak{S}'$, de l'espace $\mathfrak{S}$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide. Il peut être défini directement comme l'espace des distributions T de la forme

$$T = D_x^k\, (1 + x^2)^k f(x)\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

où $f \in \mathfrak{C}_b$ (fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$), avec la topologie de la limite inductive des espaces images de l'espace normé $\mathfrak{C}_b$ par ces applications $f \to T$ (cf. [9], Notes Finales, VI).

Considérons la transformation de FOURIER $\mathfrak{F} : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}'$, sous la forme

$$\mathfrak{F}T = \int_{\mathbf{R}} e^{i\hat{x}y}\, T_y\, dy\,. \tag{8.1}$$

Son inverse $\mathfrak{F}^{-1} : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}'$ est alors donnée par

$$\mathfrak{F}^{-1}S = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\hat{y}}\, S_x\, dx\,.$$

Si l'on remplace dans (8.1.) la variable réelle x par la variable complexe $z = x + i\,y$, la restriction de $\mathfrak{F}$ à $\Lambda_0 \subset \mathfrak{S}'$ s'identifie à la transformation de LAPLACE $\mathfrak{L}$, suivie du changement de variable $z \to -i\,z$.

Il en résulte (cf. n°. 7) que chaque élément φ de $\mathfrak{A}_\omega(\mathbf{R})$ admet une représentation (unique) du type

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{z}y}\, T_y\, dy\,, \qquad \text{avec } T \in \Lambda_0,$$

T étant l'image de $\varphi(i\hat{z})$ par $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}^{-1}$. Cette intégrale joue, par rapport aux

fonctions $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega(\mathbf{R})$, un rôle tout à fait analogue à celui des séries de LAURENT pour les fonctions holomorphes sur le cercle, considérées par M. KÖTHE dans sa théorie des «Randverteilungen» [4]. Désignons par $\mathbf{R}_+$ (resp. $\mathbf{R}_-$) le demi-plan supérieur $\mathfrak{I} z \geqq 0$ (resp. inférieur $\mathfrak{I} z \leqq 0$). D'après le th. 4.1, la fonction φ ci-haut considérée peut se mettre sous la forme

$$\varphi = \varphi^+ - \varphi^-, \quad \text{avec } \varphi^+ \in \mathfrak{A}_\omega(\mathbf{R}_+),\ \varphi \in \mathfrak{A}_\omega(\mathbf{R}_-),$$

où φ^+, φ^- sont déterminées à un même polynôme arbitraire près. A ces fonctions φ^+, φ^- correspondent deux distributions $T^+ \in \Lambda_0^+$, $T^- \in \Lambda_0^-$, telles que $T = T^+ - T^-$, avec

$$\varphi^+ = \int_0^{+\infty} e^{i\hat{x}y}\, T_y^+ dy, \quad \varphi^- = \int_{-\infty}^{0} e^{i\hat{x}y}\, T_y^- dy,$$

c'est-à-dire $\varphi^+ = \mathfrak{F} T^+$, $\varphi^- = \mathfrak{F} T^-$. Donc φ^+ et φ^- remplacent, dans le cas présent, les fonctions holomorphes représentées, à l'intérieur et au dehors du cercle, par les deux parties de la série de LAURENT, dans le cas classique.

Toutes ces considérations nous suggèrent une extension naturelle de l'espace $\mathfrak{S}'$. Nous désignerons par Λ_∞ l'espace des distributions T *du type exponentiel*, c'est-à-dire, tels que

$$T = D_x^k [e^{k|x|} f(x)],$$

où $k = 0, 1, \ldots$, $f \in \mathfrak{C}_b$, et nous le considérons muni de la topologie de la limite inductive des espaces images de l'espace normé $\mathfrak{C}_b$ par ces applications $f \to T$. On voit aussitôt que $\Lambda_{+\infty}$ et $\Lambda_{-\infty}$ sont des sous-espaces fermés de Λ_∞ et que tout élément T de Λ_∞ est de la forme $T = T^+ - T^-$, avec $T^+ \in \Lambda_{+\infty}$, $T^- \in \Lambda_{-\infty}$, ces termes T^+ et T^- étant déterminés à une même combinaison linéaire de dérivées de δ près.

Il est aisé de voir que Λ_∞ est un espace du type $(\mathfrak{S}_2)$, ainsi que ces sous-espaces $\Lambda_{+\infty}$, $\Lambda_{-\infty}$.

Il est encore évident que

Proposition 8.1. *L'espace $\mathfrak{S}'$ des distributions tempérées est un sous-espace vectoriel de Λ_∞ et l'injection canonique $\mathfrak{S}' \to \Lambda_\infty$ est continue.*

Enfin, il est aisé de voir que la formule intégrale de DIRAC subsiste pour l'espace Λ_∞ (donc aussi pour $\Lambda_{+\infty}$ et $\Lambda_{-\infty}$), c'est-à-dire, on a

$$T = \int_{\mathbf{R}} \delta(\hat{x} - u)\, T_u du, \qquad \text{pour tout } T \in \Lambda_\infty,$$

par rapport à la topologie de cet espace. Et puisque $\delta(\hat{x} - u) \in \mathfrak{S}'$ pour tout $u \in \mathbf{R}$, il en résulte que

Proposition 8.2. *L'espace $\mathfrak{S}'$ est dense dans Λ_∞.*

Cela posé, nous désignerons par $\mathfrak{A}_\omega^{i+}$, $\mathfrak{A}_\omega^{i-}$ et $\mathfrak{A}_\omega^{i}$ respectivement, les images de $\mathfrak{A}_\omega^+$, $\mathfrak{A}_\omega^-$ et $\mathfrak{A}_\omega$ par le changement de variable $z \to -iz$. Donc, les éléments de $\mathfrak{A}_\omega^{i+}$ (resp. $\mathfrak{A}_\omega^{i-}$) sont les fonctions $\varphi(z)$ chacune étant holomorphe et à croissance lente dans un demi-plan supérieur $\mathfrak{I} z > \alpha$ (resp. inférieur $\mathfrak{I} z < \alpha$), deux telles fonctions étant identifiées si, et seulement si, elles coïncident dans un de ces demi-plans; et les éléments de $\mathfrak{A}_\omega^{i} = \mathfrak{A}_\omega^{i+} \times \mathfrak{A}_\omega^{i-}$ sont représentés, de façon analogue, par les

fonctions $\varphi(z)$, holomorphes et à croissance lente dans des ensembles $|\mathfrak{J} z| > \alpha$, complémentaires des bandes horizontales symétriques.

Or la transformation $\mathfrak{F}$ se prolonge (univoquement) en une application linéaire continue de $\Lambda_{+\infty}$ sur $\mathfrak{A}_{\infty}^{i+}$ (resp. de $\Lambda_{-\infty}$ sur $\mathfrak{A}_{\infty}^{i-}$). Cette application, que nous désignerons encore par $\mathfrak{F}$, est évidemment le produit de $\mathfrak{L}$ par la rotation $z \to -iz$.

Observons maintenant que Λ_∞ est isomorphe au quotient de $\Lambda_{+\infty} \times \Lambda_{-\infty}$ par l'espace des combinaisons linéaires de dérivées de δ, et que les images de FOURIER de ces combinaisons linéaires sont les polynômes. Soit alors T un élément quelconque de Λ_∞; si l'on pose

$$T = T^+ - T^-, \quad \text{avec } T^+ \in \Lambda_{+\infty},\ T^- \in \Lambda_{-\infty},$$

et

$$\varphi^+ = \mathfrak{F} T^+, \quad \varphi^- = \mathfrak{F} T^-,$$

on a $(\varphi^+, \varphi^-) \in \mathfrak{A}_\infty^i$, *mais ces deux fonctions sont déterminées, à partir de T, à un même polynôme près.* Rappelons d'ailleurs que le couple (φ^+, φ^-) peut être identifié à une fonction unique, définie et holomorphe dans le complémentaire d'une *bande horizontale* $|\mathfrak{J} z| \leq \alpha$. Donc, si l'on désigne par Π l'espace des polynômes, on trouve le résultat suivant

Théorème 8.1. *La transformation $\mathfrak{F} : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}'$ se prolonge univoquement en une application linéaire continue de Λ_∞ sur l'espace quotient de $\mathfrak{A}_\infty^i$ par Π.*

Dans cet énoncé, on considère, évidemment, chaque distribution tempérée $S = \mathfrak{F}(T)$ (avec $T \in \mathfrak{S}'$) identifiée à l'élément de $\mathfrak{A}_\infty^i/\Pi$ représenté par le couple de fonctions analytiques de z

$$\int_{\mathbf{R}} e^{izy}\, T_y^+\, dy, \quad \int_{\mathbf{R}} e^{izy}\, T_y^-\, dy, \text{ définies resp. pour } \mathfrak{J} z > 0,\ \mathfrak{J} z < 0.$$

Il est alors naturel d'appeler *transformation de* FOURIER *relative à* Λ_∞ ce prolongement unique de $\mathfrak{F}$ dont il est question dans le th. 8.1. et de le désigner encore par $\mathfrak{F}$.

D'autre part, nous poserons

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{A}_\infty^i/\Pi$$

et nous appellerons *ultra-distributions tempérées sur* $\mathbf{R}$ *les éléments de* $\mathfrak{U}$. Cette dénomination est, en partie, justifiée par le théorème suivant:

Théorème 8.2. *L'espace $\mathfrak{S}'$ des distributions tempérées s'identifie à un sous-espace vectoriel dense de $\mathfrak{U}$ et l'injection canonique $\mathfrak{S}' \to \mathfrak{U}$ est continue.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du th. 8.1 et des propositions 8.1. et 8.2.

D'ailleurs il résulte du th. 8.1 que Π est un sous-espace fermé de $\mathfrak{A}_\infty^i$ et que $\mathfrak{U}$ est un espace $(\mathfrak{S}_2)$, puisqu'il en est de même de Λ_∞.

Nous désignerons par $\varkappa$ l'application canonique de $\mathfrak{A}_\infty^i$ sur $\mathfrak{U}$. Donc, si $\varphi \in \mathfrak{A}_\infty^i$, on a

$$\varkappa\, \varphi = \varphi + \Pi.$$

Exemples. — Dans $\mathfrak{S}'$ on a $\mathfrak{F}^{-1}\delta = 1/(2\pi)$. Or on a la décomposition

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} H - \frac{1}{2\pi}(H-1),$$

où H est la fonction de HEAVISIDE, donc $H \in \Lambda_{+\infty}$ et $H - 1 \in \Lambda_{-\infty}$. D'ailleurs, il est aisé de voir que $\mathfrak{F} H$, comme élément de $\mathfrak{A}_\infty^{i+}$, s'identifie à la fonction $-1/(iz)$, $\mathfrak{I} z > 0$, tandis que $\mathfrak{F}(H-1)$, comme élément de $\mathfrak{A}_\infty^{i-}$, s'identifie à $-1/(iz)$, $\mathfrak{I} z < 0$. Il en découle que

$$\delta = -\frac{1}{2\pi i} \varkappa \frac{1}{\hat{z}}.$$

Plus généralement, on voit que

$$\delta(\hat{x} - h) = \frac{1}{2\pi i} \varkappa \frac{1}{h - \hat{z}}, \qquad \text{pour tout } h \in \mathbf{R}. \tag{8.2}$$

D'autre part, il est aisé de voir que, si l'on pose

$$\log^* z = \log |z| + 2\pi i \arg z, \quad \text{avec} \quad -\pi < \arg z < \pi,$$

on a

$$H = -\frac{1}{2\pi i} \varkappa \log^* (-z), \tag{8.3}$$

ce que, d'ailleurs, on vérifie directement à l'aide des considérations que l'on développera plus loin (prop. 10.1).

9. Décomposition canonique des éléments de $\mathfrak{U}$

Observons que les correspondances

$$\varphi_1 \leftrightarrow (\varphi_1, 0), \qquad \varphi_2 \leftrightarrow (0, -\varphi_2)$$

avec $\varphi_1 \in \mathfrak{A}_\infty^{i+}$ et $\varphi_2 \in \mathfrak{A}_\infty^{i-}$, définissent des isomorphismes entre ces deux espaces et deux sous-espaces fermés de $\mathfrak{A}_\infty^{i} = \mathfrak{A}_\infty^{i+} \times \mathfrak{A}_\infty^{i-}$, qui sont, à leur tour, isomorphes à deux sous-espaces de $\mathfrak{U}$, les intersections de ces sous-espaces avec Π se réduisant à l'origine. *Or il sera commode d'identifier par la suite chaque fonction* $\varphi_1 \in \mathfrak{A}_\infty^{i+}$ *à l'élément* $\varkappa(\varphi_1, 0)$ de $\mathfrak{U}$ et chaque fonction $\varphi_2 \in \mathfrak{A}_\infty^{i-}$ à l'élément $\varkappa(0, -\varphi_2)$ de $\mathfrak{U}$, ce qui rend cohérentes les formules qui sont à la base de notre construction:

$$\mathfrak{A}_\infty^{i+} = \mathfrak{F}(\Lambda_{+\infty}), \quad \mathfrak{A}_\infty^{i-} = \mathfrak{F}(\Lambda_{-\infty}).$$

D'ailleurs, nous avons vu que, pour tout élément Φ de $\mathfrak{U}$, il existe une distribution $T \in \Lambda_\infty$ telle que $\Phi = \mathfrak{F} T$, et cela veut dire que, si l'on pose $T = T^+ - T^-$ avec $T^+ \in \Lambda_{+\infty}$, $T^- \in \Lambda_{-\infty}$, et

$$\varphi^+ = \mathfrak{F} T^+, \quad \varphi^- = \mathfrak{F} T^-,$$

Φ est représenté par le couple (φ^+, φ^-), c'est-à-dire, $\Phi = \varkappa(\varphi^+, \varphi^-)$. Alors, puisque nous identifions φ^+ à $\varkappa(\varphi^+, 0)$ et φ^- à $\varkappa(0, -\varphi^-)$, on pourra écrire

$$\Phi = \varkappa(\varphi^+, 0) - \varkappa(0, -\varphi^-) = \varphi^+ - \varphi^-$$

ce qui est d'accord avec le th. 4.1, lorsque $\Phi \in \mathfrak{A}_\infty(\mathbf{R})$ (dans ce cas particulier, $\varphi^+ - \varphi^-$ est bien la différence des deux fonctions au sens usuel). Donc:

Théorème 9.1 *Tout élément* Φ *de* $\mathfrak{U}$ *est représentable sous la forme* $\Phi = \varphi^+ - \varphi^-$, *avec* $\varphi^+ \in \mathfrak{A}_\infty^{i+}$, $\varphi^- \in \mathfrak{A}_\infty^{i-}$, *où les fonctions* φ^+ *et* φ^- *sont déterminées à un même polynôme arbitraire près.*

On pourra donc écrire indifféremment

$$\Phi = \varkappa(\varphi^+, \varphi^-) \quad \text{ou} \quad \Phi = \varphi^+ - \varphi^-$$

et on dira que φ^+ et φ^- sont deux *composantes associées de* Φ, respectivement *supérieure et inférieure.*

10. Approximations frontières des distributions tempérées

Soit S une distribution tempérée. Alors, si l'on a $T = \mathfrak{F}^{-1} S$, $T = T^+ - T^-$, $T^+ \in \Lambda_{+\infty}$, $T^- \in \Lambda_{-\infty}$, les distributions T^+, T^-, et par suite leurs composantes $S^+ = \mathfrak{F} T^+$, $S^- = \mathfrak{F} T^-$ seront aussi des distributions tempérées. Donc:

Proposition 10.1. *Les composantes associées, S^+ et S^-, d'une distribution tempérée, S, sont toujours des distributions tempérées.*

Considérons, par exemple, le cas très simple de la fonction de Heaviside. Nous avons vu (formule 8.8) que l'on a $H = -(2\pi i)^{-1} \varkappa \log^*(-z)$. Donc, H aura pour composantes associées les deux fonctions suivantes, localement sommables sur R:

$$H^+(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \log|x| + \dfrac{1}{2}, & \text{pour } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\pi i} \log|x|, & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

$$H^-(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \log|x| - \dfrac{1}{2}, & \text{pour } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\pi i} \log|x|, & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

On a donc bien $H = H^+ - H^-$.

La prop. 10.1 s'étend à plusieurs autres sous-espaces de $\mathfrak{U}$. Mais on peut encore l'améliorer, en utilisant la définition et le lemme suivants:

Definition 10.1. Soient $S^+ = \mathfrak{F} T^+$ et $S^- = \mathfrak{F} T^-$ deux composantes associées d'une distribution tempérée, S. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous appellerons *approximation frontière* (ε) *de* S^+ (resp. S^-) la fonction de x ainsi définie

$$S_\varepsilon^+(x) = \int_R e^{i(x+\varepsilon i)u}\, T_u^+\, du$$

resp.

$$S_\varepsilon^-(x) = \int_R e^{i(x-\varepsilon i)u}\, T_u^-\, du$$

(les approximations frontières jouent ici le rôle des «approximations concentriques» de M. Köthe dans sa théorie des Randverteilungen).

Lemme — *Soient f^+ et f^- deux composantes associées d'une fonction f, continûment différentiable jusqu'à un ordre $k \geqq 2$ sur* $\mathbf{R}$ *et telles que $x f^{(\nu)}(x)$ soit sommable sur* $\mathbf{R}$, *pour tout $\nu = 1, \ldots, k$. Alors f^+ et f^- sont des fonctions $k-2$ fois continûment différentiables et on a*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} D^\nu f_\varepsilon^+(x) &= D^\nu f^+(x) \\ \lim_{\varepsilon\to 0} D^\nu f_\varepsilon^-(x) &= D^\nu f^-(x) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\textit{uniformément sur } \mathbf{R}, \\ &\textit{pour } \nu = 0, \ldots, k-2\,. \end{aligned}$$

En effet, d'après l'hypotèse, la fonction $F = \mathfrak{F}^{-1}(f)$ admet dérivée continue sur **R** telle que $x^k F'(x)$ est bornée sur **R**. Alors les fonctions de z

$$z D^\nu f_1(z) = -i^{\nu+1} \int_0^{+\infty} e^{izu} u^\nu F'(u)\, du\,,$$

$$z D^\nu f_2(z) = -i^{\nu+1} \int_0^{-\infty} e^{izu} u^\nu F'(u)\, du$$

pour $\nu = 1, \ldots, k-2$, sont continues et bornées sur les demi-plans fermés $\Im z \geq 0$ et $\Im z \leq 0$, respectivement, et telles que f_1, f_2 forment un couple composantes associées de f. Il en découle que $D^\nu f_1(z)$, $D^\nu f_2(z)$ se prolongent comme fonctions continues s'annulant au point $\infty\, (\nu = 1, \ldots, k-1)$. Cela permet d'arriver aussitôt à la thèse.

Il est maintenant facile d'établir le résultat suivant:

Théorème 10.1. *Soit* **E** *un des espaces* $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}$, $\mathcal{O}_M$, $\mathcal{O}_C$.[6]) *Soient d'autre part* Φ *un élément quelconque de* **E** *et* (φ^+, φ^-) *un couple de composantes associées de* Φ. *Alors les approximations frontières* φ_ε^+ *et* φ_ε^- *de ces composantes convergent resp. vers* φ^+ *et* φ^-, *au sens de la topologie de* **E**, *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

Ce théorème s'étend aussi au cas où $\mathbf{E} = \mathfrak{C}_\omega(\mathbf{R})$. Il suffit d'utiliser le th. 4.1 et la déf. 10.1 en tenant compte de la topologie de $\mathfrak{C}_\omega(\mathbf{R})$.

Enfin, une méthode semblable permet d'étendre ce résultat au cas où $\Phi \in L^p (1 \leq p < \infty)$ et au cas où Φ appartient à l'espace des fonctions localement sommables et tempérées.

11. Représentation intégrale des éléments de $\mathfrak{U}$

Rappelons que, pour toute distribution tempérée T, la transformation $\mathfrak{F}$ de Fourier est donnée par la formule:

$$\mathfrak{F} T = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi u}\, T_u\, du \tag{11.1}$$

où l'intégrale, initialement définie pour le cas où T est, par exemple, une fonction sommable, a été prolongée par continuité à tout $T \in \mathfrak{S}'$. Mais $\mathfrak{S}'$ est dense dans Λ_∞ et nous avons déjà vu que $\mathfrak{F}$ est prolongeable en une application linéaire continue de Λ_∞ sur $\mathfrak{U}$ (th. 8.1). Nous pouvons donc étendre la formule (11.1) au cas où T est une distribution du type exponentiel quelconque. Donc:

Proposition 11.1. *Tout élément* Φ *de* $\mathfrak{U}$ *est représentable sous la forme*

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi u}\, T_u\, du$$

où la distribution $T \in \Lambda_\infty$ *est univoquement déterminé par* Φ *et où l'intégrale (par rapport à* T*) est définie par prolongement continu à* Λ_∞.

Cette représentation intégrale des éléments de $\mathfrak{U}$ est analogue à la représentation des fonctions analytiques sur le cercle par des séries de Laurent, qui

---

[6]) Cf [5], t. II, p. 89—100.

jouent également un rôle essentiel dans la théorie des Randverteilungen de M. KÖTHE. Posons de nouveau

$$T = T^+ - T^-, \text{ avec } T^+ \in \Lambda_{+\infty}, T^- \in \Lambda_{-\infty}.$$

Nous appellerons *ordonnée de convergence* de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{izu}\, T_u^+\, du\,, \qquad \text{resp.} \int_{-\infty}^{0} e^{izu}\, T_u^-\, du$$

la borne inférieure, α^+ (resp. supérieure, α^-) des valeurs de $\mathfrak{J}z$ pour lesquelles cette intégrale, dépendante du nombre complexe z et définie par prolongement continu à $\Lambda_{+\infty}$ (resp. $\Lambda_{-\infty}$) est convergente. It est aisé de voir que ces deux nombres réels α^+ et α^- sont univoquement déterminées par T [donc par $\Phi = \mathfrak{F}^{-1}(T)$]. Nous distinguerons les cas suivants:

1^r *cas.* $\alpha^+ < 0 < \alpha^-$. Les ultra-distributions vérifiant cette condition sont les *fonctions holomorphes à croissance lente sur* $\mathbf{R}$, c'est-à-dire, les éléments de $\mathfrak{A}_\omega(\mathbf{R})$. Dans ce cas, l'intégrale de FOURIER converge sur $\mathbf{R}$ au sens usuel, même au sens de la topologie de $\mathfrak{A}_\omega(\mathbf{R})$.

2^d *cas.* $\alpha^+ \leqq 0 \leqq \alpha^-$. Il est aisé de voir que les ultra-distributions vérifiant cette condition sont celles déterminées par les fonctions holomorphes dans $\mathbf{C}\mathbf{R}$ et à croissance lente dans les complémentaires, H_k, des bandes $|\mathfrak{J}z| < 1/k$, $k = 1,2, \ldots$.

Elles forment donc un espace vectoriel algébriquement isomorphe à l'intersection des espaces

$$\mathfrak{A}_\omega(H_k)/\Pi, \qquad k = 1,2, \ldots.$$

Nous lui donnerons la topologie de la limite projective de ces espaces du type $(\mathfrak{S}_2)$. Nous désignerons par $\mathfrak{U}_f$ l'espace ainsi obtenu et nous dirons que tout élément Φ de $\mathfrak{U}_f$ est *l'ultra-distribution de frontière* de tout couple de composantes associées de Φ (considérées comme fonctions analytiques dans les demi-plans *ouverts* $\mathfrak{J}z > 0$, $\mathfrak{J}z < 0$). La déf. 10.1 et le th. 10.1 s'étendent immédiatement aux éléments de $\mathfrak{U}_f$. D'autre part, il est bien aisé de voir que l'intégrale de FOURIER d'un élément Φ de $\mathfrak{U}_f$ converge vers Φ au sens de la topologie de $\mathfrak{U}_f$. Il est d'ailleurs facile de déterminer l'espace vectoriel topologique $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{U}_f) \supset \mathfrak{S}'$: *il est constitué par les distributions T à croissance sous-exponentielle, c'est-à-dire dont le quotient par $e^{(1+\varepsilon)|x|}$ est borné pour tout* $\varepsilon > 0$. On voit alors que l'injection canonique $\mathfrak{S}' \to \mathfrak{U}_f$ (de même que l'injection $\mathfrak{U}_f \to \mathfrak{U}$) est continue, mais non pas bicontinue. Enfin, il est classique que, si $\Phi \in L^1(\mathbf{R})$, la valeur principale de CAUCHY de l'intégrale de FOURIER qui représente Φ est égale à $^1/_2\ [\Phi(x^+) - \Phi(x^-)]$ en tout point x où les limites latérales $\Phi(x^+)$ et $\Phi(x^-)$ existent.

3^e *cas.* $\alpha^- < 0$ ou $\alpha^+ > 0$. Alors il s'agit de ultra-distributions tempérées qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{U}_f$; dans ce cas on ne peut plus parler de «approximations frontières».

En sortant du cadre des ultra-distributions (tempérées), on pourrait encore envisager le cas où l'on a au moins $\alpha^- = -\infty$ ou $\alpha^+ = +\infty$. Alors

on n'aurait plus de représentation directe au moyen de couples de fonctions holomorphes. C'est ce qu'il arrive, en général, pour les éléments de l'espace $\mathbf{D}'$ de EHRENPREIS [2].

12. Caractérisation des distributions tempérées dans $\mathfrak{U}_f$

Soit S une distribution tempérée sur $\mathbf{R}$ et soient S^+ et S^- deux composantes associées de S. Alors on a aussi $S^+ \in \mathfrak{S}'$, $S^- \in \mathfrak{S}'$ (prop. 10.1) et il sera donc possible de choisir un entier k et deux fonctions f_1, f_2 deux fois continûment dérivables sur $\mathbf{R}$, telles que

$$S^+ = D^k(1 + \hat{x}^2)^k f_1\,, \quad S^- = D^k(1 + \hat{x}^2)^k f_2\,,$$

avec $x^2 f_1^{(\nu)}(x)$ et $x^2 f_2^{(\nu)}(x)$ bornées sur $\mathbf{R}$ ($\nu = 0,1,2$). Dans ces conditions, il est aisé de voir (cf. lemme du n°. 10) que, si l'on pose $F_1 = \mathfrak{F}^{-1} f_1$, $F_2 = \mathfrak{F}^{-1} f_2$ les fonctions de z,

$$\bar{f}_1(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{izu} F_1(u)\,du\,, \quad \bar{f}_2(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{izu} F_2(u)\,du$$

définies dans les demi-plans $\mathfrak{J} z \geq 0$ et $\mathfrak{J} z \leq 0$, respectivement, sont continues et telles que $z\,\bar{f}_1(z)$, $z\,\bar{f}_2(z)$ y sont bornées. Alors on aura, au sens usuel

$$\bar{f}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(u)}{z-u}\,du\,, \quad \bar{f}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(u)}{z-u}\,du$$

pour $\mathfrak{J} z > 0$, $\mathfrak{J} z < 0$, respectivement. Il est d'ailleurs évident que les fonctions de z

$$\varphi_1(z) = D^k(1 + z^2)^k \bar{f}_1^{(k)}(z)\,, \quad \varphi_2(z) = D^k(1 + z^2)^k \bar{f}_2^{(k)}(z)$$

s'identifient aux composantes S^+ et S^-, respectivement. Or les intégrales de CAUCHY de f_1 et f_2 donnent pour $\mathfrak{J} z > 0$ et $\mathfrak{J} z < 0$, respectivement:

$$|\bar{f}_1^{(\nu)}(z)| < \frac{M_\nu}{|\mathfrak{J} z|^{\nu+1}}\,, \quad |\bar{f}_2^{(\nu)}(z)| < \frac{M_\nu}{|\mathfrak{J} z|^{\nu+1}} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, k$$

où les M_ν sont des constantes. Il en resulte que φ_1 et φ_2 vérifient les conditions

$$|\varphi_1(z)| < \frac{L(1 + |z|^2)^k}{|\mathfrak{J} z|^{k+1}}\,, \quad |\varphi_2(z)| < \frac{L(1 + |z|^2)^k}{|\mathfrak{J} z|^{k+1}} \qquad (L, \text{ constante})$$

ce que nous exprimerons en disant que φ_1 et φ_2 *sont à croissance lente dans les demi-plans ouverts* $\mathfrak{J} z > 0$ *et* $\mathfrak{J} z < 0$, *respectivement (vers* ∞ *et vers l'axe réel)*.

Réciproquement, supposons que les composantes associées, φ_1 et φ_2, d'une ultra-distribution $\Phi \in \mathfrak{U}_f$ vérifient ces conditions. Alors si l'on pose en général, dans un voisinage V de $a \in \mathbf{C}$:

$$P_a\,\varphi(z) = \int_a^z \varphi(\lambda)\,d\lambda$$

pour toute fonction φ holomorphe dans V, et encore

$$F_1(z) = P_i^{k+2}\,\varphi_1(z)\,, \quad F_2(z) = P_{-i}^{k+2}\,\varphi_2(z)\,,$$

on voit aisément, par un raisonnement semblable à celui de M. KÖTHE dans [4], p. 28—29, que

$$\lim_{y\to 0^+} F_1(x+iy)\,, \qquad \lim_{y\to 0^-} F_2(x+iy)$$

existent pour tout $x \in \mathbf{R}$ et définissent deux fonctions continues à croissance lente sur $\mathbf{R}$. Donc, les dérivées D^{k+2} de ces fonctions sont des distributions tempérées que l'on identifie aussitôt aux composantes φ_1 et φ_2 de Φ.

En conclusion:

Théorème 12.1. *Pour que deux fonctions $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, holomorphes respectivement dans les demi-plans ouverts $\Im z > 0$ et $\Im z < 0$, soient des composantes associées d'une distribution tempérée S, il faut et il suffit que ces fonctions soient à croissance lente dans ces demi-plans (vers ∞ et vers l'axe réel).*

Remarque. Il est encore aisé de voir que, dans ces conditions, *pour que S soit une distribution réelle, il faut et il suffit que $\varphi_2(\bar z) = -\overline{\varphi_1(z)}$, pour tout z tel que $\Im z > 0$.*

13. Applications linéaires continues de $\mathfrak{U}$ dans un espace localement convexe

Puisque $\mathfrak{U}$ est le quotient de $\mathfrak{A}^i_\omega$ par Π, une application linéaire continue F de $\mathfrak{A}^i_\omega$ dans un espace localement convexe $\mathbf{E}$ détermine une application linéaire continue $\overline{F}$ de $\mathfrak{U}$ dans $\mathbf{E}$ (de façon que $F = \overline{F}\varkappa$), si, et seulement si, l'image de tout polynôme par F est l'élément nul de $\mathbf{E}$. D'autre part, si $\mathbf{E}$ est complet pour les suites, on voit sans peine (voir n°. 5) que les applications linéaires continues de $\mathfrak{A}^i_\omega$ dans $\mathbf{E}$ sont en correspondance biunivoque avec les fonctions entières, $\mathfrak{f}(\lambda)$, à valeurs dans $\mathbf{E}$ et à décroissance presque rapide dans les bandes horizontales $|\Im z| < k$, la correspondance étant établie par les formules

$$F\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_k} \mathfrak{f}(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda, \qquad \mathfrak{f}(\lambda) = F\left(\frac{1}{\lambda - \mathfrak{z}}\right),$$

où Δ_k est la frontière d'une telle bande, dépendante de $\varphi \in \mathfrak{U}$, orientée de façon à laisser à droite l'axe réel. Il reste à caractériser l'indicatrice de façon que l'image de tout polynôme par F soit l'élément nul de $\mathbf{E}$.

A cet effet, observons que, comme $F = \overline{F}\varkappa$, on a

$$\mathfrak{f}(\lambda) = \overline{F}\varkappa\left(\frac{1}{\lambda - \mathfrak{z}}\right)\,.$$

D'autre part on a, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $k = 1,2,3\,\ldots$,

$$\varkappa\left(\frac{1}{\lambda - \mathfrak{z}}\right) = \varkappa\left(\frac{1}{\lambda - \mathfrak{z}} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mathfrak{z}^{\nu-1}}{\lambda^\nu}\right)$$

et puisque, sur les bandes horizontales, on a

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^k \left(\frac{1}{\lambda - \mathfrak{z}} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\mathfrak{z}^{\nu-1}}{\lambda^\nu}\right) = 0$$

au sens de la topologie de $\mathfrak{A}^i_\omega$, on en déduit que *la fonction $\mathfrak{f}(\lambda)$ à valeurs dans* $\mathbf{E}$

doit être à décroissance rapide sur les bandes horizontales (pour que $\overline{F}$ soit une application linéaire continue de $\mathfrak{U}$ dans **E**). En conclusion:

Théorème 13. 1. *Il existe une correspondance biunivoque $\overline{F} \leftrightarrow \mathfrak{f}$ entre les applications linéaires continues $\overline{F}$ de $\mathfrak{U}$ dans* **E** *et les fonctions entières $\mathfrak{f}(\lambda)$ à valeurs dans* **E** *qui sont à décroissance rapide sur les bandes horizontales. Cette correspondance est définie par les formules réciproques*

$$\mathfrak{f}(\lambda) = \overline{F}\varkappa(\lambda - \hat{z})^{-1} \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \in \mathbf{C}$$

$$\overline{F}\Phi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_k} \mathfrak{f}(\lambda)\,\Phi(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_k} \mathfrak{f}(\lambda)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda \tag{13.1}$$

pour tout $\Phi \in \mathfrak{U}$, où φ est telle que $\Phi = \varkappa\varphi$ et où Δ_k est la frontière d'une bande horizontale dépendante de φ, orientée de façon à laisser à droite l'axe réel.

Il en résulte, en particulier, que:

— *le dual fort de $\mathfrak{U}$ est l'espace des fonctions entières à décroissance rapide sur les bandes horizontales* (muni d'une topologie que l'on explicite aisément).

Et, puisque $\mathfrak{U}$ est réflexif [étant du type $(\mathfrak{S}_2)$], on pourrait définir $\mathfrak{U}$ comme le dual fort du susdit espace de fonctions entières, qui est, manifestement, un sous-espace de $\mathfrak{S}$, muni d'une topologie plus fine que celle induite par $\mathfrak{S}$.

Mais, à côté de *la formule d'intégration complexe* (13. 1), on peut établir une *formule d'intégration réelle*, en raisonnant de la façon suivante:

Pour toute distribution tempérée S, on a la formule de Dirac

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\hat{x} - t)\, S_t du\,, \tag{13.1}$$

rapportée à la topologie de $\mathfrak{S}'$. Puisque $\mathfrak{S}'$ est dense dans $\mathfrak{U}$ et qu'il s'agit là de l'application identique $\mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}'$, évidemment continue pour la topologie induite sur $\mathfrak{S}'$ par $\mathfrak{U}$, il en découle que *la formule de* Dirac *est prolongeable à* $\mathfrak{U}$.

Nous avons déjà vu [formule (8.2)] que, pour chaque $t \in \mathbf{R}$, la distribution $\delta(\hat{x} - t)$, comme élément de $\mathfrak{U}$, est déterminée par la fonction $[2\pi i(t - z)]^{-1}$ de z, définie dans $\mathbf{C}\,\mathbf{R}$. La formule de Dirac pourra donc s'écrire aussi

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \varkappa \frac{1}{t - \hat{z}}\,\Phi_t\, dt. \tag{13.2}$$

Par conséquent toute application $\overline{F}$ de $\mathfrak{U}$ dans **E** aura encore l'expression, que l'on déduit de (13.2):

$$\overline{F}\,\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathfrak{f}}(t)\,\Phi_t dt\,, \tag{13.3}$$

où l'intégrale est définie par prolongement continu à $\mathfrak{U}$ et où la fonction $\dot{\mathfrak{f}}(t)$ est définie sur **R** par

$$\dot{\mathfrak{f}}(t) = \overline{F}\,\delta(\hat{x} - t) = \frac{1}{2\pi i}\overline{F}\varkappa\frac{1}{t - \hat{z}} = \frac{1}{2\pi i}F\frac{1}{t - \hat{z}} = \frac{1}{2\pi i}\mathfrak{f}(t).$$

Donc, (13.3) est la *formule d'intégration réelle* que nous cherchions. Dans cette formule, *la deuxième indicatrice*, $\dot{\mathbf{f}}(t)$, *de* $\overline{F}$, *n'est que la restriction à* **R** *de la première indicatrice*, $\mathbf{f}(\lambda)$, divisée par $2\pi i$. En outre, l'ultra-distribution Φ est à envisager ici comme limite de distributions tempérées au sens de la topologie induite par $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{S}'$ (*forme réelle de* Φ), plutôt que comme classe de fonctions analytiques (*forme complexe de* Φ).

Nous allons étudier plusieurs exemples importants des opérateurs linéaires continus définis dans $\mathfrak{U}$.

14. La dérivation

L'opérateur de dérivation D *défini dans* $\mathfrak{S}'$ a pour indicatrice la fonction $\delta'(\hat{x}-t)$ de t. Or on a

$$\delta'(\hat{x}-t) = -\frac{d}{dt}\,\delta(\hat{x}-t) = -\frac{d}{dt}\,\varkappa\,\frac{1}{t-\hat{z}} = -\varkappa\,\frac{1}{(t-\hat{z})^2},$$

puisque $\varkappa$ est une application continue de $\mathfrak{A}^i_\omega$ dans $\mathfrak{U}$. D'autre part, $-(t-\hat{z})^{-2}$ est l'indicatrice de l'opérateur de dérivation D défini dans $\mathfrak{A}^i_\omega$, lequel transforme polynômes en polynômes. Il s'ensuit que:

Théorème 14.1. *L'opérateur de dérivation défini dans* $\mathfrak{S}'$ *se prolonge (univoquement) en une application linéaire continue* $D: \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ *définie par*

$$D\,\Phi = -\int_{\mathbf{R}} \varkappa\,\frac{1}{(t-\hat{z})^2}\,\Phi_t\,dt\,, \quad \textit{pour tout } \Phi \in \mathfrak{U}\,.$$

Cette application vérifie donc la condition

$$D\,\varkappa\,\varphi = \varkappa\,D\varphi\,, \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in \mathfrak{A}^i_\omega\,,$$

c'est-à-dire: *la dérivation dans* $\mathfrak{U}$ *se traduit par la dérivation usuelle dans l'espace fonctionnel analytique* $\mathfrak{A}^i_\omega$.

Par exemple, de la formule (8.2), on déduit

$$\delta^{(n)}(\hat{x}-h) = \frac{n!}{2\pi i}\,\varkappa\,\frac{1}{(h-\hat{z})^{n+1}}\,, \quad \text{pour } n = 1,2\,\ldots$$

Théorème 14.2. *Pour toute ultra-distribution* $\Phi \in \mathfrak{U}$, *il existe une autre* $\Psi \in \mathfrak{U}$, *telle que* $\Phi = D\Psi$. *En outre, l'égalité* $D\Psi_1 = D\Psi_2$ *entraîne que* $\Psi_1 - \Psi_2$ *est une fonction constante sur* **R**.

Pour la démonstration, remarquons que, si φ^+ et φ^- sont deux composantes associées de Φ, il existe toujours deux primitives ψ^+ et ψ^-, au sens usuel, de ces fonctions holomorphes, et toute primitive de (φ^+, φ^-) est de la forme $(\psi^+ + C_1, \psi^- + C_2)$, où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires. Or tout élément de $\mathfrak{A}^i_\omega$ du type (C_1, C_2) définit, précisément, la fonction $C_1 - C_2$, constante sur **R**.

15. Le produit multiplicatif

Soit α un élément de $\mathcal{O}_M$, c'est-à-dire, une fonction indéfiniment dérivable à croissance lente sur **R** (cf. [5], th. 2, p. 99—100). Alors on définit le produit $\alpha\,S$ de α par une distribution tempérée S quelconque et on voit que $S \to \alpha\,S$

est une application linéaire continue de $\mathfrak{S}'$ dans $\mathfrak{S}'$, dont l'indicatrice (réelle) est la fonction de t

$$\alpha(\hat{x})\,\delta(\hat{x}-t)=\alpha(t)\,\delta(\hat{x}-t)=\frac{1}{2\pi i}\varkappa\frac{\alpha(t)}{t-\hat{z}}.$$

Maintenant, on voit sans peine que

Proposition 15.1. *Pour que l'application $S\to\alpha\,S$ soit prolongeable en une application linéaire continue de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{U}$, il suffit que $\alpha(x)$ soit prolongeable à* $\mathbf{C}$ *comme fonction entière à croissance lente sur les bandes horizontales*[7]).

L'image de chaque ultra-distribution $\Phi\in\mathfrak{U}$, par cette application, sera dite encore le produit (multiplicatif) de α par Φ et représentée par $\alpha\,\Phi$. On aura donc

$$\alpha\,\Phi=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha(t)}{t-\hat{z}}\cdot\Phi_t\,dt$$

$$=\varkappa\frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_k}\frac{\alpha(\lambda)\,\varphi(\lambda)}{\lambda-\hat{z}}\,d\lambda\qquad(|\Im z|>k)$$

où φ est un élément de $\mathfrak{A}^{i}_{\omega}$ tel que $\Phi=\varkappa\,\varphi$ et Δ_k la frontière, dûment orientée d'une bande $|\Im\lambda|\leqq k$ dépendante de φ.

Nous désignerons par $\mathfrak{M}_{\mathfrak{U}}$ l'espace localement convexe des fonctions entières α à croissance lente sur les bandes horizontales, considéré comme limite projective des espaces $\mathfrak{A}_{\omega}(B_k)$ où B_k est la bande $|\Im z|\leqq k$.

Il est aisé de voir que *toutes les propriétés usuelles de la multiplication d'une fonction par une distribution, et, en particulier, la règle de la dérivation du produit, sont conservées dans cette généralisation.*

Si α est à croissance lente dans tout le plan $\mathbf{C}$, alors on aura, évidemment

$$\alpha\,\Phi=\varkappa(\alpha\,\Phi),$$

c'est-à-dire

$$\alpha(\varkappa\,\varphi)=\varkappa(\alpha\,\varphi).$$

Mais les seules fonctions entières à croissance lente dans tout le plan sont les fonctions polynômiales. *Donc, seulement dans le cas où $\alpha\in\Pi$, le produit $\alpha\,\Phi$ se traduit par le produit usuel dans $\mathfrak{A}^{i}_{\omega}$.* En particulier on a

$$\hat{z}\,\varkappa\,\varphi=\varkappa\,\hat{z}\,\varphi.$$

16. Les translations

Dans $\mathfrak{S}'$ on définit, pour tout h réel, un opérateur de translation $\tau_h\in L(\mathfrak{S}')$, dont l'indicatrice est

$$\delta(\hat{x}-t-h)=\frac{1}{2\pi i}\varkappa\frac{1}{t+h-\hat{z}}.$$

Maintenant on peut, plus généralement, définir pour tout h *complexe* un opérateur de translation $\tau_h\in L(\mathfrak{U})$, qui prolonge l'opérateur précédent dans

[7]) Nous croyons que cette condition est aussi nécessaire.

le cas où h est réel. Son indicatrice complexe sera, évidemment, la fonction de λ

$$\frac{1}{2\pi i}\varkappa\frac{1}{\lambda+h-\hat{z}}$$

et on voit aussitôt que

$$\tau_h \varkappa\, \varphi = \varkappa\, \tau_h\, \varphi = \varkappa\, \varphi(\hat{z}-h)\,, \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathfrak{U}\,.$$

Il devient alors naturel d'écrire

$$\tau_h\, \Phi = \Phi(\hat{z}-h)$$

et, en particulier $\tau_h \delta = \delta(\hat{z}-h)$, comme dans le cas réel.

Remarque. Pour qu'une distribution tempérée S reste encore dans $\mathfrak{S}'$ après une *translation imaginaire*, il faut, évidemment, que $S \in \mathfrak{A}_\omega(\mathbf{R})$.

17. La convolution

On sait que toute application linéaire continue de l'espace $\mathfrak{S}'$ dans lui-même, permutant avec la dérivation (ou, ce qui revient au même, avec les translations), est de la forme

$$\tilde{T}(S) = \int_{\mathbf{R}} T(\hat{x}-t)\, S(t)\, dt\,,$$

où T est une distribution à décroissance rapide ($T \in \mathfrak{O}_C$); et réciproquement. On écrit alors

$$\tilde{T}(S) = T * S$$

et on dit que $T * S$ est la *convolution (ou le produit de composition) de T par S.*

Maintenant, il est aisé de voir que

Théorème 17.1. *Il existe une correspondance biunivoque $\tilde{\Theta} \leftrightarrow \Theta$, entre les applications $\tilde{\Theta} \in L(\mathfrak{U})$ qui permutent avec la dérivation* (i.e. *avec les translations) et les ultra-distributions $\Theta = \varkappa\theta$, où θ est une fonction holomorphe à décroissance presque rapide dans, au moins, le complémentaire d'une bande $|\Im z| \leq k$. Cette correspondance est donnée par la formule d'intégration réelle:*

$$\tilde{\Theta}(\Phi) = \int_{\mathbf{R}} \Theta(\hat{z}-t)\, \Phi_t dt\,,$$

ou par la correspondante formule d'intégration complexe:

$$\tilde{\Theta}(\Phi) = \varkappa \int_{\Delta_k} \theta(\hat{z}-\lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda\,,$$

où $\varkappa\,\varphi = \Phi$ et où Δ_k est la frontière, dûment orientée, d'une bande horizontale dépendante de Φ.

Nous écrirons encore

$$\tilde{\Theta}(\Phi) = \Theta * \Phi$$

et nous dirons que $\Theta * \Phi$ est la *convolution de Θ par Φ.*

D'autre part, nous désignerons par $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$ l'espace de ces ultra-distributions Θ, que nous dirons *à décroissance rapide*. L'espace vectoriel $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$ est donc isomorphe à un sous-espace de $L(\mathfrak{U})$. Nous pouvons rendre cet isomorphisme topologique,

par rapport à la topologie de $L_b(\mathfrak{U})$, en donnant à $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$ une topologie de limite projective d'espaces $(\mathfrak{S}_2)$, qu'il est facile d'expliciter, comme celle de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$. Observons encore que, dans ces conditions, le dual de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$ est précisément isomorphe (algébriquement) à l'espace $\mathfrak{M}_{\mathfrak{U}}$ des fonctions entières à croissance lente sur les horizontales.

18. La transformation de Fourier

La transformation de Fourier $\mathfrak{F} : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S}'$ définie par

$$\mathfrak{F} S = \int_{\mathbf{R}} e^{i\hat{z}t} S(t)\, dt$$

est prolongeable en une application linéaire continue $\mathfrak{F} : \mathfrak{U} \to \Lambda_\infty$, d'après la formule généralisée

$$\mathfrak{F}\,\Phi = \int_{\mathbf{R}} e^{i\hat{z}t} \Phi_t\, dt = \int_{\Delta_k} e^{i\hat{z}\lambda} \varphi(\lambda)\, d\lambda\,,$$

où φ est un élément de $\mathfrak{A}^{i}_{\infty}$ tel que $\Phi = \varkappa\,\varphi$ et où Δ_k est la frontière, dûment orientée, d'une bande $|\Im\lambda| \leq k$ dépendante de φ. Cela résulte du fait que la fonction de λ à valeurs dans Λ_∞, $e^{i\hat{z}\lambda}$ (indicatrice de $\mathfrak{F}$) est entière et à décroissance rapide sur les horizontales.

En tenant compte de ce que l'on a dit au n°. 8, on voit aisémment que cette transformation est inversible et que son inverse est donnée par

$$\mathfrak{F}^{-1}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\hat{z}t}\, T_t\, dt\,, \qquad \text{pour } T \in \Lambda_\infty.$$

Cette application $\mathfrak{F}^{-1}$ coïncide donc avec le produit de la transformation de Fourier $\mathfrak{F} : \Lambda_\infty \to \mathfrak{U}$, par $(2\,\pi)^{-1}$ et par la symétrie $z \to -z$.

On établit encore, sans difficulté, que

$$\mathfrak{F}(D\,\Phi) = -\,i\,\hat{x}(\mathfrak{F}\,\Phi), \qquad \mathfrak{F}(\hat{z}\,\Phi) = -\,i\,D(\mathfrak{F}\,\Phi)$$
$$\mathfrak{F}(\alpha\,\Phi) = \mathfrak{F}(\alpha) * \mathfrak{F}(\Phi), \qquad \mathfrak{F}(\Theta * \Phi) = \mathfrak{F}(\Theta)\,\mathfrak{F}(\Phi),$$

pour toute $\Phi \in \mathfrak{U}$, toute $\alpha \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{U}}$ et toute $\Theta \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$.

L'espace image de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{U}}$ par $\mathfrak{F}$ est constitué par les distributions T à décroissance sous-exponentielle, c'est-à-dire, telles que le produit $e^{k|x|}\,T$ est borné pour tout k; la convolution $T * S$ (avec $S \in \Lambda_\infty$ et T à décroissance sous-exponentielle) est encore définie par la formule

$$\int_{\mathbf{R}} T(\hat{x} - t)\, S_t\, dt\,.$$

L'espace image de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}$ par $\mathfrak{F}$ est formé par les fonctions indéfiniment dérivables φ du type exponentiel, c'est-à-dire, telles que, pour tout j il existe k vérifiant

$$\lim_{x \to \infty} \left[e^{-k|x|}\, \varphi^{(j)}(x)\right] = 0\,.$$

19. La transformation de Stieltjes

La nouvelle forme de la formule de Dirac

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \varkappa\, \frac{1}{t - \hat{z}} \cdot \Phi_t\, dt = \frac{1}{2\pi i}\, \varkappa \int_{\Delta_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \hat{z}}\, d\lambda\,, \quad \text{avec } \varkappa\,\varphi = \Phi\,,$$

met en évidence les liens profonds, que nous avons déjà signalé dans [9], entre la formule de Dirac et celle de Cauchy. Dans le cas où S est une distribution tempérée, elle permet de passer de la «représentation réelle» de S à sa «représentation complexe»; de ce point de vue, elle définit la ***transformation de* Stieltjes** (voir [14], ch. VIII) ***généralisée aux distributions tempérées, sous une forme légèrement modifiée***, qui rappelle la transformation de Hilbert.

Soit en effet $S \in \mathfrak{S}'$. Alors on peut choisir un entier k et une fonction f continue, de façon que $x f(x)$ *soit bornée sur* $\mathbf{R}$ et que

$$S = D^k(1 + \hat{x}^2)^k f$$

et la formule

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \varkappa \frac{1}{t - \hat{z}} \cdot S_t dt ,$$

peut maintenant s'écrire (voir n°. 14 et 15)

$$S = \varkappa D_z^k \frac{(1 + \hat{z}^2)^k}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{t - z} dt$$

où la dernière intégrale converge au sens usuel pour tout $z \notin \mathbf{R}$.

On obtient donc ainsi deux composantes associées de S. Observons encore que, dans cette déduction, il suffit de supposer que f est une fonction localement sommable telle que l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{f(t)}{t - z} dt , \quad \text{pour tout } z \in \mathbf{R} ,$$

existe au sens de Lebesgue. Si en outre $f(t)$ est nulle pour $t < 0$ et que, dans cette intégrale, on substitue $-z$ à z, on retrouve la forme usuelle de la transformation de Stieltjes.

La transformation de Stieltjes, telle que nous la considérons, généralisée à $\mathfrak{U}$, coïncide, évidemment, avec l'application identique, donc avec $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}$[8]). Cette remarque triviale permet de retrouver plusieurs propriétés classiques de la transformation de Stieltjes, à partir de celles de $\mathfrak{F}$.

20. La localisation

Soit S une distribution tempérée et supposons que S est nulle dans un ouvert A de $\mathbf{R}$. Alors, on voit aussitôt que toute fonction de z de l'ensemble

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \varkappa \frac{S(t)}{t - \hat{z}} dt \qquad \text{(intégrale prise dans } \mathfrak{S}'\text{)}$$

qui définit S comme élément de $\mathfrak{U}$, est prolongeable comme fonction holomorphe à croissance lente aux points de A. Cela nous invite à poser les définitions suivantes:

---

[8]) Plus précisément, on pourra dire que la transformation de Stieltjes fait passer de la «forme réelle» de chaque $\Phi \in \mathfrak{U}$ (comme limite de distributions tempérées) à sa «forme complexe».

Définition 20.1. Nous dirons qu'une ultradistribution $\Phi = \varkappa\, \varphi$, avec $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega^i$, est *nulle dans un ouvert A* de **R**, si la fonction φ est prolongeable comme fonction holomorphe, à croissance lente vers l' ∞ (si A n'est pas borné), à une bande ou demi-plan vertical $\alpha < \Re z < \beta$, contenant A (en particulier on peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\alpha = +\infty$).

Définition 20.2. Nous dirons que deux éléments Φ, Ψ de $\mathfrak{U}$ sont égaux dans un ouvert A de **R** et nous écrirons

$$\Phi = \Psi \quad \text{dans } A\,,$$

si $\Phi - \Psi$ est nulle dans A.

La réunion de tous les ouverts de **R**, où une ultra-distribution Φ est nulle, est, évidemment, encore un ouvert où Φ est nulle.

Définition 20.3. On appelle *support* d'une ultra-distribution Φ le complémentaire de la réunion des ouverts de **R** où Φ est nulle.

Ces notions permettent d'étudier une ultra-distribution Φ localement. Supposons, par exemple, que Φ est égale à une fonction f à variation bornée *dans un voisinage ouvert d'un point x* de **R**, où f admet limites latérales, et soient φ^+ et φ^- deux composantes associées de Φ. Alors on a, d'après la théorie classique

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\varphi^+(x + i\varepsilon) - \varphi^-(x - i\varepsilon)] = \tfrac{1}{2}\, [f(x+) + f(x-)]$$

Il est évident que le support d'une ultra-distribution tempérée $\varkappa\, \varphi$ contient l'intersection de **R** avec l'ensemble des singularités de φ. Mais, en général, il ne coïncide pas avec cette intersection: il suffit de considérer l'exemple $H = -(2\pi i)^{-1} \varkappa \log^*(-z)$.

21. Les ultra-distributions à support compact et les opérateurs différentiels d'ordre infini

Nous désignerons par $\mathfrak{U}_c$ l'espace vectoriel des ultra-distributions (tempérées) à support compact.

Théorème 21.1. *L'espace $\mathfrak{U}_c$, des ultra-distributions à support compact est (algébriquement) isomorphe à l'espace $\mathfrak{A}(\infty)$, des germes de fonctions analytiques nulles à l'infini.*

Démonstration. Soit $\Phi = \varkappa\, \varphi$ une ultra-distribution tempérée à support borné. Il en découle que φ est prolongeable à un ensemble du type $|z| > k$, comme fonction, $\overline{\varphi}$, holomorphe et telle que $\overline{\varphi}(z)/z^k$ soit bornée dans cet ensemble. Alors, la fonction $\overline{\varphi}(1/z)$ de z est holomorphe dans l'ouvert $0 < |z| < 1/k$ et telle que $z^{k+2}\, \overline{\varphi}(1/z)$ se prolonge comme fonction ayant dérivée nulle au point 0. Cette dernière fonction de z est donc holomorphe dans le disque $|z| < 1/k$ et, par suite, $\overline{\varphi}(1/z)$ est de la forme $\overline{\varphi}(1/z) = \overline{\varphi}_0(1/z) + P(1/z)$, où $\overline{\varphi}_0(1/z)$ est une fonction de z holomorphe dans $|z| < 1/k$ et $P(z)$ un polynôme. Mais cela veut dire que $\overline{\varphi}_0(z)$ est holomorphe et nulle au point ∞ (adjoint à **C**) et que $\Phi = \varkappa\, \varphi_0$, où φ_0 est la restriction de $\overline{\varphi}_0$ au domaine de φ. D'ailleurs, on voit aussitôt que l'application $\Phi \to \overline{\varphi}_0$ de $\mathfrak{U}_c$ dans $\mathfrak{A}(\infty)$ est linéaire.

Réciproquement, il est évident que, pour toute fonction $\bar{\varphi}_0 \in \mathfrak{A}(\infty)$, il existe un élément Φ de $\mathfrak{U}_c$ tel que $\Phi = \varkappa\, \varphi_0$, où φ_0 est une restriction de $\bar{\varphi}_0$ appartenant à $\mathfrak{A}'_\infty$, ce qui achève la démonstration.

Nous considérons l'espace $\mathfrak{U}_c$ muni de la topologie (strictement plus fine que celle induite par $\mathfrak{U}$), qui rend topologique l'isomorphisme $\mathfrak{U}_c \leftrightarrow \mathfrak{A}(\infty)$, par rapport à la topologie naturelle de $\mathfrak{A}(\infty)$ (voir [3]).

Donc, tout élément Φ de $\mathfrak{U}_c$ est déterminé par une (et une seule) fonction $\varphi \in \mathfrak{A}(\infty)$ et nous poserons encore, pour commodité, $\Phi = \varkappa\, \varphi$.

Soit maintenant $\mathbf{E}$ un espace localement convexe quelconque complet pour les suites. *Alors* (cf. [8], p. 44—45) *il existe une correspondance biunivoque $F \leftrightarrow \mathfrak{f}$ entre les applications $F \in L(\mathfrak{U}_c, \mathbf{E})$ et toutes les fonctions entières $\mathfrak{f}(\lambda)$ à valeurs dans* $\mathbf{E}$, *cette correspondance étant donnée par les formules*

$$\mathfrak{f}(\lambda) = F\left(\frac{1}{\lambda - \hat{z}}\right), \qquad F(\Phi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathfrak{f}(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda,$$

où $\Phi = \varkappa\, \varphi \in \mathfrak{U}_c$ et où Γ est, par exemple, une circonférence contenue dans un domaine d'holomorphie de φ et orientée de façon à laisser l' ∞ à gauche.

Il en résulte une nouvelle expression pour les transformations déjà définies dans $\mathfrak{U}$ et maintenant restreintes à $\mathfrak{U}_c$ (comme celle de Fourier, par exemple).

Observons encore que *toute fonction entière est multipliable par toute ultra-distribution à support compact* et que $\mathfrak{U}_c$ *est une algèbre par rapport à la convolution.*

Rappelons maintenant que toute fonction $\varphi \in \mathfrak{A}(\infty)$ est représentable sous la forme d'une série de puissances de $1/z$:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}, \qquad \text{avec} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{borné.}$$

Alors, puisque l'on a

$$\delta^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\, \varkappa\, \frac{n!}{z^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

nous pouvons écrire

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta^{(n)}, \qquad \text{avec } c_n = (-1)^{n+1}\, 2\pi i\, \frac{a_n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Par conséquent, le théorème 21.1 peut encore s'énoncer de la façon suivante:

Théorème 21.2. *Les ultra-distributions à support compact sont les éléments de $\mathfrak{U}$ représentables comme séries $\sum_0^\infty c_n\, \delta^{(n)}$, de dérivées de δ, dont les coefficients, c_n, vérifient la condition*

$$\overline{\lim_n}\, \sqrt[n]{n!\, |c_n|} < +\infty\,.$$

Cet énoncé reste évidemment encore vrai si l'on remplace δ par l'une quelconque de ses translatées, $\delta(\hat{x} - h)$, $h \in \mathbf{C}$.

Il est encore évident que

$$\mathfrak{U}_c \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}\,.$$

La convolution d'une ultra-distribution à support compact, $\Theta = \sum_{0}^{\infty} c_n \delta^{(n)}$, par une ultra-distribution Φ quelconque est donnée par la formule

$$\Theta * \Phi = \sum_{0}^{\infty} c_n \Phi^{(n)} = \left(\sum_{0}^{\infty} c_n D^n\right) \Phi .$$

Donc:

SCHOLIE. *Les ultra-distributions à support compact, considérées comme opérateurs de convolution, s'identifient à certains opérateurs différentiels d'ordre fini ou infini.*

Ces opérateurs, on le sait, ne pouvaient pas être utilisés dans le cadre des distributions, l'emploie de toute série infinie de puissances de D étant interdit, hors de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables.

22. L'espace des ultra-distributions tempérées de support limité à gauche

Nous désignerons par $C_k (k = 1,2, \ldots)$ l'ensemble des nombres complexes z dont la distance au demi-axe positif, $\mathbf{R}^+$, est $\geq k$, c'est-à-dire tels que

$$|\mathfrak{I} z| \geq k, \text{ si } \mathfrak{R} z \geq 0 , \quad |z| \geq k , \text{ si } \mathfrak{R} z \leq 0$$

et par $\mathfrak{A}^i_{\omega+}$ la limite inductive des espaces $\mathfrak{A}_\omega(C_k)$, avec sa topologie d'espace $(\mathfrak{S}_2)$.

D'autre part, nous désignerons par $\mathfrak{U}_+$ l'espace des ultra-distributions tempérées dont le support est limité à gauche. Il est aisé de voir que

Proposition 22.1. *L'espace $\mathfrak{U}_+$ est algébriquement isomorphe au quotient de $\mathfrak{A}^i_{\omega+}$ par l'espace Π des polynômes.*

Nous munirons $\mathfrak{U}_+$ de la topologie (plus fine que celle induite par $\mathfrak{U}$) qui rend topologique cet isomorphisme. Alors $\mathfrak{U}_+$ sera, lui aussi, un espace $(\mathfrak{S}_2)$.

Nous désignerons encore par $\varkappa$ l'application canonique $\mathfrak{A}^i_{\omega+} \to \mathfrak{U}_+$. Par des procédés semblables à ceux que nous avons employé dans des cas analogues, on démontre que

Théorème 22.1. *L'espace $L(\mathfrak{U}_+, \mathbf{E})$ des applications linéaires continues de $\mathfrak{U}_+$ dans un espace localement convexe $\mathbf{E}$, complet pour les suites, est isomorphe à l'espace des fonctions entières $\mathfrak{f}(\lambda)$ à valeurs dans $\mathbf{E}$, à décroissance rapide à droite sur les bandes horizontales, c'est-à-dire telles que, pour tout k, $\lambda^k \mathfrak{f}(\lambda) \to 0$, lorsque $\mathfrak{R}\lambda \to +\infty$ sur ces bandes. L'isomorphisme naturel est donné par les formules*

$$F\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{C}_k} \mathfrak{f}(\lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda , \quad \text{pour} \quad \Phi = \varkappa\, \varphi , \quad \varphi \in \mathfrak{A}^i_{\omega+} ,$$

$$\mathfrak{f}(\lambda) = F(\lambda - \hat{z})^{-1}, \quad \text{pour } \lambda \in \complement \mathbf{R}^+,$$

où k dépend de Φ et la frontière, $\dot{C}_k$, de C_k, est orientée de façon à laisser $\mathbf{R}^+$ à droite. (L'intégrale est évidemment définie par prolongement continu à $\mathfrak{U}_+$).

Ainsi que pour $\mathfrak{U}$, la formule d'intégration complexe peut être remplacée par une formule d'intégration réelle sur $\mathbf{R}$. Mais on démontre que *tout élément de $\mathfrak{U}_+$ est la limite d'une suite de fonctions tempérées, de support contenu dans*

un intervalle $[a, +\infty[$, ce qui permet de ramener toujours l'intégration à un tel intervalle.

L'espace des fonctions que l'on peut multiplier par n'importe quel élément de $\mathfrak{U}_+$ est constitué par toutes les fonctions entières $\varphi(z)$ à croissance lente à droite sur les bandes horizontales, c'est-à-dire, à croissance lente pour $\Re z \to +\infty$, avec $\Im z$ borné.

A son tour, l'espace des opérateurs de convolution sur $\mathfrak{U}_+$ est constitué par les éléments $\Phi = \varkappa\,\varphi$ de $\mathfrak{U}$ tels que φ est à *décroissance rapide à gauche sur un, au moins, des ensembles* C_k. En particulier la convolution $\Phi * \Psi$ existe pour tout couple Φ, Ψ d'éléments de $\mathfrak{U}_+$.

Proposition 22.2. *L'espace* $\mathfrak{U}_+$ *est une algèbre par rapport à la convolution (sans diviseurs de zéro).*

23. La transformation de Laplace pour les éléments de $\mathfrak{U}_+$

La transformation de Laplace dans $\mathfrak{U}_+$ — que nous désignerons encore par $\mathfrak{L}$ — sera définie, au moins formellement, par

$$\mathfrak{L}\,\Phi = \int_R e^{-\hat{z}t}\Phi_t dt\,, \qquad \text{pour tout } \Phi \in \mathfrak{U}_+\,.$$

Il n'est pas difficile d'interpréter cette formule. Si l'on remplace z par la variable réelle x, $\mathfrak{L}$ coïncide avec la transformation de Fourier, suivie du changement de variable $z \to iz$. Il sera donc plus commode de commencer par étudier la restriction de $\mathfrak{F}$ à $\mathfrak{U}_+$:

$$\text{(23.1)} \qquad \mathfrak{F}\,\Phi = \int_R e^{i\hat{z}t}\,\Phi_t dt\,, \quad \text{pour } \Phi \in \mathfrak{U}_+$$

et de caractériser le sous-espace $\mathfrak{F}(\mathfrak{U}_+)$ de Λ_∞. Maintenant la forme complexe de (23.1) peut s'écrire

$$\mathfrak{F}\,\Phi = \int_{\dot{C}_k} e^{i\hat{z}\lambda}\,\varphi(\lambda)\,d\lambda\,,$$

où φ et k sont tels que $\Phi = \varkappa\,\varphi$, $\varphi(z)/z^k$ holomorphe bornée dans C_{k-1} ($k = 2,3,\ldots$). Alors, si l'on pose $\psi(z) = \varphi(z)/z^{k+2}$, on aura

$$\mathfrak{F}\,\Phi = (-i)^{k+2}\,D_z^{k+2}\int_{\dot{C}_k} e^{i\hat{z}\lambda}\psi(\lambda)\,d\lambda$$

où $\dot{C}_k$ peut être remplacée par la réunion des demi-droites $\Im z = \pm\,k$, $\Re z \geqq -\,k$ et du segment $\Re z = -\,k$, $|\Im z| \leq k$. On aura donc

$$\int_{\dot{C}_k} e^{iz\lambda}\,\psi(\lambda)\,d\lambda = \int_{-k}^{+\infty} e^{iz(u+ik)}\,\psi(u+ik)\,du +$$

$$+\int_{-k}^{+\infty} e^{iz(u-ik)}\,\psi(u-ik)\,du + i\int_{-k}^{k} e^{iz(iv-k)}\,\psi(iv-k)\,dv$$

pour toute valeur de z qui rende convergentes les trois intégrales du deuxième membre. Or, en tenant compte de ce que la fonction $z^2\,\psi(z)$ est bornée sur C_k, on voit aisément que ces intégrales sont simultanément convergentes pour

$\mathfrak{I} z \geqq 0$ et qu'elles définissent dans ce demi-plan fermé trois fonctions *continues*, resp. χ_1, χ_2, χ_3, holomorphes dans $\mathfrak{I} z > 0$. On voit d'ailleurs que les fonctions de z

$$e^{(1+i)kz} \chi_1(z), \; e^{(i-1)kz} \chi_2(z), \; e^{k(iz+|\mathfrak{R}z|)} \chi_3(z) ,$$

sont bornées sur le demi-plan $\mathfrak{I} z \geqq 0$. Il en découle que la fonction $\chi = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3$ est du type exponentiel dans le demi-plan $\mathfrak{I} z \geqq 0$, c'est-à-dire qu'il existe un $\alpha (= k\sqrt{2})$ tel que

$$e^{-\alpha |z|} \chi(z) \text{ est bornée pour } \mathfrak{I} z \geqq 0 .$$

Il est aisé de voir que les dérivées de χ vérifient la même condition pour $\mathfrak{I} z > 0$ et que, χ étant continue sur $\mathfrak{I} z \geqq 0$, ces dérivées sont à croissance lente [par rapport aux fonctions $(z-\alpha)^{-k}$] vers la frontière, $\mathfrak{I} z = 0$. D'ailleurs, la distribution $D_x^{k+2} \chi(x)$ coïncide avec $i^k \mathfrak{F} \Phi \in \Lambda_\infty$.

Et, puisque $(\mathfrak{L} \Phi)(z) = (\mathfrak{F} \Phi)(iz)$, on voit, en conclusion, que

Proposition 23.1. *Les images de* Laplace *des ultra-distributions de support limité à gauche sont des fonctions holomorphes de type exponentiel pour* $\mathfrak{R} z > 0$ *et à croissance lente vers l'axe imaginaire.*

Nous allons établir la réciproque. Désignons par $\mathfrak{Z}_0$ l'espace de ces fonctions et considérons $\zeta \in \mathfrak{Z}_0$. En raisonnant comme dans la dém. du th. 12.1, on voit qu'il existe un entier k tel que la primitive $P_1^k \zeta$ est prolongeable au demi-plan fermé $\mathfrak{R} z \geqq 0$ comme fonction, ψ, continue et encore du type exponentiel. Alors, si l'on pose $\chi(z) = \psi(-iz)$, la restriction de ψ à $\mathbf{R}$ appartient à Λ_∞ et, par conséquent, l'image réciproque

$$\mathfrak{F}^{-1}(-i^k D^k \chi) = \frac{(-\hat{x})^k}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\hat{x}t} \chi(t)\, dt$$

est un élément de $\mathfrak{U}$, que nous désignerons par Φ. Il reste à montrer que $\Phi \in \mathfrak{U}_+$ et que $\mathfrak{L} \Phi = \zeta$.

A cet effet, observons que ψ étant du type exponentiel, il est possible de choisir un entier m et deux fonctions $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$ holomorphes pour $\mathfrak{R} z > 0$, tels que

$$\psi(z) = e^{(1-i)mz} \psi_1(z), \quad \lim_{z\to\infty} \psi_1(z) = 0, \quad \text{pour } \mathfrak{I} z \geqq 0 ,$$

$$\psi(z) = e^{(1+i)mz} \psi_2(z), \quad \lim_{z\to\infty} \psi_2(z) = 0, \quad \text{pour } \mathfrak{I} z \leqq 0 .$$

Alors on voit que les intégrales (prises sur les demi-axes imaginaires):

$$\int_0^{+\infty i} e^{zt} \psi(t)\, dt = \int_0^{+\infty i} e^{(z+m-mi)t} \psi_1(t) dt$$

$$\int_{-\infty i}^0 e^{zt} \psi(t)\, dt = \int_{-\infty i}^0 e^{(z+m+mi)t} \psi_2(t) dt$$

définissent deux fonctions holomorphes et bornées de z, respectivement pour $\mathfrak{I} z > m$, $\mathfrak{I} z < -m$. Désignons par ζ_1 et ζ_2, respectivement, les quotients de ces deux fonctions par $2\pi i$. De même, l'intégrale (prise sur le demi-axe positif):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{zt} \psi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{(z+m-mi)t} \psi_1(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{(z+m+mi)t} \psi_2(t)\, dt$$

représente une fonction holomorphe et bornée de z pour $\Re z < -m$. Or on voit aisément que cette fonction coïncide avec $\zeta_1(z)$ [resp. $\zeta_2(z)$], pour $\Im z > m$ [resp. $\Im z < -m$] et $\Re z < -m$; il suffit d'observer que, si Γ_1 et Γ_2 sont des arcs de cercle de centre 0, situés respectivement dans le 1[er] quadrant et dans la 4[e], les intégrales

$$\int_{\Gamma_1} e^{zt}\,\psi(t)\,dt\,, \qquad \int_{\Gamma_2} e^{zt}\,\psi(t)\,dt\,,$$

pour $\Im z > m$ [resp. $\Im z < -m$] et $\Re z < -m$, convergent vers 0, lorsque les rayons de Γ_1 et Γ_2 tendent vers l'∞.

Il en résulte que les deux composantes associées de Φ:

$$z^k\,\zeta_1(z)\,, \quad z^k\,\zeta_2(z)$$

se prolongent, comme fonctions holomorphes à croissance lente, au demi-plan $\Re z < -m$ et que, par suite, $\Phi \in \mathfrak{U}_+$.

Pour reconnaître que $\mathfrak{L}\,\Phi = \zeta$, il suffit de rappeler que, sur l'axe imaginaire, $(\mathfrak{L}\,\Phi)\,(z) = (\mathfrak{F}\,\Phi)\,(iz)$ et de tenir compte de la formule d'inversion de $\mathfrak{F}$. Nous avons donc démontré:

Théorème 23.1. *La transformation de* LAPLACE $\mathfrak{L}$, *définie dans* $\mathfrak{U}_+$ *par*

$$\mathfrak{L}\,\Phi = \int_{\mathbf{R}} e^{-\bar{z}t}\,\Phi_t\,dt\,, \qquad \text{pour } \Phi \in \mathfrak{U}_+$$

ou par

$$\mathfrak{L}\,\Phi = \int_{C_k} e^{-\bar{z}\lambda}\,\varphi(\lambda)\,d\lambda\,,$$

où $\Phi = \varkappa\,\varphi$ *et* k *dépend de* φ, *est un isomorphisme de l'espace vectoriel* $\mathfrak{U}_+$ *sur l'espace* $\mathfrak{Z}_0$ *des fonctions holomorphes de type exponentiel dans* $\Re z > 0$ *et à croissance lente vers l'axe imaginaire.*

Nous munirons $\mathfrak{Z}_0$ de la topologie qui rend bicontinu cet isomorphisme et que l'on peut expliciter de la façon suivante: Soit $\mathfrak{Z}_{0,k}(k = 1, 2, \ldots)$ l'espace des fonctions $f(z)$ continues sur $\Re z \geqq 0$, holomorphes dans $\Re z > 0$ et telles que $e^{-kz}f(z)$ reste bornée dans $\Re z \geqq 0$, avec la norme suivante

$$\|f\|_k = \sup_{\Re z > 0} |e^{-k|z|}\,f(z)|\ .$$

Alors l'espace vectoriel topologique $\mathfrak{Z}_0$ sera la limite inductive des espaces images, $D^k\,\mathfrak{Z}_{0,k}$, des $\mathfrak{Z}_{0,k}$, par les opérateurs de dérivation.

Il en découle que *l'espace image de* $\mathfrak{Z}_0$ *par la rotation* $z \to -iz$ *est identifiable à un sous-espace vectoriel de* Λ_∞ *et que l'injection* $\mathfrak{Z}_0 \to \Lambda_\infty$ *est continue.* On aura donc, pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{Z}_0$:

$$\mathfrak{L}^{-1}\,\varphi = \mathfrak{F}^{-1}\,\varphi^*,$$

où $\varphi^*(\in \Lambda_\infty)$ est la «distribution de frontière» de la fonction $-\varphi(-iz)$. En outre, l'expression même de la transformation de LAPLACE montre que *l'espace vectoriel engendré par* $\{e^{-\bar{z}t}\}_{t\in\mathbf{R}}$ *est dense dans* $\mathfrak{Z}_0$. Alors, compte tenu de l'expression de $\mathfrak{F}^{-1}$ on arrive au résultat suivant:

Théorème 23.2. *L'inverse de la transformation de* Laplace $\mathfrak{L}: \mathfrak{U}_+ \to \mathfrak{Z}_0$ *est donnée par*

$$\mathfrak{L}^{-1}\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}i} e^{z\lambda}\varphi(\lambda)\,d\lambda\,, \qquad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{Z}_0\,,$$

où l'intégrale par rapport à φ *est définie par prolongement continu à* $\mathfrak{Z}_0$ *et rapportée à la topologie de* $\mathfrak{U}_+$.

24. L'espace $\mathfrak{Z}$

Nous désignerons par $\mathfrak{Z}_k(k = 1,2, \ldots)$ l'image de l'espace vectoriel topologique $\mathfrak{Z}_0$ par la translation τ_k:

$$\mathfrak{Z}_k = \tau_k \mathfrak{Z}_0,$$

et nous désignerons par $\mathfrak{Z}$ la limite inductive des espaces $\mathfrak{Z}_k$. Donc $\mathfrak{Z}$ est *l'espace des fonctions holomorphes de type exponentiel sur des demi-plans droits*. Dans [11] nous l'avions désigné par $\hat{\mathfrak{A}}_\omega$ et défini (ce qui revient au même) comme limite inductive des $\hat{\mathfrak{A}}_k$, où $\hat{\mathfrak{A}}_k$ est l'espace (de Banach) des fonctions $\varphi(z)$ holomorphes pour $\Re z > k$, telles que $e^{-k|z|}\varphi(z)$ reste bornée sur $\Re z > k$, avec la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\Re z > k} |e^{-k|z|}\varphi(z)|\,.$$

C'est là encore un espace $(\mathfrak{S}_2)$ qui contient l'espace $\tilde{\mathfrak{A}}^+_\omega$, limite inductive des espaces $e^{kz}\,\mathfrak{A}^+_\omega$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

25. Les ultra-distributions de type exponentiel sur R

Désignons par $\mathfrak{E}_k(k = 0,1, \ldots)$ l'espace (de Banach) des fonctions φ holomorphes dans l'ensemble $|\Im z| > k$ et telles que $z^{-k}\,e^{-k|\Re z|}\varphi(z)$ résulte bornée sur cet ensemble, avec la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{|\Im z| > k} |z^{-k}\,e^{-k|\Re z|}\,\varphi(z)|$$

et soit $\mathfrak{E}_\omega$ la limite inductive des $\mathfrak{E}_k$. Il s'agit encore ici d'un espace $(\mathfrak{S}_2)$. On peut dire que $\mathfrak{E}_\omega$ est *l'espace des fonctions holomorphes dans des ensembles du type* $|\Im z| > k$, *à croissance lente sur les bandes verticales et à croissance exponentielle sur les bandes horizontales.*

Cela posé, soit $\mathfrak{N}$ *le sous-espace vectoriel fermé de* $\mathfrak{E}_\omega$ *engendré par l'ensemble* $\{e^{hz}\}_{h\in\mathbf{R}}$. Puisque l'on a, par rapport à la topologie de $\mathfrak{E}_\omega$,

$$\frac{d^n}{dh^n}\,e^{hz} = z^n\,e^{hz}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

on voit que $\mathfrak{N} \supset \Pi$. [On peut même reconnaître que $\mathfrak{N}$ est formé par les fonctions entières à croissance lente sur les verticales et de type exponentiel sur les horizontales]. Alors nous poserons:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{E}_\omega/\mathfrak{N}\,.$$

Or on a $\Pi = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{A}^i_\omega$; par conséquent $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{B}$ et on voit que l'injection naturelle $\mathfrak{U} \to \mathfrak{B}$ est continue.

Nous dirons que les éléments de $\mathfrak{V}$ sont les *ultra-distributions de type exponentiel sur* **R**, et nous désignerons encore par $\varkappa$ l'application canonique de $\mathfrak{E}_\omega$ sur $\mathfrak{V}$. On pourrait maintenant essayer de réproduire pour $\mathfrak{V}$ une théorie analogue à celle que nous avons développée pour $\mathfrak{U}$. Nous y reviendrons au n°. 29; alors on verra que $\mathfrak{V}$ s'identifie au dual de l'espace des fonctions entières, à décroissance sous-exponentiel sur **R**. Nous désignerons par $\mathfrak{V}_f$ l'espace des ultra-distributions $\Phi \in \mathfrak{V}$ *de frontière*, dual de l'espace des *fonctions holomorphes à décroissance sous-exponentielle sur* **R** (cf. n°. 10).

En particulier, on peut définir «ultra-distribution nulle dans un ouvert de **R**», en remplaçant, dans la déf. 20.1, «fonction holomorphe à croissance lente (par rapport aux polynômes)» par «fonction holomorphe à croissance lente par rapport aux fonctions $z^k e^{k|\Re z|}$». Il en résulte une notion de support pour les éléments de $\mathfrak{V}$.

26. Les ultra-distributions de type exponentiel sur R et de support limité à gauche

Nous désignerons par $\mathfrak{V}_+$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{V}$ constitué par les ultra-distributions de support limité à gauche. On peut définir directement $\mathfrak{V}_+$ de la façon suivante:

Soit $\mathfrak{E}_{k+}$ l'espace (de Banach) des fonctions φ holomorphes à l'intérieur de l'ensemble C_k (défini au n°. 22) et telles que le quotient de $\varphi(z)$ par $z^k e^{k|\Re z|}$ soit prolongeable à C_k, comme fonction continue bornée, avec la norme

$$||\varphi||_k = \sup_{z \in C_k} |z^{-k} e^{-k|\Re z|} \varphi(z)|.$$

Cela étant, désignons par $\mathfrak{E}_{\omega+}$ la limite inductive des espaces $\mathfrak{E}_{k+}$. On voit aisément que $\mathfrak{V}_+$ est algébriquement isomorphe au quotient de $\mathfrak{E}_{\omega+}$ par $\mathfrak{N}$. Alors, nous munirons $\mathfrak{V}_+$ de la topologie qui rend bicontinu cet isomorphisme.

Observons que la formule

$$\text{(26.1)} \qquad \mathfrak{L}\,\Phi = \int_{C_k} e^{-\bar{z}\lambda} \varphi(\lambda)\, d\lambda, \quad \text{pour } \Phi = \varkappa\,\varphi,\ \varphi \in \mathfrak{E}_{k+},$$

où l'intégrale a le sens usuel, définit un prolongement de $\mathfrak{L}: \mathfrak{U}_+ \to \mathfrak{Z}_0$ en une application linéaire continue $\mathfrak{L}: \mathfrak{V}_+ \to \mathfrak{Z}$. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que, en posant $\psi(z) = e^{-kz}\varphi(z)$, l'intégrale

$$\int_{C_k} e^{-z\lambda} \psi(\lambda)\, d\lambda, \quad \text{pour } \Re z > 0,$$

détermine un élément de $\mathfrak{Z}_0$ (on le voit en raisonnant comme au n°. 23).

En outre, on voit d'une façon analogue que

$$\int_{C_k} e^{-x\lambda} \psi(\lambda)\, d\lambda = \int_{-k-\infty i}^{-k+\infty i} e^{-x\lambda} \psi(\lambda)\, d\lambda,$$

pour tout $x > 0$ où la deuxième intégrale par rapport à ψ est définie par prolongement continu à l'espace $\widetilde{\mathfrak{A}}_\omega^-$, image de $\widetilde{\mathfrak{A}}_\omega^+$ par symétrie (cf. 24)[9];

[9]) Il va sans dire que $\mathfrak{E}_{\omega+}$ s'identifie à un sous-espace de $\widetilde{\mathfrak{A}}_\omega^-$ et que l'injection canonique $\mathfrak{E}_{\omega+} \to \widetilde{\mathfrak{A}}_\omega^-$ est continue.

cette remarque permet de reconnaître que l'on a

$$\int_{\delta_k} e^{-\hat{z}\lambda}\theta(\lambda)\,d\lambda = 0, \quad \text{dans } \mathfrak{Z}, \text{ avec } \theta \in \mathfrak{E}_{\omega+},$$

si, et seulement si, θ est l'image de Laplace d'une distribution T de support compact, c'est-à-dire *si θ appartient à $\mathfrak{N}$.*

D'autre part, il est aisé de voir que la formule

$$\mathfrak{L}^{-1}\chi = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-\infty i}^{k+\infty i} e^{\hat{z}\lambda}\chi(\lambda)\,d\lambda \tag{26.2}$$

pour $\chi \in \mathfrak{Z}_k$, $k = 0,1,\ldots$, définit bien l'inverse de $\mathfrak{L}: \mathfrak{V}_+ \to \mathfrak{Z}$ et que $\mathfrak{L}^{-1}: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{V}_+$ est continue.

En conclusion:

Théorème 26.1. *La transformation de* Laplace *définie par la formule* (26.1) *d'intégration complexe ou par la correspondante formule d'intégration réelle*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt}\,\Phi_t\,dt$$

est un isomorphisme bicontinu de $\mathfrak{V}_+$ sur $\mathfrak{Z}$. Son inverse est donnée par la formule (26.2).

Il est d'ailleurs facile de voir que ce nouveau prolongement de la transformation de Laplace possède les propriétés caractéristiques

$$\mathfrak{L}(D\,\Phi) = \hat{z}\mathfrak{L}\,\Phi, \quad \mathfrak{L}(e^{hz}\Phi) = \tau_h\,\mathfrak{L}\,\Phi, \quad \text{pour tout } h \in \mathbf{R}.$$

On démontre aussi sans difficulté que

$$e^{h\hat{z}}\varkappa\,\varphi = \varkappa(e^{h\hat{z}}\,\varphi), \quad \text{pour toute fonction } \varphi \in \mathfrak{E}_+.$$

D'autre part, la convolution s'étend à $\mathfrak{V}_+$ suivant la formule usuelle, rapportée à la topologie de $\mathfrak{L}_+$. *Alors $\mathfrak{V}_+$ devient une algèbre par rapport à convolution, isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{Z}$ par rapport à la multiplication usuelle, c'est-à-dire:*

$$\mathfrak{L}(\Phi * \Psi) = (\mathfrak{L}\,\Phi)\,.\,(\mathfrak{L}\,\Psi), \quad \text{pour } \Phi, \Psi \in \mathfrak{V}_+$$

Enfin, si l'on observe que tout élément χ de $\mathfrak{Z}$ admet la représentation

$$\chi = \int_R e^{-\hat{z}t}\Phi_t\,dt, \qquad \text{où } \Phi = \mathfrak{L}^{-1}\chi,$$

et que, en outre, $e^{-\hat{z}\lambda}$ est une fonction entière de λ à valeurs dans $\mathfrak{Z}$, telle que $e^{k\lambda}\,.\,e^{-\hat{z}\lambda} \to 0$ lorsque $\Re\lambda \to +\infty$ sur les bandes horizontales, pour tout $k = 1,2,\ldots$, on obtient le résultat suivant:

Théorème 26.2. *Il existe une correspondance biunivoque $F \leftrightarrow \mathfrak{f}$ entre les applications linéaires continues F de $\mathfrak{Z}$ dans un espace localement convexe* E, *complet pour les suites, et les fonctions entières $\mathfrak{f}(\lambda)$ à valeurs dans* E *et à décroissance sous-exponentielle pour $\Re\lambda \to +\infty$, avec $\Im\lambda$ borné. Cette correspondance est donnée par les formules*

$$F(\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f}(t)\,\Phi_t\,dt, \quad \text{où } \Phi = \mathfrak{L}^{-1}\chi \in \mathfrak{V}_+$$

$$\mathfrak{f}(\lambda) = F(e^{-\lambda\hat{z}}), \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C}.$$

Nous dirons alors que $\mathfrak{f}(\lambda)$ est *l'indicatrice laplacienne* de F.

Evidemment, la formule d'integration réelle, dans cet énoncé, peut être remplacée par la formule d'intégration complexe. D'autre part, si l'on pose

$$\widetilde{F} = F\,\mathfrak{L}\,, \qquad \text{pour toute } F \in L\,(\mathfrak{Z}, \mathbf{E})\,,$$

$\widetilde{F}$ sera une application linéaire continue de $\mathfrak{V}_+$ dans $\mathbf{E}$ et réciproquement. Donc, le th. 26.2 donne aussi l'expression générale des applications $\widetilde{F} \in L(\mathfrak{V}_+, \mathbf{E})$. Nous dirons alors que $\mathfrak{f}(\lambda)$ est *l'indicatrice canonique de* $\widetilde{F}$. En particulier:

Corollaire. *Le dual de* $\mathfrak{V}_+$ *est (algébriquement) isomorphe à l'espace des fonctions numériques entières à décroissance sous-exponentielle sur les bandes horizontales à droite.*

On peut rendre bicontinu cet isomorphisme, en définissant, explicitement, la topologie convenable dans le sus-dit espace de fonctions entières. *Alors étant donné que* $\mathfrak{V}_+$ *est réflexif, on peut définir* $\mathfrak{V}_+$ *comme le dual fort de cet espace de fonctions entières.*

27. Le calcul opérationnel basé sur $\mathfrak{Z}$

En employant le th. 26.2, on peut maintenant définir un calcul opérationnel modelé sur $\mathfrak{Z}$, comme nous l'avons fait pour $\widetilde{\mathfrak{A}}_\omega^+$ (cf. [11] et [12]).

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre commutative complexe, munie d'un élément unité, $\mathbf{e}$, et d'une topologie d'espace localement convexe, par rapport à laquelle le produit soit hypocontinu pour les parties compactes. Supposons en outre que l'espace $\mathbf{A}$ soit complet pour les suites. Alors on établit, comme dans [12], le théorème suivant:

Théorème 27.1. *Il existe une correspondance biunivoque* $F \leftrightarrow \mathbf{a}$ *entre les homomorphismes continus* F *de l'algèbre* $\mathfrak{Z}$ *dans* $\mathbf{A}$, *tels que* $F(1) = \mathbf{e}$, *et les éléments* $\mathbf{a}$ *de* $\mathbf{A}$ *vérifiant les conditions suivantes:*

E 1. *L'équation* $\mathbf{v}'(\lambda) = -\,\mathbf{a}\,\mathbf{v}(\lambda)$ *admet, pour* λ *complexe quelconque, une solution* $\mathbf{v}(\lambda)$ [*que l'on désignera par* $e^{-\lambda\mathbf{a}}$ *ou par* $\exp\,(-\,\lambda\,\mathbf{a})$] *telle que* $\mathbf{v}(0) = \mathbf{e}$ *et que:*

E 2. *Les valeurs de* $\mathbf{v}(\lambda)$ *sont des éléments réguliers de* $\mathbf{A}$, *commutant avec* $\mathbf{a}$;

E 3. $\mathbf{v}(\lambda)$ *est à décroissance sous-exponentielle pour* $\Re\lambda \to +\infty$ *avec* $\Im\lambda$ *borné.*

Cette correspondance est définie par les formules

$$\mathbf{a} = F\,\hat{z}\,, \quad F\,\varphi = \int_{\mathcal{C}_k} \exp\,(-\,\lambda\,\mathbf{a})\,\overline{\varphi}(\lambda)\,d\lambda\,,$$

où $\varphi \in \mathfrak{Z}$ *et* $\mathfrak{L}(\varkappa\,\overline{\varphi}) = \varphi$, *avec* $\overline{\varphi} \in \mathfrak{C}_{k+}$.

Nous poserons alors, par définition

$$\varphi\,(\mathbf{a}) = F\,\varphi\,.$$

En particulier, $\mathbf{a}$ peut être l'opérateur de dérivation $D \in L(\mathfrak{V}_+)$. Alors il est aisé de voir que

$$e^{-\lambda D}\Phi = \tau_\lambda\Phi = \Phi(\hat{x} - \lambda)$$

pour toute ultra-distribution $\Phi \in \mathfrak{V}_+$, et

$$\varphi(D)\,\psi = \mathfrak{L}^{-1}(\varphi) * \psi\,,$$

quelles que soient $\varphi \in \mathfrak{Z}$ et $\psi \in \mathfrak{V}_+$.

D'ailleurs, il s'agit là de l'isomorphisme, déjà signalé, entre l'algèbre multiplicative $\mathfrak{Z}$ et l'algèbre de convolution $\mathfrak{V}_+$, puisque $D\Phi = \delta' * \Phi$ et que $\delta * \Phi = \Phi$.

28. Le calcul opérationnel basé sur l'espace des fonctions entières du type exponentiel. Exemples

Soit $\mathfrak{Z}^*$ l'espace des fonctions entières du type exponentiel muni de sa topologie usuelle d'espace $(\mathfrak{S}_2)$. On a évidemment $\mathfrak{Z}^* \subset \mathfrak{Z}_0$ et l'injection $\mathfrak{Z}^* \to \mathfrak{Z}_0$ est continue. Il est aisé de voir que la restriction de $\mathfrak{L}^{-1}$ à $\mathfrak{Z}^*$ est un isomorphisme topologique de l'algèbre multiplicative $\mathfrak{Z}^*$ sur l'algèbre de convolution $\mathfrak{U}_c$, des ultra-distributions de support compact (n°. 21). D'ailleurs, cette restriction de $\mathfrak{L}^{-1}$ coïncide, à une rotation et un facteur constant près, avec la transformation de Fourier $\mathfrak{F}: \mathfrak{Z}^* \to \mathfrak{U}_c$.

Il n'est pas difficile d'obtenir un résultat tout à fait analogue au th. 27.1, en remplaçant $\mathfrak{Z}$ par $\mathfrak{Z}^*$, $\mathfrak{E}_{k+}$ par $\mathfrak{A}_k(\infty)$, $\dot{C}_k$ par un cercle convenable, et en supprimant la condition E 3, la fonction $\mathbf{v}(\lambda) = \exp.(-\lambda\,\mathbf{a})$ devant être simplement une fonction entière.

En particulier, A pourra être l'espace des applications linéaires continues de $\mathfrak{V}$ dans lui-même, avec une topologie convenable, et a l'opérateur D de dérivation. On aura encore $e^{-\lambda D} = \tau_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et

$$\varphi(D)\,\psi = \mathfrak{L}^{-1}(\varphi) * \psi$$

pour toute $\varphi \in \mathfrak{Z}^*$ et toute $\psi \in \mathfrak{V}$.

Nous n'avons pas l'intention d'étudier ici les applications de ces calculs opérationnels. Mais il sera instructif de considérer ici quelques exemples très simples. Soit d'abord l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,$$

avec la condition initiale $u(x, 0) \equiv \Phi(x)$. Si l'on interprète $u(x, y)$ comme fonction $\mathbf{u}(y)$ de y à valeurs dans $\mathfrak{V}$ et Φ comme élément de $\mathfrak{V}$, cette équation prend la forme

$$\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,y} = i\,D_x\,\mathbf{u}\,,$$

ce qui, avec $\mathbf{u}(0) = \Phi$, conduit à la solution (unique):

$$\mathbf{u}(y) = e^{i\,y\,D}\,\Phi \equiv \tau_{-i\,y}\Phi\,.$$

Il est encore aisé d'établir le résultat suivant: *Étant donné $\varepsilon > 0$, pour que, pour $|y| < \varepsilon$, $\tau_{-i\,y}\Phi$ soit égale à une distribution (du type exponentiel) dans un ouvert A de $\mathbf{R}$, il faut et il suffit que Φ s'identifie dans A à une fonction $f(z)$ analytique pour $\Re z \in A$, $|\Im z| < \varepsilon$; on aura alors, pour $|y| < \varepsilon$*

$$\tau_{i\,y}\Phi \equiv f(\hat{x} + i\,y)\,, \quad \textit{dans } A$$

(cf. n°. 16, Remarque).

Analoguement, on obtient l'intégrale générale de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ,$$

sous la forme

$$u = \tau_{iy} \Phi + \tau_{-iy} \Psi, \quad \text{avec } \Phi, \Psi \in \mathfrak{B};$$

et on retrouve les fonctions harmoniques complexes ,si l'on impose à $u(x, y)$ de se réduire, dans un ouvert de $\mathbf{R}$, à une distribution en x, pour certaines valeurs de y. On peut résoudre le probleme de Cauchy pour cette équation, avec $u(\hat{x}, 0) = \Phi_0 \in \mathfrak{B}$, $u_y(\hat{x}, 0) = \Phi_1 \in \mathfrak{B}$, en posant $\mathbf{u}(y) = u(\hat{x}, y)$. Alors on obtient la solution (unique):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(y) &= \cos(yD)\,\Phi_0 + \frac{1}{D}\,\text{sen}\,(y\,D)\,\Phi_1 \\ &= \frac{1}{2}\left[(\tau_{iy} + \tau_{iy})\,\Phi_0 + \frac{1}{i}\,(\tau_{iy} - \tau_{-iy})\,(P\,\Phi_1)\right],\end{aligned}$$

où $P\,\Phi_1$ désigne une primitive de Φ_1. On a, en effet:

$$\mathfrak{L}_z^{-1} \cos y\,z = \frac{\delta(\hat{x} + iy) + \delta(\hat{x} - iy)}{2}, \qquad \mathfrak{L}_z^{-1} \frac{\text{sen}\,y\,z}{z} = \frac{H(\hat{x} + iy) - H(\hat{x} - iy)}{2i}$$

On peut aussi résoudre le problème de Dirichlet dans un demi-plan, avec la donnée $\Phi \in \mathfrak{B}$, sur la frontière. La solution (harmonique) est déterminée à une fonction γ près, de la forme $\gamma(x, y) = \theta\,(x + i\,y) - \theta\,(x - i\,y)$, avec $\theta \in \mathfrak{N}$; elle est unique, si, par exemple, on impose à Φ d'être une distribution bornée, et à $u(x, y)$ d'être bornée dans le demi-plan considéré (cf. n^{os} 10, 11, 12).

29. La transformation de Fourier dans $\mathfrak{B}$

Les résultats du n°. 26 nous permettent de prolonger la transformation de Fourier à l'espace $\mathfrak{B}$ des ultra-distributions de type exponentiel sur $\mathbf{R}$.

Soit $\mathfrak{E}_\omega^+$ (resp. $\mathfrak{E}_\omega^-$), pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, l'espace des fonctions $\varphi \in \mathfrak{E}_\omega$ nulles pour $\mathfrak{J} z < 0$ (resp. $\mathfrak{J} z > 0$). Alors $\mathfrak{E}_\omega \cong \mathfrak{E}_\omega^+ \times \mathfrak{E}_\omega^-$ et tout élément Φ de $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}_\omega / \mathfrak{N}$ peut s'écrire sous la forme $\Phi = \varphi^+ - \varphi^-$, où $\varphi^+ \in \mathfrak{E}_\omega^+$ et $\varphi^- \in \mathfrak{E}_\omega^-$ ces fonctions φ^+ et φ^- étant déterminées à une fonction $\theta \in \mathfrak{N}$ près. Designons encore par $\mathfrak{B}_{0+}$ l'espace des ultra-distributions $\Phi = \varkappa\,\varphi$, avec $\varphi \in \mathfrak{E}_{\omega+}$, telles que φ se prolonge au demi-plan $\mathfrak{R} z < 0$ comme fonction holomorphe à croissance lente vers l'axe imaginaire; et par $\mathfrak{B}_{0-}$ l'image de $\mathfrak{B}_{0+}$ par symétrie. Evidemment, les éléments de $\mathfrak{B}_{0+}$ sont *certaines* ultra-distributions de support contenu dans $[0, +\infty[$. Cela posé, un raisonnement semblable à celui du n°. 23 nous conduit au résultat suivant:

Proposition 29.1. *Par le changement de variable $z \to i z$, l'espace $\mathfrak{E}_\omega^+$ s'identifie au sous-espace (fermé) de $\mathfrak{Z}$, dont l'image par $\mathfrak{L}^{-1}$ est $\mathfrak{B}_{0+}$.*

Essayons donc de définir l'image de Fourier, $\mathfrak{F}\,\Phi$, d'une ultra-distribution $\Phi = \varphi^+ - \varphi^- \in \mathfrak{B}$ par la formule du n°. 24:

$$\mathfrak{F}\,\Phi = \int_{\Delta_k} e^{iz\lambda}\,\varphi(\lambda)\,d\lambda\,, \tag{29.1}$$

où l'on suppose $\Phi = \varkappa\,\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{E}_k$ et Δ_k la frontière de l'ensemble $|\mathfrak{J} z| < k$,

orientée de façon à laisser à droite l'axe réel. Alors on aura évidemment

$$(\mathfrak{F}\,\varphi^+)\,(-\hat{z}) = 2\,\pi\,\mathfrak{L}^{-1}\,\varphi^+(i\hat{z})\,, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{F}\,\varphi^+ \in \mathfrak{V}_{0-}\,,$$

et on voit de même que $\mathfrak{F}\,\varphi^- \in \mathfrak{V}_{0+}$. On aura donc

$$\mathfrak{F}\,\Phi = \mathfrak{F}\,\varphi^+ - \mathfrak{F}\,\varphi^- \in \mathfrak{V}$$

et il est maintenant aisé de voir que $\mathfrak{F}$ définit ainsi une application (linéaire) continue de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}$.

On peut, de la même façon, prolonger $\mathfrak{F}^{-1}$ en une application continue $\mathfrak{G} : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$, et il n'est pas difficile de reconnaître que

$$\mathfrak{G}\,\mathfrak{F}\,\Phi = \mathfrak{F}\,\mathfrak{G}\,\Phi = \Phi\,, \qquad \text{pour toute } \Phi \in \mathfrak{V},$$

ce qui permet d'écrire encore, au sens usuel:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F}^{-1}\,.$$

Donc

Théorème 29.1. *La formule* (29.1) *définit un isomorphisme,* $\mathfrak{F}$, *de l'espace vectoriel topologique* $\mathfrak{V}$ *dans lui-même, et on a*

$$\mathfrak{F}^{-1}\Phi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Delta_j} e^{i\hat{z}\lambda}\, \varphi(\lambda)\, d\lambda\,,$$

pour $\Phi = \varkappa\, \varphi$, $\varphi \in \mathfrak{E}_j$, $j = 1, 2, \ldots$

Il est encore facile de reconnaître les propriétés usuelles de la transformation de Fourier pour ce prolongement.

Observons d'autre part que l'image de Fourier de la restriction d'une fonction $\Theta \in \mathfrak{R}$ à un des demi-plans $\mathfrak{J} z > 0$, $\mathfrak{J} < 0$ (remplacée par la fonction nulle dans l'autre demi-plan) est une ultra-distribution de support compact (n°. 21) que l'on peut identifier à une «distribution sur l'axe imaginaire, à support compact». Alors, puisque $\Phi = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}\,\Phi$, les raisonnements précédents montrent que

Théorème 29.2. *Toute ultra-distribution* $\Phi \in \mathfrak{V}$ *peut s'écrire sous la forme* $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$, *avec* $\Phi^+ \in \mathfrak{V}_{0+}$ *et* $\Phi^- \in \mathfrak{V}_{0-}$, *les ultra-distributions* Φ^+ *et* Φ^- *étant déterminées à une même «distribution sur l'axe imaginaire, à support compact» près.*

Enfin, ce théorème permet de faire, commodément, la recherche des applications linéaires continues de $\mathfrak{V}$ dans un espace localement convexe. En particulier, on démontre aisément que $\mathfrak{V}$ *est le dual de l'espace des fonctions entières à décroissance sous-exponentielle sur les bandes horizontales, muni d'une topologie convenable.* Donc, pour obtenir un espace qui contienne à la fois $\mathfrak{V}$ et l'espace $\mathbf{D}'$ de Ehrenpreis (voir [2] et l'introduction), il suffirait de considérer le dual de l'espace des fonctions entières de type exponentiel sur les verticales et à décroissance sous-exponentielle sur les horizontales (muni d'une topologie convenable).

Bibliographie

[1] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. I. Band. Basel 1950. —
[2] Ehrenpreis, L.: Analytic functions and the Fourier transform of distributions. I. —
[3] Grothendieck, A.: Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasiliensis Math. 3, 57—122

(1954). — [4] KÖTHE, G.: Dualität in der Funktionentheorie. J. reine angew. Math. **191**, 29—49 (1953). — [5] KÖTHE, G.: Die Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **57** (1952). — [6] SCHWARTZ, L.: La théorie des distributions. I, II, Actuel. Scient. Ind. Paris 1950, 1951, 1957. — [7] SCHWARTZ, L.: Transformation de Laplace des distributions. Séminaire Math. de Lund, tome supplémentaire (1952), p. 196—206. — [8] SEBASTIÃO E SILVA, J.: As funções analiticas e a análise funcional. Thèse, 1948 (Portugaliae Math. 1950). — [9] SEBASTIÃO E SILVA, J.: Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions. Rev. Fac. Ciências Lisboa, 2a. série, A, **4**, 79—186 (1954/55). — [10] SEBASTIÃO E SILVA, J.: Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. Rend. Math. Univ. Roma, serie T, **14**, 388—410 (1955). — [11] SEBASTIÃO E SILVA, J.: Le calcul opérationnel au point de vue des distributions. Portugaliae Math. **14**, 105—132 (1955). — [12] SEBASTIÃO E SILVA, J.: Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite. Portugaliae Math. **17**, 1—17 (1958). — [13]Séminaire SCHWARTZ, 1953—54, Sécrétariat Mathématique, Faculté des Sciences de Paris. — [14] TILLMANN, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. **59**, 61—83 (1953). — [15] TITCHMARSH, E. C.: Theory of Fourier Integrals. Oxford 1937. — [16] WIDDER, D. V.: The Laplace Transform. Princeton 1946.

(Eingegangen am 1. April 1958)

CARTAN, H.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 97—110 (1958)

Prolongement des espaces analytiques normaux

Par

HENRI CARTAN à Paris

Le problème étudié ici tire son origine de la compactification, due à I. SATAKE [7], de l'espace quotient $\mathfrak{S}_n/\Gamma_n$, où $\mathfrak{S}_n$ désigne le demi-plan généralisé de SIEGEL (espace des n-matrices complexes symétriques $z = x + iy$, où y est positive non-dégénérée) et Γ_n est le groupe symplectique réel $Sp(n, \mathbf{Z})$. SATAKE a plongé l'espace $\mathfrak{V}_n = \mathfrak{S}_n/\Gamma_n$ comme ouvert partout dense d'un espace compact $\mathfrak{V}_n^*$ et a défini une notion de «fonction holomorphe» au voisinage de chaque point de $\mathfrak{V}_n^*$ (structure d'«espace annelé» au sens ci-dessous). Il s'agit alors de montrer que la structure ainsi définie sur $\mathfrak{V}_n^*$ est une structure *d'espace analytique normal* (pour une définition précise, voir ci-dessous, § 1). Ceci a été récemment prouvé par W. L. BAILY, dans un travail à paraître à l'Amer. Journal of Mathematics.

BAILY aborde le problème général du prolongement des espaces analytiques normaux. Nous inspirant largement de l'article de BAILY, nous nous proposons de donner ici un critère de «prolongement» (ci-dessous, théorème 2), qui présente sur celui de BAILY l'avantage de nécessiter moins d'hypothèses. Son application au cas de la compactification de SATAKE est alors presque immédiate; mais nous ne l'expliciterons pas.

Je suis particulièrement heureux de pouvoir dédier ce modeste travail à mon Collègue et Ami le Professeur HEINRICH BEHNKE. Sans l'Ecole de Münster, dont il fut l'infatigable animateur depuis trente ans, la théorie des fonctions analytiques ne serait pas ce qu'elle est devenue aujourd'hui. Puisse cette Ecole, dans les années à venir, continuer à faire honneur à son créateur, et enrichir constamment la discipline des fonctions analytiques, grâce à un contact toujours maintenu avec les autres domaines des mathématiques.

1. Espaces analytiques

Nous rappelons d'abord quelques notions indispensables concernant les espaces analytiques.

La notion d'*espace analytique* (ou encore «espace analytique général») est essentiellement due à H. BEHNKE et K. STEIN, ainsi qu'à H. CARTAN[1]). Nous adoptons ici la définition plus générale de J. P. SERRE [8]. Commençons par la notion d'*espace annelé:* c'est un espace topologique X muni de la donnée, en chaque point $x \in X$, d'un sous-anneau A_x de l'anneau des germes de fonctions continues au point x (et à valeurs complexes). Notons A la collection des

[1]) Voir [1], ainsi que [3], Exposé XIII, et [4], Exposé VII.

anneaux A_x. Etant donnés deux espaces annelés (X, A) et (X', A'), un *homomorphisme* sera une application continue $\varphi : X \to X'$ telle que, pour tout point $x \in X$ et tout élément $f' \in A'_{\varphi(x)}$, le germe $f' \circ \varphi$ appartienne à A_x. En particulier, on a la notion d'*isomorphisme* d'espaces annelés X et X': c'est un homéomorphisme $\varphi : X \to X'$ tel que l'application $f' \to f' \circ \varphi$ soit, pour chaque point $x \in X$, un isomorphisme de l'anneau $A'_{\varphi(x)}$ sur l'anneau A_x. Si U est un ouvert d'un espace annelé X, la collection des anneaux A_x, pour $x \in U$, définit sur U une structure annelée, dite *induite* par A.

Soit U un ouvert d'un espace numérique complexe C^N. Rappelons qu'on appelle *sous-ensemble analytique* de U toute partie $M \subset U$, *fermée* dans U, et telle que, au voisinage de chacun de ses points, M puisse être définie en annulant un certain nombre de fonctions holomorphes au voisinage de ce point (en nombre fini). Alors l'espace topologique M est muni d'une structure d'espace annelé, comme suit: si $x \in M$, l'anneau A_x est celui des germes de fonctions induites sur M par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant C^N.

Par définition, un *espace analytique* est un espace topologique *séparé* X muni d'une structure d'espace annelé satisfaisant à la condition suivante: tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U qui, muni de la structure d'espace annelé induite, est isomorphe à un sous-ensemble analytique d'un ouvert d'un espace C^N (muni de la structure annelée telle qu'on vient de la définir). En d'autres termes, il doit exister, pour tout point $x \in X$, un système fini d'éléments $f_i \in A_x$ qui réalisent un voisinage ouvert U de x comme sous-ensemble analytique M d'un ouvert de C^N, de manière que, pour tout point $y \in U$, l'anneau A_y s'identifie à l'anneau des germes induits sur M par les fonctions holomorphes de l'espace ambiant C^N. Dans tout ce qui suit, on astreindra toujours un espace analytique à la condition supplémentaire suivante: l'espace topologique sous-jacent X doit être réunion d'une *famille dénombrable de compacts*.

Soient X et X' deux espaces analytiques; on appelle *application analytique* (ou *holomorphe*) une application continue $\varphi : X \to X'$ qui est un «homomorphisme» pour les structures d'espaces annelés. En particulier, une fonction holomorphe (à valeurs scalaires) est une application continue $f : X \to C$ qui, en chaque point $x \in X$, appartient à l'anneau A_x.

Soit X un espace analytique. On appelle sous-ensemble analytique de X tout sous-ensemble *fermé* $Y \subset X$ tel que, au voisinage de chaque point de Y, puisse être défini en annulant des fonctions holomorphes au voisinage de ce point (en nombre fini). On définit alors sur Y une structure d'*espace analytique*, comme suit: pour $y \in Y$, l'anneau B_y sera l'anneau des germes de fonctions induits, sur Y, par les éléments de A_y (germes de fonctions holomorphes dans X). Ainsi l'anneau B_y s'identifie à un quotient de l'anneau A_y. Il est immédiat que les B_y définissent sur Y une structure d'espace analytique.

On dit qu'un espace analytique X est *irréductible* au point $a \in X$ si l'anneau A_a est un anneau d'intégrité; au voisinage de tout point $a \in X$, X est réunion d'un nombre fini de sous-espaces analytiques dont chacun est irréductible au

point a (ceci résulte du fait que l'anneau A_a est noethérien). On a la notion de *dimension* (complexe) d'un espace X au voisinage d'un point a où X est irréductible. Un espace analytique X est *purement n-dimensionnel* si, au voisinage de chaque point $a \in X$, X est réunion de sous-espaces analytiques irréductibles au point a et de dimension n. Soit X un espace analytique, purement n-dimensionnel; on appelle point *régulier* de X tout point qui possède un voisinage ouvert isomorphe à un ouvert de C^n; l'ensemble des points réguliers de X est une *variété analytique* (complexe) de dimension n; c'est un ouvert dense dans X, dont le complémentaire S est un ensemble analytique[2]) de dimension $\leq n-1$ (i. e.: en chaque point de S, S est réunion d'ensembles irréductibles au point a et de dimension $\leq n-1$).

Un espace analytique X est *globalement irréductible* s'il est impossible de trouver deux sous-espaces analytiques Y et Z tels que $X = Y \cup Z$, $Y \neq X$, $Z \neq X$. Tout espace analytique X s'écrit, d'une seule manière, comme réunion (localement finie) de sous-espaces analytiques globalement irréductibles[3]), tels qu'aucun d'eux ne soit contenu dans un autre; on les appelle les *composantes irréductibles* (au sens global) de X; elles sont en nombre fini ou dénombrable. Tout espace globalement irréductible est purement n-dimensionnel, pour un n convenable; mais l'espace peut n'être pas irréductible en certains de ses points.

Pour que X soit irréductible au point $a \in X$, il faut et il suffit que a possède un système fondamental de voisinages ouverts dont chacun soit globalement irréductible.

Pour qu'un espace analytique X, purement n-dimensionnel, soit globalement irréductible, il faut et il suffit que l'ensemble des points réguliers de X soit *connexe*. Tout espace globalement irréductible est connexe, mais la réciproque n'est pas vraie.

On dit qu'un espace analytique X est *normal* au point $a \in X$ si l'anneau A_a est un anneau d'intégrité *intégralement clos*; il en est notamment ainsi lorsque a est un point régulier. D'après Oka[4]) l'ensemble des points où X n'est pas normal est un sous-ensemble analytique, dont le complémentaire est partout dense. En particulier, l'ensemble des points où X est normal est ouvert.

Normalisation d'un espace analytique: pour tout espace analytique X, on introduit l'ensemble $\tilde{X}$ des composantes irréductibles de X en ses différents points. On a une application naturelle p de $\tilde{X}$ sur X, dans laquelle l'image réciproque de tout point de X est finie (et, en général, réduite à un point). On définit sur $\tilde{X}$ la topologie suivante: un système fondamental d'ouverts de $\tilde{X}$ s'obtient en prenant arbitrairement un ouvert $U \subset X$ et une composante irréductible V de U (au sens global); alors $\tilde{V} \subset \tilde{X}$, et les $\tilde{V}$ ainsi obtenus constituent, par définition, un système fondamental d'ouverts de $\tilde{X}$. La topologie de $\tilde{X}$

[2]) Voir [5], ainsi que [4], Exposé IX.
[3]) Voir [2], Appendice.
[4]) Voir [5], ainsi que [4], Exposé X.

est séparée; les composantes connexes de $\tilde{X}$ ont pour images, dans X, les composantes irréductibles de X (au sens global). L'application $p: \tilde{X} \to X$ est continue, et *propre* (l'image réciproque d'un compact de X est un compact de $\tilde{X}$). Soit $\tilde{a} \in \tilde{X}$, et soit $a = p(\tilde{a})$; notons n la dimension de la composante $\tilde{a}$ au point a. Considérons les points réguliers de X voisins de a et appartenant à la composante irréductible $\tilde{a}$; si une fonction f est définie et holomorphe en ces points réguliers et si en outre elle est *bornée* (au voisinage de a), alors la fonction $f \circ p$ se prolonge par continuité à tout point de $\tilde{X}$ assez voisin de $\tilde{a}$. Les germes de fonctions ainsi obtenus aux points $\tilde{a}$ de l'espace $\tilde{X}$ forment un anneau $\tilde{A}_{\tilde{a}}$; on démontre[5]) que ces anneaux définissent sur $\tilde{X}$ une structure d'espace analytique normal. L'espace analytique $\tilde{X}$, muni de l'application $p: \tilde{X} \to X$ (qui est une application analytique) s'appelle le *normalisé* de l'espace X. Si X est irréductible en un point a, $p^{-1}(a)$ se compose d'un seul point $\tilde{a}$; alors l'application p définit une injection $A_a \to \tilde{A}_{\tilde{a}}$ des anneaux de germes de fonctions; si on identifie A_a à un sous-anneau de $\tilde{A}_{\tilde{a}}$, $\tilde{A}_{\tilde{a}}$ est la *clôture intégrale* de A_a (dans le corps des fractions de A_a). Comme module sur A_a, $\tilde{A}_{\tilde{a}}$ est engendré par un nombre *fini* d'éléments.

On notera que, même lorsque l'application $p: \tilde{X} \to X$ est un homéomorphisme, p n'est pas nécessairement un isomorphisme des structures analytiques: il se peut qu'il y ait, au point $\tilde{a} \in \tilde{X}$, plus de fonctions holomorphes qu'au point $a = p(\tilde{a})$.

Le normalisé $(\tilde{X}, p)$ d'un espace analytique X jouit de la propriété «universelle» suivante: chaque fois qu'on a un espace analytique *normal* Y et une application analytique $\varphi: Y \to X$, il existe une application analytique $\tilde{\varphi}: Y \to \tilde{X}$ et une seule, telle que $\varphi = p \circ \tilde{\varphi}$.

2. Revêtements ramifiés

Rappelons d'abord quelques résultats plus ou moins classiques[6]):

Proposition 1. Soient X et X' deux espaces analytiques, et soit $f: X \to X'$ une application analytique. Soit $a \in X$ un point tel que X soit normal en a, et supposons que a soit point isolé de $f^{-1}(a')$, en notant $a' = f(a)$ (nous dirons alors que f est «non dégénérée» au point a). Alors il existe un voisinage ouvert irréductible U de a et un voisinage ouvert U' de a' jouissant des propriétés suivantes: $f^{-1}(a') \cap U = \{a\}$, la restriction de f à U est une application *propre* de U dans U', et l'image $f(U) = V'$ est un sous-espace analytique de U', irréductible au point a', et de même dimension m que U. L'application $g: U \to V'$ induite par f est *ouverte* (i. e.: l'image de tout ouvert de U est un ouvert de V'), et il existe un entier $d \geq 1$ jouissant des propriétés suivantes: pour tout $x' \in V'$, $g^{-1}(x')$ contient au plus d points; l'ensemble D'

[5]) Voir par exemple [3], Exposé XIV, § 10.
[6]) Voir [3], Exposé XIV (théorèmes 5 et 6).

formé des $x' \in \tilde{V}'$ tels que $g^{-1}(x')$ contienne moins de d points est un sous-ensemble analytique de V, de dimension $< m$; $g^{-1}(D') = D$ est un sous-ensemble analytique de U, de dimension $< m$; pour tout point $x \in U - D$, la restriction de g à un voisinage ouvert assez petit de x est un *homéomorphisme* de ce voisinage sur son image.

L'entier d s'appelle le *degré* de l'application f au point a; soient A_a l'anneau de l'espace analytique X au point a, et $A_{a'}$ l'anneau de l'espace V' au point a'; l'application $A_{a'} \to A_a$ définie par f est une *injection*; le corps des fractions de A_a est une extension du corps des fractions de $A_{a'}$ dont le *degré* est d.

De là on déduit facilement:

Théorème 1. *Soient X et X' deux espaces analytiques normaux de même dimension m, X' étant connexe. Soit $f: X \to X'$ une application analytique propre, telle que l'image réciproque de tout point de X' soit discrète (donc finie). Alors f est une application ouverte, et il existe un entier d jouissant des propriétés suivantes:*

1. *pour tout $x' \in X'$, $f^{-1}(x')$ se compose d'au plus d points;*
2. *l'ensemble D' des points $x' \in X'$ tels que $f^{-1}(x')$ se compose de moins de d points est un sous-espace analytique de dimension $< m$; $f^{-1}(D') = D$ est un sous-espace analytique de X, de dimension $< m$;*
3. *tout point $x \in X - D$ possède un voisinage ouvert U tel que la restriction de f à U soit un isomorphisme de l'espace analytique U sur l'espace analytique $f(U)$.*

Il résulte de 3. que la restriction de f à $X - D$ définit $X - D$ comme *revêtement* de $X' - D'$ (au sens topologique), le nombre des «feuillets» de ce revêtement étant égal à d. On dira que f définit X comme *revêtement ramifié* de X', et d s'appellera le *degré* de ce revêtement ramifié.

Dans le théorème 1, laissons maintenant tomber l'hypothèse suivant laquelle les espaces analytiques X et X' sont *normaux*; X' sera supposé *globalement irréductible*. Soit encore $f: X \to X'$ une application analytique propre, telle que l'image réciproque de tout point de X' soit discrète; alors l'application associée $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{X}'$ des espaces normalisés jouit évidemment des mêmes propriétés. Donc $\tilde{f}$ définit $\tilde{X}$ comme revêtement ramifié de $\tilde{X}'$; soit d son degré. On convient alors de dire encore que f définit X comme revêtement ramifié de X', et d s'appelle le *degré* de f. Il faut prendre garde que l'image réciproque $f^{-1}(x')$ d'un point $x' \in X'$ peut contenir un nombre de points *strictement supérieur* au degré d; cependant il est encore vrai qu'il existe un ouvert partout dense V de X et un ouvert partout dense V' de X', tels que $V = f^{-1}(V')$, et que la restriction de f à V définisse V comme revêtement (véritable) de V', à d feuillets. De là résulte:

Proposition 2. *Soient $f: X \to X'$ et $f': X' \to X''$ deux revêtements ramifiés, les espaces X' et X'' étant globalement irréductibles. Alors l'application composée $f' \circ f: X \to X''$ définit X comme revêtement ramifié de X'', dont le degré est égal au produit des degrés de f et f'.*

D'autre part, la définition même d'un revêtement ramifié entraîne les assertions suivantes:

Soit (X, X', f) un revêtement ramifié, et soit Y une composante irréductible de X (au sens global); alors la restriction de f à Y définit Y comme revêtement ramifié de X'. Le degré du revêtement X est égal à la somme des degrés des composantes irréductibles de X.

Soit (X, X', f) un revêtement ramifié, et soit U' un ouvert non vide de X', globalement irréductible; soit $U = f^{-1}(U')$, et soit $g: U \to U'$ l'application induite par f. Alors (U, U', g) est un revêtement ramifié, de même degré que (X, X', f).

3. Position du problème

Soit X un espace localement compact; soit V un *ouvert partout dense* dans X, et soit $W = X - V$. Supposons définie sur V une structure d'espace analytique normal de dimension m (ce qui implique que V est réunion dénombrable de compacts). Existe-t-il sur X une structure d'espace analytique normal satisfaisant aux deux conditions suivantes:

(α) La structure analytique de X induit celle donnée sur V;

(β) W est un sous-espace analytique de X, de dimension $< m$?

(On n'exige pas que W soit normal, ni même que W soit irréductible en chacun de ses points.)

Si le problème est possible, sa solution est unique. En effet, la donnée de la structure analytique de V définit sur X une structure annelée A comme suit: pour $x \in X$, l'anneau A_x se compose des germes de fonctions continues (à valeurs complexes) qui appartiennent à B_y en tout point $y \in V$ suffisamment voisin de x (on note B la collection des anneaux qui définissent la structure analytique de V). On a évidement $A_x = B_x$ si $x \in V$; autrement dit, la structure annelée de X prolonge bien celle de V. Or il est immédiat que si le problème posé a une solution, les germes de fonctions holomorphes au point $x \in X$ sont précisément les éléments de l'anneau A_x qu'on vient de définir; car, sur un espace analytique normal de dimension m, toute fonction continue qui est holomorphe en dehors d'un sous-ensemble analytique de dimension $< m$ est holomorphe partout.

Toute la question revient donc à savoir si la structure annelée définie sur X par la collection A des anneaux A_x est bien une structure d'espace analytique normal, et si elle satisfait à (β).

Le théorème ci-dessous, qui constitue le résultat essentiel du présent travail, donne une réponse à cette question.

Théorème 2. *Soient X un espace localement compact, V un ouvert partout dense, muni d'une structure d'espace analytique normal de dimension m, et $W = X - V$. Soit A la structure annelée définie sur X comme ci-dessus. Faisons les hypothèses suivantes:*

(i) *tout point $x_0 \in W$ possède (dans X) un système fondamental de voisinages ouverts U tels que l'espace analytique $V \cap U$ soit connexe;*

(ii) *tout point $x_0 \in W$ possède un voisinage ouvert U tel que les fonctions continues dans U et holomorphes en tout point de $V \cap U$ séparent les points de $V \cap U$;*

(iii) *la structure annelée A induit sur W une structure d'espace analytique de dimension $< m$.*

Alors A définit sur X une structure d'espace analytique normal, et W est un sous-espace analytique de X.

Avant d'aborder la démonstration du théorème 2, faisons quelques remarques. Tout d'abord, les conditions (i), (ii) et (iii) sont *nécessaires* pour que le problème posé soit possible: (iii) est nécessaire puisqu'on s'est imposé (β); (i) résulte de ce que l'espace X doit être irréductible au point x_0; (ii) résulte du fait que X doit pouvoir se réaliser, au voisinage de x_0, comme sous-ensemble analytique dans un ouvert d'un espace C^N.

On observera que, dans l'énoncé du théorème, nous n'avons pas supposé a priori que W, au voisinage de chacun de ses points x_0, pouvait être défini par l'annulation d'un nombre fini d'éléments de l'anneau A_{x_0} (hypothèse qui était faite par Baily). C'est le théorème 2 qui affirme que W satisfait à cette condition, comme conséquence des hypothèses (i), (ii) et (iii).

Avant de commencer la démonstration du théorème 2, qui sera longue, établissons un résultat préliminaire:

Proposition 3. *Soient X, V, W, et A comme dans le théorème 2; faisons l'hypothèse* (i) *de l'énoncé. Alors A_{x_0} est un anneau d'intégrité intégralement clos.*

Démonstration: soient f et g deux éléments de A_{x_0}, représentés par des fonctions définies et continues dans un ouvert U contenant x_0, holomorphes dans $V \cap U$, et telles que le produit fg soit identiquement nul dans U. D'après (i), on peut choisir U de façon que l'espace analytique $V \cap U$ soit connexe. Puisque f et g sont holomorphes dans $V \cap U$, l'une de ces fonctions est identiquement nulle dans $V \cap U$; elle est alors identiquement nulle dans U, puisque $V \cap U$ est dense dans U. Ceci montre que A_{x_0} est un anneau d'intégrité.

Il reste à prouver que A_{x_0} est intégralement fermé dans son corps des fractions K. Soient à nouveau f et g dans A_{x_0}, $g \neq 0$, et supposons que f/g satisfasse, dans K, à une équation

$$(1) \qquad (f/g)^n + \sum_{0 \leq i < n} \lambda_i (f/g)^i = 0,$$

les coefficients λ_i étant dans A_{x_0}. Soit U un ouvert contenant x_0 et tel que f, g et les λ_i soient représentés par des fonctions continues et bornées dans U, holomorphes dans $V \cap U$, fonctions que nous noterons encore f, g et λ_i; on peut choisir U assez petit pour que l'on ait

$$(1') \qquad (f(x))^n + \sum_{0 \leq i < n} \lambda_i(x)\,(f(x))^i\,(g(x))^{n-i} = 0 \quad \text{pour} \quad x \in U.$$

Soit h la fonction égale, en tout point $x \in V \cap U$ où $g(x) \neq 0$, au quotient $f(x)/g(x)$; $h(x)$ est bornée dans U, d'après (1'), donc se prolonge en une fonction (encore notée h) holomorphe en tout point de $V \cap U$, puisque V est un espace normal; et cette fonction h satisfait à

$$(2) \qquad (h(x))^n + \sum_{0 \leq i < n} \lambda_i(x)\,(h(x))^i = 0$$

en tout point $x \in V \cap U$. Il reste à prouver que h se prolonge par continuité aux points de $W \cap U$. Or soit $x \in W \cap U$; lorsqu'un point variable $y \in V \cap U$ tend vers x, $h(y)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs d'accumulation, à cause de l'équation (2). S'il existait deux valeurs d'accumulation distinctes, alors, pour tout ouvert assez petit U' contenant x et contenu dans U, $V \cap U'$ ne serait pas connexe. Or ceci contredit l'hypothèse (i). La proposition 3 est donc établie.

Pour établir le théorème 2, il suffira évidemment de démontrer le résultat suivant:

Proposition 4. *Soient X, V, W et A comme dans le théorème 2. Faisons seulement les hypothèses* (i) *et* (iii), *et soit a un point de W jouissant de la propriété suivante:*

(ii$_a$) *le point a possède, dans X, un voisinage ouvert U tel que les fonctions continues dans U et holomorphes dans $V \cap U$ séparent les points de $V \cap U$.*

Alors on peut choisir le voisinage ouvert U de a assez petit pour qu'il existe un ensemble fini F, formé de n fonctions f_i continues dans U, holomorphes dans $V \cap U$, et jouissant des propriétés suivantes: l'application $f: U \to \mathbf{C}^n$ définie par les f_i induit un homéomorphisme de U sur un sous-ensemble analytique X' d'un ouvert $U' \subset \mathbf{C}^n$, homéomorphisme qui définit un isomorphisme des structures annelées de U et de X', et ceci de manière que f applique W sur un sous-ensemble analytique W' de X', de dimension $< m$.

4. Démonstration de la proposition 4

Nous nous plaçons désormais dans les hypothèses de la proposition 4. Pour abréger le langage, nous dirons qu'une fonction f définie dans un ouvert U de X est «holomorphe» dans U si elle est continue dans U, et si de plus elle est holomorphe dans $V \cap U$; il revient au même de dire que f appartient à l'anneau A_x en tout point $x \in U$.

Lemme 1. *Tout voisinage ouvert U du point a, assez petit, possède la propriété suivante: si un sous-ensemble compact $M \subset U$ rencontre W en un point au plus et est défini par un nombre fini d'équations $f_i(x) = 0$* (où les f_i sont «holomorphes» dans U), *alors $M \cap V$ se compose de points isolés (qui sont donc en nombre fini si $M \cap W = \emptyset$).*

Démonstration: supposons U choisi assez petit pour qu'on puisse lui appliquer la propriété (ii$_a$) de la proposition 4, et montrons que U jouit alors de la propriété énoncée dans le lemme 1. L'intersection $M \cap V$ est un sous-espace analytique de l'espace analytique $V \cap U$; on veut montrer que chacune de ses composantes irréductibles (au sens global) est réduite à un point. Raisonnons par l'absurde: soit N une composante irréductible de $M \cap V$, non réduite à un point. Prenons deux points distincts b et c dans N; d'après (ii$_a$), il existe une fonction g «holomorphe» dans U, telle que $g(b) \neq g(c)$. Puisque g n'est pas constante sur N, N n'est pas compact. Or l'adhérence $\overline{N}$ de N dans U, qui est contenue dans M, est compacte et se compose de N et d'un unique point $d \in W$. On peut supposer $g(d) = 0$ (en rajoutant au besoin une constante à g). La fonction g induit sur le compact $\overline{N}$ une fonction

continue, nulle en d, et non constante; donc $|g(x)|$ atteint sa borne supérieure sur $\overline{N}$ en un point qui appartient à N. D'après le principe du maximum, g doit être constante sur N, d'où une contradiction.

Lemme 2. *Il existe un ensemble fini F de fonctions $f_i \in A_a$, nulles au point a, et n'ayant aucun autre zéro commun au voisinage de a.*

En effet, d'après (iii), il existe un système fini de fonctions «holomorphes» au voisinage de a, et qui réalisent W, au voisinage de a, comme sous-espace analytique d'un ouvert d'un espace numérique. Ces fonctions, qu'on peut supposer nulles en a, n'ont aucun autre zéro commun dans W au voisinage de a. Il reste à trouver un système fini de fonctions «holomorphes» au voisinage de a, nulles en a, et sans zéro commun dans V au voisinage de a.

Soit U un ouvert comme dans (ii$_a$). Supposons qu'il existe un point $x_0 \in V \cap U$ tel que toute fonction «holomorphe» dans U et nulle en a soit nulle en x_0; alors, pour tout point $x \in V \cap U$, distinct de x_0, il existe une f «holomorphe» dans U telle que $f(x) \neq f(x_0)$; en ajoutant une constante à f, on peut supposer que $f(a) = 0$, donc $f(x_0) = 0$, et par suite $f(x) \neq 0$. Ainsi, en enlevant au besoin le point x_0 de l'ouvert U, on peut supposer que, pour tout point $x \in V \cap U$, il existe une f «holomorphe» dans U, et telle que $f(a) = 0$, $f(x) \neq 0$.

On va alors prouver, par récurrence descendante sur l'entier n, la proposition suivante: il existe un système fini de f_i holomorphes dans U, nulles en a, et telles que l'ensemble des zéros communs aux f_i situés dans $V \cap U$ soit un sous-ensemble analytique de dimension $\leq n$ (i. e.: dont toutes les composantes irréductibles sont de dimension $\leq n$). Pour $n = -1$, le lemme 2 sera établi. Or l'assertion à démontrer est triviale pour $n = m$ (dimension de V). Supposons-la prouvée pour n, et montrons qu'on peut adjoindre aux f_i une fonction g «holomorphe» dans U, nulle en a, de manière que l'ensemble des zéros communs aux f_i et à g situés dans $V \cap U$ soit de dimension $\leq n - 1$. Soit D l'ensemble des zéros communs aux f_i situés dans $V \cap U$; l'ensemble des composantes irréductibles (au sens global) de D est dénombrable; choisissons un point x_k dans chacune d'elles. Pour chaque x_k il existe une g_k «holomorphe» dans U, et telle que $g_k(a) = 0$, $g_k(x_k) \neq 0$. Il est facile de trouver des constantes c_k de manière que la série $\sum_k c_k g_k(x)$ converge uniformément sur tout compact contenu dans U, et que sa somme soit $\neq 0$ en chacun des points x_k. Cette somme g est holomorphe dans $V \cap U$, puisque V est un espace normal; donc g est «holomorphe» dans U, et toutes les composantes irréductibles de l'ensemble des points de D où $g = 0$ sont de dimension $\leq n - 1$. Ceci achève la démonstration.

Lemme 3. *Il existe une fonction $f \in A_a$, nulle en tout point de W assez voisin de a, mais qui n'est identiquement nulle dans aucun voisinage de a* (autrement dit, f est $\neq 0$ comme élément de l'anneau A_a, mais son image dans l'anneau B_a de l'espace analytique W est nulle).

Démonstration: prenons des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ «holomorphes» dans un ouvert U contenant a, de manière que l'application $f : U \to C^n$ qu'elles

définissent induise un isomorphisme de l'espace analytique $W \cap U$ sur un sous-ensemble analytique W' d'un ouvert $U' \subset \mathbf{C}^m$. Ceci est possible à cause de l'hypothèse (iii), qui dit en outre que W' est de dimension $< m$. On peut supposer U assez petit pour satisfaire à (ii_a). On peut de plus supposer que U' est un *ouvert d'holomorphie*; alors toute fonction holomorphe sur W' est (globalement) induite par une fonction holomorphe dans U', d'après la théorie des faisceaux analytiques cohérents. Soit $U_1 = U \cap f^{-1}(U')$; il existe un voisinage ouvert U_2 de a, contenu dans U_1, et tel que $V \cap U_2$ soit connexe (hypothèse (i)). On va montrer *qu'il existe une fonction «holomorphe» dans U_1, nulle sur $W \cap U_1$, et non identiquement nulle dans U_2*, ce qui établira le lemme 3.

Pour toute fonction g «holomorphe» dans U_1, il existe une fonction φ holomorphe dans U', telle que $g(x) = \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ pour tout $x \in W \cap U_1$. La fonction $g - \varphi(f_1, \ldots, f_n)$ est «holomorphe» dans U_1 et nulle sur $W \cap U_1$. Deux cas sont alors possibles: 1° l'application f envoie U_2 dans W'; alors, pour des raisons de dimension, les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ ne séparent pas les points de $V \cap U_2$, et puisque les fonctions «holomorphes» dans U_1 séparent les points de $V \cap U_2$, il existe une g «holomorphe» dans U_1, telle que $g - \varphi(f_1, \ldots, f_n)$ (qui est nulle sur $W \cap U_1$) ne soit pas identiquement nulle dans $V \cap U_2$; 2° l'application f n'envoie pas U_2 dans W'; alors il existe une fonction ψ holomorphe dans U', nulle sur W' et $\neq 0$ en un point de la forme $f(x)$, avec $x \in U_2$; alors $\psi \circ f$ est «holomorphe» dans U_1, nulle sur $W \cap U_1$, mais non identiquement nulle dans U_2.

Dans les deux cas le lemme 3 est démontré.

Définition: nous dirons qu'un système fini F de fonctions $f_i \in A_a$ est *adéquat* s'il satisfait aux conditions suivantes:

(a) les f_i sont nulles en a et n'ont aucun autre zéro commun au voisinage de a;

(b) l'une des f_i (soit f_0) s'annule identiquement sur W au voisinage de a mais n'est identiquement nulle dans aucun voisinage de a;

(c) F contient un système de fonctions qui définissent un *isomorphisme* de l'espace analytique $W \cap U$ sur un sous-ensemble analytique d'un ouvert d'un espace numérique (U désignant un voisinage ouvert assez petit de a).

Les lemmes 2 et 3 prouvent qu'*il existe des ensembles adéquats*.

Définition: soit F un ensemble adéquat de n fonctions $f_i \in A_a$. On dira qu'un voisinage ouvert U de a (dans X) et un voisinage ouvert U' de l'origine dans $\mathbf{C}^n$ sont *F-adaptés* s'ils satisfont aux conditions suivantes:

1° les f_i sont «holomorphes» dans U, et l'application $f: U \to \mathbf{C}^n$ définie par les f_i applique U dans U';

2° l'application $f: U \to U'$ est *propre*, et $f^{-1}(0) \cap U = \{a\}$;

3° f induit un isomorphisme de l'espace analytique $W \cap U$ sur son image W' (qui est alors un sous-ensemble analytique de U');

4° $f^{-1}(W') \cap V \cap U$ est un sous-ensemble analytique K de $V \cap U$, de dimension $< m$.

Lemme 4. *Pour tout ensemble adéquat F, il existe des couples (U, U') aussi petits qu'on veut, et F-adaptés.*

Démonstration: il existe évidemment un voisinage ouvert U_1 de a, aussi petit qu'on veut, tel que les $f_i \in F$ soient «holomorphes» au voisinage de l'adhérence $\overline{U}_1$, qu'on peut supposer compacte. D'après (a), on peut supposer que a est l'unique zéro commun aux f_i dans $\overline{U}_1$. D'après (c), on peut choisir en outre U_1 de manière que l'application f définie par les $f_i \in F$ induise un isomorphisme de l'espace analytique $W \cap U_1$ sur son image. On peut de plus supposer que l'espace analytique $V \cap U_1$ est connexe, à cause de (i); d'après (b), la fonction $f_0 \in F$ est nulle sur $W \cap U_1$ mais n'est identiquement nulle au voisinage d'aucun point de $V \cap U_1$, puisque $V \cap U_1$ est irréductible.

U_1 étant ainsi choisi, prenons dans C^m un voisinage ouvert U' de l'origine, arbitrairement petit, de manière que $f(W \cap U_1) \cap U'$ soit un sous-ensemble analytique *fermé* dans U'; on peut supposer en outre U' sans point commun avec l'image, par l'application f, de la frontière (compacte) de U_1. Posons

$$U = f^{-1}(U') \cap U_1 .$$

On va montrer que le couple (U, U') est F-adapté, ce qui établira le lemme 4.

Il est évident que U et U' satisfont aux conditions 1° et 3° des couples F-adaptés. Montrons que 2° est vérifié: soit C' un compact contenu dans U', et $C = f^{-1}(C') \cap U$. L'adhérence de C dans $\overline{U}_1$ est compacte; tout point b adhérent à C satisfait à $f(b) \in C'$, donc b n'est pas un point frontière de U_1, et par suite $b \in U_1$, d'où $b \in f^{-1}(U') \cap U_1 = U$. Puisque C est fermé dans U, on a $b \in C$, ce qui prouve que C est compact. Ainsi l'application $f: U \to U'$ est propre, et la condition 2° est vérifiée. Il reste à montrer que 4° a lieu: or $K = f^{-1}(W') \cap V \cap U$ est évidemment un sous-ensemble analytique de $V \cap U$, et pour prouver que K est de dimension $< m$, il suffit de voir que K n'a aucun point intérieur. Si K avait un point intérieur, la fonction f_0 serait nulle dans un ouvert non vide de $V \cap U$, contrairement à ce qui a été dit. Le lemme 4 est ainsi entièrement démontré.

Lemme 5. *Soit F un ensemble adéquat, et soit (U, U') un couple F-adapté. Si U a été choisi assez petit, l'image $f(U)$ est un sous-ensemble analytique X' de U', purement m-dimensionnel, et irréductible au point $0 \in C^m$.*

Démonstration: nous supposons U assez petit pour que le lemme 1 lui soit applicable. Soit x_0 un point quelconque de $(V \cap U) - K$, c'est-à-dire un point de U tel que $f(x_0) \notin W' = f(W \cap U)$. Puisque l'application $f: U \to U'$ est propre, l'ensemble $f^{-1}(f(x_0))$ est compact; cet ensemble ne rencontre pas W, donc (lemme 1) il est fini. Ainsi l'application f est «non dégénérée» au point x_0; d'après la proposition 1, il existe un voisinage de x_0 que f applique sur un sous-ensemble analytique au voisinage du point $x'_0 = f(x_0)$, et ce sous-ensemble analytique est irréductible au point x'_0, et de dimension m. Soient alors x_k les points de $V \cap U$, en nombre fini, qui appartiennent à $f^{-1}(x'_0)$; si à chaque x_k on associe un voisinage E_k de x_k (dans V), il existe un voisinage E' de x'_0 tel que $f^{-1}(E')$ soit contenu dans la réunion des E_k, parce que f est propre. Donc l'image $f(U) = X'$ est, au voisinage de chacun de ses points x'_0 qui n'appartient pas à W', la réunion d'un nombre fini de sous-ensembles analytiques, irréductibles en x_0 et de dimension m.

Ainsi $X' - W' = M'$, qui est *fermé* dans $U' - W'$ puisque f est une application propre de $(V \cap U) - K$ dans $U' - W'$, est un sous-ensemble analytique purement m-dimensionnel de $U' - W'$. Puisque W' est un sous-ensemble analytique de U' de dimension $< m$, un théorème de REMMERT et STEIN [7]) permet d'affirmer que l'adhérence $\overline{M}'$ de M' dans U' est un sous-ensemble analytiqũe purement m-dimensionnel. Or $\overline{M}'$ n'est autre que $X' = M' \cup W'$; en effet X' est fermé dans U' (puisque f est propre), et tout point de W' est adhérent à $X' - W'$ parce que $(V \cap U) - K$ est dense dans $V \cap U$.

Ainsi $X' = f(U)$ est un sous-ensemble analytique de U', purement m-dimensionnel. X' est *irréductible* à l'origine $0 \in C^n$: en effet, soit φ une fonction holomorphe dans C^n au voisinage de 0; la fonction $\varphi \circ f$ est «holomorphe» dans X au voisinage de a. Puisque l'anneau A_a est intègre (proposition 3), l'anneau des germes de fonctions induites sur X', à l'origine 0, par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant C^n, est un anneau d'intégrité. Ceci prouve que le sous-ensemble analytique X' est *irréductible* au point 0.

Lemme 6. *Soit F un ensemble adéquat, et soit X' comme dans le lemme 5. Il existe un système fondamental de couples F-adaptés (U, U') tels que l'espace analytique $(X' - W') \cap U'$ soit globalement irréductible; pour chacun d'eux, l'application f définit $f^{-1}(X' - W') \cap U$ comme revêtement ramifié de $(X' - W') \cap U'$; son degré est indépendant du couple (U, U'), et $f^{-1}(X' - W') \cap U$ et $V \cap U$ sont connexes.*

Démonstration: puisque X' est irréductible au point 0, il existe un système fondamental de voisinages ouverts U' de 0 tels que l'espace analytique $X' \cap U'$ soit globalement irréductible; il en est alors de même de $(X' - W') \cap U'$, puisque la dimension de W' est strictement inférieure à celle de X'. Pour un tel U', posons $U = f^{-1}(U')$; il est clair que le couple (U, U') est F-adapté. L'application analytique $f^{-1}(X' - W') \cap U \to (X' - W') \cap U'$ induite par f est évidement propre, et on a vu que l'image réciproque de tout point de $X' - W'$ est finie; donc $f^{-1}(X' - W') \cap U$ est un *revêtement ramifié* de $(X' - W') \cap U'$. Son *degré* ne dépend pas du couple (U, U') en vertu de la dernière assertion du § 2. Il reste à montrer que l'espace analytique $f^{-1}(X' - W') \cap U$ est *connexe*, d'où il résultera évidemment que l'espace analytique $V \cap U$, dans lequel il est partout dense, est aussi connexe.

Or soit d le degré du revêtement ramifié. Pour chaque point x' d'un ouvert partout dense de $(X' - W') \cap U'$, l'image réciproque $f^{-1}(x')$ se compose de d points, qui tendent vers a quand x' tend vers 0. Soit U_2 un voisinage ouvert de a contenu dans U, et tel que $V \cap U_2$ soit connexe (condition (i)); l'espace analytique $f^{-1}(X' - W') \cap U_2$, obtenu en retranchant de $V \cap U_2$ un sous-ensemble analytique de dimension $< m$, est connexe. Considérons alors les composantes connexes de $f^{-1}(X' - W') \cap U$; une seule rencontre U_2, et son degré (comme revêtement ramifié de $(X' - W') \cap U'$) est égal à d, d'après ce qu'on vient de voir. Comme le degré d de $f^{-1}(X' - W') \cap U$, comme revêtement ramifié de $(X' - W') \cap U'$, est égal à la somme des degrés de ses composantes connexes, il

[7]) Voir [6], ainsi que [4], Exposés XIII et XIV de K. STEIN.

s'ensuit qu'il y a une seule composante connexe, et ceci achève la démonstration.

Définition: le degré commun des revêtements ramifiés qui interviennent dans le lemme 6 s'appellera le *degré de l'ensemble adéquat F*, et sera noté $d(F)$.

Lemme 7. *Soient $F \subset \tilde{F}$ deux ensembles adéquats. Soit (U, U') un couple F-adapté tel que, si l'on pose $X' = f(U)$, $W' = f(W \cap U)$, $X' - W'$ soit globalement irréductible. Supposons en outre U assez petit pour que les fonctions de $\tilde{F}$ soient «holomorphes» dans U, et soit $\tilde{f}: U \to C^{\tilde{n}}$ l'application définie par les fonctions de $\tilde{F}$. Notons $\pi: C^{\tilde{n}} \to C^n$ la projection naturelle, et soit $\tilde{X}' = \tilde{f}(U)$, $\tilde{U}' = \pi^{-1}(U')$. Alors le couple $(U, \tilde{U}')$ est $\tilde{F}$-adapté, et l'application f: $U - f^{-1}(W') \to X' - W'$ est composée des deux applications analytiques*

$$U - f^{-1}(W') \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X}' - \tilde{X}' \cap \pi^{-1}(W') \xrightarrow{f_1} X' - W'.$$

L'espace $\tilde{X}' - \tilde{X}' \cap \pi^{-1}(W')$ est globalement irréductible, les deux applications $\tilde{f}$ et f_1 définissent des revêtements ramifiés, et l'on a

$$\deg(F) = \deg(\tilde{F}) \deg(f_1) . \tag{3}$$

Démonstration: f se factorise évidemment en $\tilde{f}: U \to C^{\tilde{n}}$ et $\pi: C^{\tilde{n}} \to C^n$. Du fait que f est une application propre de U dans U', il résulte aussitôt que $\tilde{f}$ est une application propre de U dans $\tilde{U}'$. Il est clair que U et $\tilde{U}'$ vérifient les conditions d'un couple $\tilde{F}$-adapté. Puisque $X' - W'$ est globalement irréductible par hypothèse, le lemme 6 dit que $U - f^{-1}(W')$ est globalement irréductible, donc son image par $\tilde{f}$, qui est $\tilde{X}' - \tilde{X}' \cap \pi^{-1}(W')$, est globalement irréductible. D'autre part, il est clair que l'application f_1 induite par la projection π est propre, et que l'image réciproque, par f_1, d'un point de $X' - W'$ est finie. Donc f_1 est un revêtement ramifié; la relation (3) résulte alors de la proposition 2.

Lemme 8. *Il existe un ensemble adéquat F dont le degré $d(F)$ est égal à* 1.

Démonstration: prenons un ensemble adéquat F et un couple F-adapté (U, U'). Il existe dans $X' - W'$ un point x'_0 tel que, pour tout point x' assez voisin de x'_0, l'ensemble $f^{-1}(x')$ se compose de $d(F)$ points. Si U a été choisi assez petit, l'hypothèse (ii_a) s'applique à U; il existe donc un système fini G de fonctions «holomorphes» dans U qui séparent les $d(F)$ points de $f^{-1}(x'_0)$. Soit $\tilde{F}$ le système obtenu en adjoignant à F les fonctions de G; $\tilde{F}$ est adéquat, et, avec les notations du lemme 7, le degré du revêtement f_1 est égal à $d(F)$. D'après (3), on a $d(\tilde{F}) = 1$, ce qui démontre le lemme 8.

Considérons désormais un système adéquat F tel que $d(F) = 1$. Soit X' comme dans le lemme 5, et soit B l'anneau des germes induits sur X', au point $0 \in C^n$, par les germes de fonctions holomorphes de l'espace ambiant C^n. On sait que la clôture intégrale $\tilde{B}$ de l'anneau d'intégrité B est un B-module de type fini; soit (φ_j) un système fini de générateurs de $\tilde{B}$ sur B. Puisque l'anneau A_a est intégralement clos (proposition 3), il existe un élément $g_j \in A_a$ qui induit la fonction $\varphi_j \circ f$ aux points de V (suffisamment voisins de a) où

cette fonction est définie. Adjoignons les g_j au système adéquat F; on obtient un système $\tilde{F}$, et on a $d(\tilde{F}) = 1$ puisque $d(\tilde{F})$ divise $d(F) = 1$. Soit $\tilde{f}$ l'application définie par le système $\tilde{F}$; $\tilde{f}$ applique un voisinage de a sur un sous-ensemble analytique $\tilde{X}'$, *normal* à l'origine 0. Alors $\tilde{X}'$ est normal en chacun de ses points assez voisins de 0, puisque l'ensemble des points où un espace analytique n'est pas normal est fermé.

Ecrivons de nouveau F, f et X' au lieu de $\tilde{F}$, $\tilde{f}$ et $\tilde{X}'$. Choisissons un couple F-adapté (U, U') assez petit pour que X' soit normal en tout point de $X' \cap U'$. Soit $K = f^{-1}(W') \cap V \cap U$, sous-ensemble analytique de $V \cap U$, de dimension $< m$. On va montrer que *K est vide*. Raisonnons par l'absurde: supposons qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $x_0 \notin W$ et $f(x_0) \in W'$. Appliquons le lemme 1 à l'ensemble compact $f^{-1}(f(x_0)) \cap U$, qui rencontre W en un seul point x_1, distinct de x_0. On en conclut que l'application f est non dégénérée en x_0, donc (proposition 1) f applique tout voisinage de x_0 *sur* un sous-ensemble analytique de dimension m au voisinage de $f(x_0)$; puisque X' est irréductible au point $f(x_0)$, f applique tout voisinage de x_0 *sur* un voisinage de $f(x_0)$ dans X'. Puisque f définit $(V \cap U) - K$ comme revêtement ramifié de degré 1 de l'espace normal $X' - W'$, f est un *isomorphisme* de $(V \cap U) - K$ sur $X' - W'$, et en particulier f ne prend jamais deux fois la même valeur dans $(V \cap U) - K$. Aux points de $(V \cap U) - K$ assez voisins de x_1, f ne peut donc prendre ses valeurs que dans W', ce qui impliquerait que K possède un point intérieur: contradiction.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de la proposition 4. En effet, l'application f définie par le système F applique biunivoquement $V \cap U$ sur $X' - W'$, et $W \cap U$ sur W'; f est donc une application biunivoque de U sur X', et comme f est continue et propre, f est un *homéomorphisme* de U sur X'. Il est immédiat que, par cet homéomorphisme, chaque anneau A_x $(x \in U)$ se transporte sur l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur X' au point $f(x)$. La proposition 4 est donc entièrement établie.

Le théorème 2 est, du même coup, démontré.

Bibliographie

[1] Behnke, H., u. K. Stein: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951). — [2] Cartan, H.: Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. scient. Ecole norm. sup. **61**, 149—197 (1944). — [3] Cartan, H.: Séminaire 1951—52, Paris. — [4] Cartan, H.: Séminaire 1953—54, Paris. — [5] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VIII. Lemme fondamental. J. Math. Soc. Japan **3**, 204—214 et 259—278 (1951). — [6] Remmert, R., u. K. Stein: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [7] Satake, I.: On the compactification of the Siegel space. J. Indian math. Soc. **20**, 259—281 (1956). — [8] Serre, J. P.: Géométrie analytique et géométrie algébrique. Ann. Institut Fourier **6**, 1—42 (1955—56).

(Eingegangen am 7. Mai 1958)

SOMMER, F.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 111—133 (1958)

Komplex-analytische Blätterung reeller Mannigfaltigkeiten im C^n

Von

FRIEDRICH SOMMER in Münster (Westf.)

HEINRICH BEHNKE zum 60. Geburtstage am 9. Oktober 1958 gewidmet

Inhaltsübersicht

Einleitung

Gegeben sei der n-dimensionale komplexe lineare Vektorraum C^n der n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, mit $x_j = x_j' + i\,x_j''$, $j = 1,2, \ldots, n$. Die $2n$-Tupel $(x_1', \ldots, x_n', x_1'', \ldots, x_n'')$ bilden den dem C^n zugeordneten reellen linearen Raum R^{2n}. Im R^{2n} sei eine Punktmenge M durch ein reelles Gleichungssystem $\varphi_j(x_1', \ldots, x_n', x_1'', \ldots, x_n'') = 0$, $j = 1,2, \ldots, k$, oder in Parameterform $x_j' = \xi_j'(t_1, \ldots, t_l)$; $x_j'' = \xi_j''(t_1, \ldots, t_l)$; $j = 1, 2, \ldots, n$, gegeben. Unser Problem lautet: *Wann stellt M eine analytische Menge dar, oder* — falls dies nicht der Fall sein sollte — *wann ist M eine Schar analytischer Mengen?* Zur Beantwortung dieser Fragen muß man gewisse Anforderungen an M und die definierenden Gleichungen stellen, die zugleich den zur Lösung zu beschreitenden Weg bestimmen. Um einen Überblick zu gewinnen, wird man zunächst lineare Mannigfaltigkeiten im R^{2n} betrachten. In diesem Falle kann die Fragestellung mit elementaren Mitteln der *linearen Algebra* behandelt werden[1]). Dabei ist die Verwendung von Matrizen mit komplexen Elementen zweckmäßig, die wir folgendermaßen bezeichnen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}, \ldots, b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{m1}, \ldots, b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11}, \ldots, \bar{b}_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{b}_{m1}, \ldots, \bar{b}_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Gleichungssystem im R^{2n} schreibt sich dann in der komplexen Form:

$$(0.1) \qquad B x + \bar{B} \bar{x} + y_0 = 0\,,$$

1) Siehe auch: F. SOMMER [9].

wobei y_0 ein reeller m-zeiliger Spaltenvektor ist. Hier gilt nun u. a. die folgende Aussage:

Die Matrizengleichung (0.1) *stellt genau eine* $(2k - r)$*-reellparametrige Schar paralleler analytischer Ebenen der komplexen Dimension* $n - k$ *dar, wenn*

$$\text{(0.2)} \qquad \textit{Rang}\,(B, \overline{B}) = \textit{Rang}\,(B, \overline{B}, y_0) = r \textit{ und Rang } B = k \textit{ ist.}$$

Das System (0.1) *stellt eine analytische Ebene der Dimension* $n - k$ *dar, wenn* $r = 2k$ *ist.*

Beschreibt man die Mannigfaltigkeit durch reelle Parameter in der Form

$$\text{(0.3)} \qquad x = Lt + x_0$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} l_{11}, \ldots, l_{1s} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ l_{n1}, \ldots, l_{ns} \end{pmatrix} \text{ komplex,} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_s \end{pmatrix} \text{ reell,} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \text{ komplex,}$$

so folgt:

Die lineare Mannigfaltigkeit (0.3) *stellt genau eine* $(2l - r)$*-reellparametrige Schar analytischer Ebenen der komplexen Dimension* $r - l$ *dar, wenn*

$$\text{(0.4)} \qquad \textit{Rang } L = l \textit{ und Rang} \begin{pmatrix} L \\ \overline{L} \end{pmatrix} = r$$

ist. Ist $r = 2l$, *so liefert* (0.3) *eine analytische Ebene der Dimension* l.

Die weiteren Untersuchungen sind den gekrümmten Flächen im R^{2n} gewidmet. Hier liegt ein Problem der *komplexen Differentialgeometrie* vor, und in diesem ersten Teil unserer Untersuchungen soll die *Methode* entwickelt werden, mit der sich die angegebene Problemstellung behandeln und lösen läßt. Das wesentliche Hilfsmittel ist der *Kalkül der infinitesimalen Transformationen.* [2]) Mit seiner Hilfe werden wir zunächst den bekannten Satz[3]) zeigen, daß eine einmal stetig differentiierbare Mannigfaltigkeit M^{2m}, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, genau dann eine analytische komplex-m-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, wenn sie in jedem Punkt eine m-dimensionale analytische Haupttangente besitzt. Ob dies der Fall ist, läßt sich unmittelbar aus den Rangzahlen der Funktionalmatrizen gemäß den obigen Bedingungen für analytische Ebenen erkennen. Dieser Satz von LEVI-CIVITA gibt uns die Möglichkeit, den entscheidenden Satz für die folgenden Untersuchungen zu beweisen:

Eine zweimalig stetig differentiierbare Mannigfaltigkeit M^{2n-r} *ist in der Umgebung eines Punktes P genau dann eine* $(2l - r)$*-parametrige Schar analytischer Mannigfaltigkeiten* M_C^{n-l}, *wenn es in der Umgebung des Punktes P eine* $(n - l)$*-dimensionale Verteilung von kontravarianten Tangentialvektoren an* M^{2n-r} *vom Typus* (1.0) *gibt, die zusammen mit ihren konjugiert komplexen Vektoren integrabel sind.*

---

[2]) Siehe: S.-S. CHERN [3] und CL. CHEVALLEY [4].
[3]) Siehe: T. LEVI-CIVITA [7].

Der Schluß dieser Untersuchungen ist einigen Anwendungen des obigen Satzes gewidmet.

Hierher gehört z. B. die Charakterisierung analytischer Hyperflächen: Eine Hyperfläche im C^n sei durch eine reelle, zweimal stetig differentiierbare Gleichung

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0$$

mit

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}, \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{x}_\nu}\right) = 1$$

gegeben. Es sei

$$d'\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} d x_\nu, \quad d''\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{x}_\nu} d\bar{x}_\nu, \quad d'd''\varphi = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\nu \partial \bar{x}_\mu} d x_\nu \wedge d\bar{x}_\mu .$$

Dann ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Hyperfläche in der Umgebung eines jeden Punktes eine einparametrige Schar analytischer Mannigfaltigkeiten M_C^{n-1} ist, das Verschwinden der alternierenden Differentialform $d'\varphi \wedge d''\varphi \wedge d'd''\varphi$ auf der Hyperfläche:

$$d'\varphi \wedge d''\varphi \wedge d'd''\varphi = 0 . \tag{0.5}$$

Diese Beziehung liefert für $n = 2$ das Verschwinden des Levischen Differentialausdrucks[4]), und für beliebiges n ist sie äquivalent mit den Bedingungen von Krzoska[5]).

Als weitere einfache Spezialfälle lassen sich die drei- und vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten im C^n vollständig behandeln sowie einige weitere Spezialfälle beliebiger Dimensionen. Auf die komplizierteren Fälle soll in einer weiteren Arbeit eingegangen werden.

1. Lineare Mannigfaltigkeiten

V^{2n} sei ein $2n$-dimensionaler linearer Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Im V^{2n} seien *zwei lineare Automorphismen J und Q* gegeben, die den Bedingungen

$$J^2 = -1, \tag{1.1}$$

$$Q^2 = 1, \tag{1.2}$$

$$JQ + QJ = 0 \tag{1.3}$$

genügen. Ist $a = \alpha + i\beta$ eine komplexe Zahl und x ein Element aus V^{2n}, so wird durch die Festsetzung

$$a x = \alpha x + \beta J x$$

bezüglich dieser Multiplikation der V^{2n} zu einem n-dimensionalen linearen Vektorraum V_C^n über dem Körper der komplexen Zahlen. Der V^{2n} wird also durch den Automorphismus J mit einer *komplexen Struktur* versehen. Speziell

[4]) Siehe: E. E. Levi [6].

[5]) Siehe: J. Krzoska [5].

ist $i x = J x$. Den Vektor $\bar{x} = Q x$ nennen wir den zu x *konjugiert komplexen Vektor* (bezüglich Q).

Der Automorphismus Q gibt Anlaß zur Bildung der *Projektionsoperatoren* $R = {}^1/_2 (1 + Q)$, $I = {}^1/_2 (1 - Q)$, die wegen (1.1) bis (1.3) den Relationen

$$R + I = 1, \tag{1.4}$$

$$RR = R, II = I, RI = IR = 0, \tag{1.5}$$

$$QR = RQ = R, QI = IQ = -I, \tag{1.6}$$

$$I = J R J^{-1} \tag{1.7}$$

genügen. Aus (1.7) folgt, daß die Räume $V^n_R = R(V^{2n})$ und $V^n_I = I(V^{2n})$ gleiche Dimensionen haben, aus (1.5), daß ihr Durchschnitt der Nullvektor ist, und daher aus (1.4), daß die Summe ihrer Dimensionen $2n$ ist. Folglich haben V^n_R und V^n_I die Dimension n. Wir nennen V^n_R den *reellen Teilraum*, V^n_I den *imaginären Teilraum* von V^n_C *bezüglich des Operators* Q. V^n_R ist dadurch gekennzeichnet, daß seine Elemente durch Q elementweise festgelassen werden; denn aus $x = Q x$ folgt nach (1.4) bis (1.6):

$$x = Rx + Ix = QRx + QIx = Rx - Ix,$$

also $x = Rx$. Andererseits ist $QRx = Rx$. Daher werden genau die Punkte aus V^n_R elementweise festgelassen. V^n_I ist derjenige Teilraum, dessen Elemente x durch Q in $-x$ übergeführt werden. Aus (1.7) folgt $V^n_I = J(V^n_R)$; denn es ist $J(V^n_R) = J R (V^{2n}) = I J (V^{2n}) = I (V^{2n}) = V^n_I$. Beachtet man noch, daß $V^n_R \cap V^n_I = 0$ ist, so ergibt sich, daß *jede Basis* $u_1, \ldots, u_n$ *des reellen Teilraumes* V^n_R *eine Basis des Raumes* V^n_C *ist*; denn $u_1, \ldots, u_n, J u_1, \ldots, J u_n$ sind linear unabhängig und spannen daher den gesamten Raum V^{2n} auf.

Umgekehrt gibt es zu jeder Basis $u_1, \ldots, u_n$ des V^n_C einen Automorphismus Q mit den Eigenschaften (1.2) und (1.3), der den durch $u_1, \ldots, u_n$ aufgespannten reellen Raum als seinen reellen Teilraum V^n_R besitzt: man ordne jedem Vektor $x = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$, mit komplexen x_k, den Vektor $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k u_k$ zu.

Zu einem Raum V^n_R gibt es *höchstens einen Automorphismus* Q mit den Eigenschaften (1.2) und (1.3), dessen reeller Teilraum V^n_R ist. Gäbe es zwei solche Automorphismen Q und Q^* mit den zugehörigen Projektionsoperatoren R, R^*, I, I^*, so wäre mit V^n_R auch der imaginäre Teilraum $V^n_I = J(V^n_R)$ beiden gemeinsam. Für jedes $x_1 \varepsilon V^n_R$ wäre dann $R x_1 = R^* x_1 = x_1$, $I x_1 = I^* x_1 = 0$ und für jedes $x_2 \varepsilon V^n_I$ entsprechend: $I x_2 = I^* x_2 = -x_2$, $R x_2 = R^* x_2 = 0$. Nun läßt sich jedes x eindeutig in der Form $x = x_1 + x_2$, $x_1 \varepsilon V^n_R$, $x_2 \varepsilon V^n_I$ darstellen, und daher ist

$$Qx = (R - I)(x_1 + x_2) = R x_1 - I x_2 = R^* x_1 - I^* x_2 = (R^* - I^*)(x_1 + x_2) = Q^* x$$

für jedes x, also $Q = Q^*$.

Die Operatoren Q *und die von einer Basis* $u_1, \ldots, u_n$ *des* V^n_C *aufgespannten reellen Teilräume* V^n_R *sind also einander eineindeutig zugeordnet.* Insbesondere hängt der Operator Q nicht von der Wahl der Basis $u_1, \ldots, u_n$ des Teilraumes

V^n_R ab. Man kann also jeden von Null verschiedenen Vektor aus V^n_R als Basisvektor u_1 wählen. Dann liegt Ju_1 niemals in V^n_R. Also enthält V^n_R *keine analytische Gerade*, d. h. keinen 2-dimensionalen reellen Raum der Gestalt $x = \lambda u$, $u \neq 0$, wobei λ ein komplexer Parameter ist. Umgekehrt ist eine Basis $u_1, \ldots, u_n$ eines Raumes V^n, der keine analytische Gerade enthält, stets auch eine Basis des Raumes V^n_C. Sonst wären $u_1, \ldots, u_n, Ju_1, \ldots, Ju_n$ linear abhängig, und es gäbe eine reelle Linearkombination $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k J u_k$, die von Null verschieden wäre und in V^n läge. $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$ und $Ju = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k J u_k$ würden dann in V^n liegen, und $x = \lambda u$, λ komplex, wäre entgegen der Voraussetzung eine in V^n liegende analytische Gerade. Also sind die Operatoren Q und die Räume V^n, die keine analytische Gerade enthalten, einander eineindeutig zugeordnet.

Zwei Operatoren Q und Q^*, die zu derselben komplexen Struktur J gehören, unterscheiden sich um eine Transformation T, die mit J vertauschbar ist: $Q^* = TQ$, also $TJ = Q^*Q^{-1}J = Q^*QJ = -Q^*JQ = JQ^*Q = JQ^*Q^{-1} = JT$. Eine solche Transformation, die mit J vertauschbar ist, heißt *analytisch*. Mit solchen Transformationen wollen wir uns nun beschäftigen.

Neben V^{2n} sei ein zweiter linearer Vektorraum V^{2m}_* über dem Körper der reellen Zahlen gegeben und in V^{2m}_* zwei lineare Operationen J_* und Q_*, die analog zu J und Q den Relationen (1.1), (1.2) und (1.3) genügen. Durch J_* wird auch der Raum V^{2m}_* zu einem komplexen Raum V^m_{*C}. Eine lineare Abbildung $y = Ax$ von V^{2n} in V^{2m}_*, die der Relation

$$J_* A = AJ \tag{1.8}$$

genügt, heißt eine *analytische Abbildung*. Die Relation (1.8) ist notwendig und hinreichend dafür, daß die Abbildung A eine komplex-lineare Abbildung von V^n_C in V^m_{*C} liefert.

Gilt für die Abbildung A die Beziehung

$$J_* A = -AJ\,, \tag{1.9}$$

so heißt A *antianalytisch*. Jede lineare Abbildung A läßt sich eindeutig als Summe einer analytischen Abbildung B und einer antianalytischen Abbildung C schreiben:

$$A = B + C \tag{1.10}$$

mit

$$J_* B = BJ\,, \quad J_* C = -CJ\,. \tag{1.11}$$

Dazu setze man

$$B = {}^1\!/_2 (A - J_* A J)\,, \quad C = {}^1\!/_2 (A + J_* A J)\,. \tag{1.12}$$

Man bestätigt sofort für B und C die Beziehungen (1.10) und (1.11). Andererseits folgt aus (1.10) und (1.11) unmittelbar die Darstellung (1.12) für die Abbildungen B und C, die damit durch A, J und J_* bestimmt sind.

Eine Abbildung A *heißt reell*, wenn sie V^{2n} in den reellen Teilraum V^m_{*R} des Raumes V^{2m}_* abbildet, d. h. wenn

$$Q^* A = A \tag{1.13}$$

ist. Ist A analytisch, so sind $Q_* A$ und $A Q$ antianalytisch; denn es gilt dann $J_*(Q_* A) = - Q_* J_* A = -(Q_* A) J$ und $J_*(A Q) = A J Q = -(A Q) J$. Ebenso folgt: ist A antianalytisch, so sind $Q_* A$ und AQ analytisch. Die Abbildung

$$\overline{A} = Q_* A Q \tag{1.14}$$

heißt die *zu A konjugiert komplexe Abbildung*. Ist A analytisch, so ist auch $\overline{A}$ analytisch, ist A antianalytisch, so auch $\overline{A}$. Eine reelle Abbildung A ist stets darstellbar in der Form

$$A x = B x + \overline{B}\,\overline{x}\,, \tag{1.15}$$

wobei B analytisch und $\overline{B}$ die zu B konjugiert komplexe Abbildung ist: $\overline{B} = Q_* B Q$, und $\overline{x}$ der zu x konjugiert komplexe Vektor: $\overline{x} = Q x$. Umgekehrt ist jede Abbildung der Gestalt (1.15) reell.

Eine Abbildung $y = A x$ bildet den Raum V^{2n} auf einen linearen Teilraum V^r_* von V^{2m}_* ab. Die reelle Dimension r des Bildraumes V^r_* heißt der *Rang von A*. Ist A analytisch, so ist V^r_* ein komplex-analytischer Teilraum V^k_{*C}. In diesem Falle ist $r = 2k$ gerade und k heißt der *komplexe Rang der analytischen Abbildung A*. Die Menge der durch A auf das Nullelement abgebildeten Vektoren x aus V^{2n} bildet einen linearen Vektorraum V^{2n-r} der Dimension $2n - r$. Ist A analytisch, so ist V^{2n-r} ein komplexer Teilraum V^{n-k}_C von V^n_C. Umgekehrt ist jeder lineare Vektorraum $V^{2n-r} \subset V^{2n}$ das Nullstellengebilde einer linearen Abbildung A, und jeder *komplexe* Teilraum $V^{n-k}_C \subset V^n_C$ das Nullstellengebilde einer analytischen Abbildung A. Indessen braucht eine Abbildung A nicht notwendig analytisch zu sein, wenn ihr Nullstellengebilde ein komplexer Teilraum von V^n_C ist. So ist z. B. das Nullstellengebilde einer antianalytischen Abbildung ein komplexer Teilraum des V^n_C.

Der komplexe Teilraum V^l_C maximaler Dimension, der im Nullstellengebilde von A enthalten ist, ergibt sich wie folgt: Wir schreiben die Gleichung des Nullstellengebildes von A in der Form

$$0 = B x + C x\,, \tag{1.16}$$

wobei B analytisch und C antianalytisch ist. Mit x muß auch $J x$ in V^l_C liegen, also der Gleichung (1.16) genügen, d. h. es muß gelten:

$$0 = B J x + C J x\,,$$

oder nach (1.11):

$$0 = B x - C x\,;$$

folglich in Verbindung mit (1.16):

$$0 = B x \text{ und } 0 = C x\,. \tag{1.17}$$

Diese Gleichungen sind also notwendige Bedingungen für die Vektoren von V^l_C. Gemäß (1.16) sind sie aber auch hinreichend. Es gilt somit:

(1. A) *Der komplexe Teilraum V^l_C maximaler Dimension im Lösungsgebilde des Gleichungssystems $0 = Ax = Bx + Cx$, wobei B analytisch und C antianalytisch ist, wird durch die Gleichungen $0 = Bx$ und $0 = Cx$ gegeben.*

Für reelle Gleichungen ist $C = Q_* B$, so daß das System $0 = Cx$ mit $0 = Bx$ äquivalent ist. Schreiben wir Cx dann in der Form $\overline{B}\overline{x}$, so gilt:

(1. B) *Der komplexe Teilraum V^l_C maximaler Dimension l im Lösungsgebilde des reellen Gleichungssystems $0 = Ax = Bx + \overline{B}\overline{x}$ ist durch das System $0 = Bx$ gegeben. Hat B den komplexen Rang k, so ist $l = n - k$.*

Die reelle Dimension des komplexen Raumes V^l_C ist $s = 2l$. Das Lösungsgebilde des Systems $0 = Ax$ hat die Dimension $2n - r$, wenn r der Rang von A ist. Es ist stets $s = 2l = 2n - 2k \leqq 2n - r$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $r = 2k$ ist. Daher folgt:

(1. C) *Das reelle Gleichungssystem $0 = Ax = Bx + \overline{B}\overline{x}$ besitzt als Lösungsmannigfaltigkeit genau dann einen komplexen Teilraum V^l_C, wenn der komplexe Rang von B gleich $n - l$ und der Rang von A gleich $2n - 2l$ ist.*

Ein linearer Teilraum V^r des Raumes V^{2n} kann auch in *Parameterform* als Bild eines reellen linearen Vektorraumes V^m gegeben sein:

$$x = Lt\,, \tag{1.18}$$

wobei t den Raum V^m durchläuft und L eine lineare Abbildung von V^m in V^{2n} ist. Die Dimension r von V^r ist gleich dem Rang von L. Wir wollen wieder die Frage nach dem komplexen Teilraum maximaler Dimension von V^n_C in V^r stellen. Wir betten V^m als reellen Teilraum V^m_R in einen komplexen Raum V^m_C ein und erweitern die Abbildung (1.18) zu einer analytischen Abbildung von V^m_C in V^n_C. J_* liefere die komplexe Struktur von V^m_C. Die Erweiterung von $V^m = V^m_R$ zu V^m_C ist bis auf Isomorphie nur auf eine Weise möglich, und die Abbildung von V^m_C in V^n_C ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie wieder mit L. Die Abbildung L habe den komplexen Rang l.

Der größte komplexe Raum $V^k_C \subset V^r$ besteht aus der Gesamtheit aller Vektoren $x \in V^r$, für die gleichzeitig ix in V^r liegt. Also muß für diese x außer (1.18) auch $Jx = Lt'$ mit $t' \in V^m_R$ oder

$$x = -JLt', \quad t' \in V^m_R \tag{1.19}$$

gelten. Gleichung (1.19) liefert im V^n_C einen reellen linearen Teilraum V^r_* der reellen Dimension r. Es ist dann

$$V^k_C = V^{2k} = V^r \cap V^r_*. \tag{1.20}$$

Die Dimension k läßt sich bestimmen, wenn wir die Summe $V^s = V^r + V^r_*$ bilden. V^s besteht aus allen Vektoren, die sich als Summe zweier Vektoren (1.18) und (1.19) darstellen lassen:

$$x = Lt - JLt', \; t \in V^m_R, \; t' \in V^m_R\,.$$

Da L analytisch ist, so gilt nach (1.8): $JL = LJ_*$, und daher enthält V^s alle Vektoren der Form

$$x = L(t - J_* t')\,.$$

Nun durchläuft $t - J_* t'$ den gesamten Raum V_C^m. Der Raum V^s ist aber ein linearer komplexer Raum, dessen komplexe Dimension gleich dem Rang l von L ist. V^s hat daher die reelle Dimension $s = 2l$. Aus der bekannten Relation für die Dimension von Vereinigung und Durchschnitt zweier linearer Räume folgt nun $2l + 2k = 2r$, also $k = r - l$. Wir fassen dies Ergebnis zusammen:

(1. D) *Ein linearer Teilraum V^r des Raumes V^{2n}, der durch eine Gleichung $x = Lt$ gegeben ist, wobei t einen reellen linearen Vektorraum V^m durchläuft, besitzt einen maximalen komplexen Teilraum V_C^{r-l} der Dimension $r - l$, wenn r der reelle Rang und l der komplexe Rang von L ist.*

Bei der Komponentendarstellung der Vektorräume gehen die vorstehenden Abbildungen in Matrizengleichungen und ihre Rangzahlen in Rangzahlen der Matrizen über. Wählen wir als Basis des V^{2n} Vektoren $(u_1, \ldots, u_n, J u_1, \ldots, J u_n)$, so lassen sich die Vektoren

$$x = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu u_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x'_\nu u_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} x''_\nu J u_\nu, \; x_\nu = x'_\nu + i x''_\nu, \; \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

durch n-zeilige komplexe Spaltenvektoren darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x' + i x'', \; x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \; x'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ \vdots \\ x''_n \end{pmatrix}.$$

Entsprechendes gilt für die Vektoren y des Vektorraumes V_*^{2m}. Eine lineare Abbildung schreibt sich dann in der Form

$$y = Bx + C\bar{x}, \tag{1.21}$$

wobei B und C komplexe Matrizen mit m-Zeilen und n-Spalten sind und $\bar{x} = x' - i x''$ ist. Aus (1.21) folgt noch

$$\bar{y} = \bar{C}x + \bar{B}\bar{x}, \tag{1.22}$$

und aus beiden Gleichungen (1.21) und (1.22) erkennt man, daß der *reelle* Rang der Abbildung (1.21) gleich dem Rang der *komplexen* Matrix

$$\begin{pmatrix} B, & C \\ \bar{C}, & \bar{B} \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

ist. Liegt eine reelle Abbildung vor, so ist $C = \bar{B}$, und der Rang der Matrix (1.23) ist gleich dem Rang der Matrix $(B, \bar{B})$.

Stellt man einen reellen linearen Vektorraum in V_C^n durch reelle Parameter dar:

$$x = Lt, \tag{1.24}$$

wobei L eine komplexe Matrix und t ein reeller Spaltenvektor ist, so hat man auch die Beziehung

$$\bar{x} = \bar{L}t, \tag{1.25}$$

und man erkennt, daß die reelle Dimension des Vektorraumes gleich dem Rang der komplexen Matrix

$$\begin{pmatrix} L \\ \bar{L} \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

ist, während der komplexe Rang der Abbildung (1.24) gleich dem Rang der komplexen Matrix L ist.

Wir wenden die vorstehenden Ergebnisse auf lineare Mannigfaltigkeiten im C^n, dem Raum von n komplexen Veränderlichen, an. Im folgenden seien B und C komplexe Matrizen mit m Zeilen und n Spalten, $\overline{B}$ und $\overline{C}$ die zu B und C konjugiert komplexen Matrizen, x ein n-dimensionaler komplexer Spaltenvektor, $\overline{x}$ der zu x konjugiert komplexe Vektor und y_0 ein m-dimensionaler komplexer Spaltenvektor. Dann folgt aus (1. A), (1. B) und (1. C):

Satz 1. *Gegeben sei eine reelle lineare Mannigfaltigkeit M im C^n durch eine Matrizengleichung*

$$0 = Bx + C\overline{x} + y_0 . \tag{1.27}$$

Es sei

$$r = \mathit{Rang}\begin{pmatrix} B, & C \\ \overline{C}, & \overline{B} \end{pmatrix} = \mathit{Rang}\begin{pmatrix} B, & C, & y_0 \\ \overline{C}, & \overline{B}, & \overline{y}_0 \end{pmatrix} \quad \mathit{und} \quad k = \mathit{Rang}\begin{pmatrix} B \\ \overline{C} \end{pmatrix}.$$

Dann besteht M aus einer $(2k-r)$-parametrigen Schar zueinander paralleler analytischer Ebenen der komplexen Dimension $n-k$. Ist x_0 ein Punkt auf M, so genügt die durch x_0 gehende $(n-k)$-dimensionale analytische Ebene der Gleichung

$$\begin{pmatrix} B \\ \overline{C} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} B \\ \overline{C} \end{pmatrix} x_0 . \tag{1.28}$$

Es gibt in M keine analytische Ebene von höherer Dimension als $n-k$.

Zusatz 1.1. *Ist $C = \overline{B}$ und y_0 reell, so stellt (1.27) ein reelles Gleichungssystem dar. In diesem Falle ist*

$$r = \mathit{Rang}\,(B, \overline{B}) = \mathit{Rang}\,(B, \overline{B}, y_0) \ \mathit{und}\ k = \mathit{Rang}\ B,$$

und die durch einen Punkt x_0 von M gehende $(n-k)$-dimensionale analytische Ebene genügt der Gleichung $Bx = Bx_0$.

Zusatz 1.2. *Eine Matrizengleichung (1.27) besitzt als Lösungsmannigfaltigkeit genau dann eine analytische Ebene der Dimension $n-k$, wenn*

$$\mathit{Rang}\begin{pmatrix} B, & C \\ \overline{C}, & \overline{B} \end{pmatrix} = \mathit{Rang}\begin{pmatrix} B, & C, & y_0 \\ \overline{C}, & \overline{B}, & \overline{y}_0 \end{pmatrix} = 2\,\mathit{Rang}\begin{pmatrix} B \\ \overline{C} \end{pmatrix} = 2k$$

ist.

Zusatz 1.3. *Eine reelle Matrizengleichung*

$$0 = Bx + \overline{B}\overline{x} + y_0$$

besitzt als Lösungsmannigfaltigkeit genau dann eine analytische Ebene der Dimension $n-k$, wenn

$$\mathit{Rang}\,(B, \overline{B}) = \mathit{Rang}\,(B, \overline{B}, y_0) = 2\,\mathit{Rang}\ B = 2k$$

ist.

Zur Darstellung von M in Parameterform bedienen wir uns einer komplexen Matrix L mit n Zeilen und m Spalten und eines reellen m-zeiligen Spaltenvektors t. Aus Eigenschaft (1. D) folgt dann

Satz 2. *Eine reelle lineare Mannigfaltigkeit M sei in der Form*

$$x = Lt + x_0 \tag{1.29}$$

gegeben, wobei t alle reellen m-zeiligen Spaltenvektoren durchläuft.

Es sei

$$r = Rang\binom{L}{\bar{L}} \text{ und } l = Rang\ L\,.$$

Dann besteht M aus einer $(2l - r)$-parametrigen Schar zueinander paralleler analytischer Ebenen der komplexen Dimension $r - l$. M enthält keine analytischen Ebenen höherer Dimension.

Eine Parameterdarstellung der durch einen Punkt x^* auf M gehenden $(r - l)$-dimensionalen analytischen Ebene kann man auf folgende Weise gewinnen: $t_1, \ldots, t_{m-r}$ seien $m - r$ komplex linear unabhängige komplexe Lösungsvektoren der beiden Systeme $Lt = 0$, $\bar{L}t = 0$. Sie bilden eine Basis aller Vektoren, die diesen beiden Gleichungen genügen. $t_{m-r+1}, \ldots, t_{m-l}$ seien weitere Lösungsvektoren des Systems $\bar{L}t = 0$, so daß $t_1, \ldots, t_{m-l}$ eine Basis aller Vektoren bilden, für die $\bar{L}t = 0$ ist.

Man setze nun

$$x_j = Lt_j \text{ für } j = m - r + 1, \ldots, m - l\,. \tag{1.30}$$

Dann sind die x_j linear unabhängig, da aus $0 = \sum\limits_{j=m-r+1}^{m-l} \lambda_j x_j = L \sum\limits_{j=m-r+1}^{m-l} \lambda_j t_j$ folgen würde: $\sum\limits_{j=m-r+1}^{m-l} \lambda_j t_j = \sum\limits_{k=1}^{m-r} b_k t_k$ und hieraus: $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m - r$, $\lambda_j = 0$, $j = m - r + 1, \ldots, m - l$. Die Gesamtheit der x mit

$$x = \sum_{j=m-r+1}^{m-l} \lambda_j x_j + x^* \tag{1.31}$$

bildet dann eine $(r - l)$-dimensionale analytische Ebene.

Alle diese x lassen sich in der Gestalt (1.29) mit reellen t darstellen: Aus (1.29) und (1.30) folgt zunächst für jedes x der Gestalt (1.31):

$$x = \sum_{j=m-r+1}^{m-l} \lambda_j x_j + Lt^* + x_0 = L \sum_{j=m-r+1}^{m-l} \lambda_j t_j + Lt^* + x_0\,,$$

wenn $x^* = Lt^* + x_0$ ist. Aus $\bar{L}t_j = 0$ folgt $L\bar{t}_j = 0$ und daraus

$$0 = L \sum_{j=m-r+1}^{m-l} \bar{\lambda}_j \bar{t}_j\,,$$

folglich

$$x = Lt + x_0$$

mit reellem

$$t = \sum_{j=m-r+1}^{m-l} (\lambda_j t_j + \bar{\lambda}_j \bar{t}_j) + t^*\,.$$

Die Gleichung (1.31) liefert also für variable λ_j, $j = m - r + 1, \ldots, m - l$, die durch x^* gehende in M liegende analytische Ebene maximaler Dimension.

2. Analytisch geblätterte Mannigfaltigkeiten

Den folgenden Betrachtungen legen wir den Raum C^n der n-Tupel komplexer Zahlen $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_j = x_j' + i x_j''$, sowie den ihm zugeordneten Raum R^{2n} der $2n$-Tupel reeller Zahlen $(x_1', \ldots, x_n', x_1'', \ldots, x_n'')$ zugrunde. Unter

einer *infinitesimalen Transformation*[a]) in einem Gebiet G des C^n verstehen wir ein kontravariantes Vektorfeld

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} X_j^* \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \tag{2.1}$$

mit komplexwertigen hinreichend oft reell stetig differentiierbaren Funktionen $X_j, X_j^*, j = 1,2, \ldots, n$, in G, welches jedem Punkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ aus G den Vektor

$$X(P) = \sum_{j=1}^{n} X_j(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} X_j^*(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \tag{2.2}$$

zuordnet. Eine Transformation (2.1) soll *vom Typus* (1.1) heißen. Wir nennen sie *vom Typus* (1.0), wenn sie die Gestalt

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.3}$$

hat, und *vom Typus* (0.1), wenn sie die Gestalt

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j^* \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \tag{2.4}$$

hat. Eine Transformation heißt *analytisch*, wenn sie *vom Typus* (1.0) ist und die X_j *holomorphe* Funktionen von $(x_1, \ldots, x_n)$ sind. Sie heißt *antianalytisch*, wenn sie vom Typus (0.1) ist und die X_j^* antiholomorphe Funktionen von $(x_1, \ldots, x_n)$, also holomorphe Funktionen von $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ sind.

Jeder Transformation X ordnen wir ihre *konjugiert komplexe Transformation*

$$\overline{X} = \sum_{j=1}^{n} \overline{X}_j^* \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \overline{X}_j \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j} \tag{2.5}$$

zu. Ist $X = \overline{X}$, also $X_j^* = \overline{X}_j$ für $j = 1,2, \ldots, n$, so heißt X *reell*.

Sinngemäß heißt auch ein Vektor $X(P)$ im Punkte P vom Typus (1.1), (1.0) oder (0.1), wenn der zugehörige Operator (2.2) im Punkte P die Gestalt (2.1), (2.3) oder (2.4) hat. $\overline{X}(P)$ heißt zu $X(P)$ konjugiert komplex, wenn $X(P)$ und $\overline{X}(P)$ entsprechend den Formeln (2.1) und (2.5) auseinander hervorgehen, und $X(P)$ heißt reell, wenn $X(P) = \overline{X}(P)$ ist.

Die Gesamtheit aller Vektoren $X(P)$ in einem Punkte P bildet dort einen $2n$-dimensionalen komplexen Vektorraum V_C^{2n}. Dieser Raum besitzt einen Teilraum V_C^n aller Vektoren vom Typus (1.0), den wir den *analytischen Teilraum* von V_C^{2n} nennen. Er ist isomorph zum Vektorraum des C^n.

Die hier gegebenen Definitionen sind invariant gegenüber analytischen Koordinatentransformationen.

Aus zwei infinitesimalen Transformationen $X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} X_j^* \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$

[a]) Zur Theorie der infinitesimalen Transformationen siehe: CL. CHEVALLEY [4], insb. Kap. III. und S.-S. CHERN [3], insb. Kap. III, § 4.

und $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} Y_j^* \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$ in einem Gebiet G erhält man eine neue Transformation durch Bildung des *Klammerausdruckes*

$$(2.6) \qquad [X, Y] = Y X - X Y$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(Y_k \frac{\partial X_j}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(Y_k^* \frac{\partial X_j}{\partial \bar{x}_k} - X_k^* \frac{\partial Y_j}{\partial \bar{x}_k} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(Y_k \frac{\partial X_j^*}{\partial x_k} - X_k \frac{\partial Y_j^*}{\partial x_j} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(Y_k^* \frac{\partial X_j^*}{\partial \bar{x}_k} - X_k^* \frac{\partial Y_j^*}{\partial \bar{x}_k} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}.$$

Man liest aus dieser Formel unmittelbar ab, daß der Klammerausdruck $[X, Y]$ gleichzeitig mit X und Y wieder vom Typus (1.0), vom Typus (0.1), analytisch antianalytisch oder reell ist.

Wir betrachten jetzt eine *reelle Mannigfaltigkeit* M^{2n-r} im C^n. Sie sei lokal durch r reelle zweimal stetig differentiierbare Gleichungen

$$(2.7) \qquad \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, r\,,$$

gegeben, wobei die Funktionalmatrix überall auf M^{2n-r} den maximalen Rang r hat:

$$(2.8) \qquad \mathrm{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}\,,\ \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \bar{x}_\mu} \right) = r\,.$$

Ein kontravarianter Vektor $X(P)$ in einem Punkt P der Mannigfaltigkeit heißt *tangential an* M^{2n-r}, wenn im Punkte P die Beziehungen

$$(2.9) \qquad X\,\varphi_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, r,$$

gelten. Da die φ_ν reell sind, so besagt die Beziehung (2.9), daß sowohl der *Realteil* $\frac{1}{2}(X + \overline{X})$ als auch der *Imaginärteil* $\frac{1}{2i}(X - \overline{X})$ von $X(P)$ tangential an M^{2n-r} sind, und damit gilt gleiches auch für den Vektor $\overline{X}(P)$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren in einem Punkte P bildet einen $(2n - r)$-dimensionalen komplexen Vektorraum V_C^{2n-r}.

Die Tangentialvektoren $X(P)$ an die Mannigfaltigkeit M^{2n-r} und die kontravarianten Vektoren der Mannigfaltigkeit im Punkte P sind einander eineindeutig zugeordnet. Ist $(t_1, \ldots, t_{2n-r})$ ein Parametersystem, so daß in der Umgebung von P die Mannigfaltigkeit durch die zweimal stetig differentiierbaren Gleichungen

$$(2.10) \qquad \left.\begin{aligned} X_j &= \psi_j(t_1, \ldots, t_{2n-r}) \\ \overline{X}_j &= \overline{\psi}_j(t_1, \ldots, t_{2n-r}) \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

gegeben ist, wobei die Funktionalmatrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_k} \\ \frac{\partial \overline{\psi}_j}{\partial t_k} \end{pmatrix}$ den Rang $2n - r$ hat, so sind den $2n - r$ linear unabhängigen Vektoren $\frac{\partial}{\partial t_k}$, $k = 1, 2, \ldots, 2n - r$ in jedem Punkt einer Umgebung von P auf M^{2n-r} die $2n - r$ linear unabhängigen

reellen Vektoren

$$X_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{\varphi}_j}{\partial t_k} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n-r, \tag{2.11}$$

zugeordnet, die jeweils in dem betrachteten Punkt eine Basis des Vektorraumes V_C^{2n-r} bilden.

Hat man in der Umgebung von P im C^n eine infinitesimale Transformation X gegeben und sind auf M^{2n-r} die Vektoren von X Tangentialvektoren an M^{2n-r}, so bilden die zugeordneten kontravarianten Vektoren der Mannigfaltigkeit M^{2n-r} in M^{2n-r} eine infinitesimale Transformation X^*, die man die *Beschränkung von X auf M^{2n-r}* nennt. Ist Y eine zweite derartige Transformation, die eine Beschränkung Y^* auf M^{2n-r} besitzt, so besitzt auch $[X, Y]$ eine Beschränkung $[X, Y]^*$ auf M^{2n-r}, und es gilt[7]: $[X, Y]^* = [X^*, Y^*]$. Auf Grund dieses Zusammenhanges können wir unsere Überlegungen wahlweise im Bereich der infinitesimalen Transformationen X^* von M^{2n-r} und im Bereich der infinitesimalen Transformationen X, die auf M^{2n-r} tangentiale Vektoren liefern, durchführen.

Nun sei V^{2n-r} der reelle Tangentialraum in einem Punkt P an M^{2n-r}. Gilt jetzt

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}\right) = k, \tag{2.12}$$

so gibt es nach (1.B) einen Teilraum V^{2n-2k} maximaler Dimension von V^{2n-r}, der ein komplexer Vektorraum V_C^{n-k} ist und als solcher durch $n-k$ linear unabhängige Vektoren vom Typus (1.0)

$$X_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} X_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-k, \tag{2.13}$$

aufgespannt wird. Die X_ν sind $n-k$ linear unabhängige Lösungen des Gleichungssystems

$$Y \varphi_\varrho = \sum_{\mu=1}^{n} Y_\mu \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x_\mu} = 0, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.14}$$

Gemeinsam mit

$$\overline{X}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \overline{X}_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_\mu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-k, \tag{2.15}$$

bilden die X_ν und $\overline{X}_\nu$ eine Basis aller Tangentialvektoren, deren Real- und Imaginärteile im reellen Unterraum V^{2n-2k} von V^{2n-r} liegen. Folglich bilden die reellen Vektoren

$$\left.\begin{aligned} Y_\nu &= \frac{1}{2}(X_\nu + \overline{X}_\nu) \\ Z_\nu &= \frac{1}{2i}(X_\nu - \overline{X}_\nu) \end{aligned}\right\} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-k, \tag{2.16}$$

[7]) Siehe: Cl. Chevalley [4].

gemeinsam mit $2k-r$ weiteren reellen Vektoren

$$(2.17)\quad X_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} X_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \sum_{\mu=1}^{n} \overline{X}_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_\mu}, \quad \nu = 2n-2k+1, \ldots, 2n-r,$$

eine Basis aller reellen Vektoren aus V^{2n-r}.

Wir wollen nun annehmen, daß überall auf M^{2n-r} die Rangzahl k konstant ist. Sicherlich gibt es in jeder Umgebung eines Punktes von M^{2n-r} ein Gebiet auf M^{2n-r}, wo dies zutrifft. Dann können wir in jedem Punkte von M^{2n-r} den reellen Tangentialraum V^{2n-r} konstruieren und zu ihm eine Basis mittels der Vektoren (2.13), (2.15), (2.17), wobei die Funktionen $X_{\nu\mu}$ und $\overline{X}_{\nu\mu}$ mindestens $(\varrho-1)$-mal stetig differentiierbar sind, wenn M^{2n-r} wenigstens ϱ-mal stetig differentiierbar ist.

Auf diese Weise erhalten wir auf M^{2n-r} eine Verteilung $\mathfrak{V}$ reeller infinitesimaler Transformationen der Dimension $2n-r$ und M^{2n-r} ist Integralmannigfaltigkeit dieser Verteilung.

Sei jetzt eine Unterverteilung von $\mathfrak{V}$ durch $2n-l$ linear unabhängige infinitesimale Transformationen Y_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, 2n-l$, gegeben. Eine solche Unterverteilung ist nach dem Frobeniusschen Lemma[8]) genau dann lokal integrabel, wenn die Klammerausdrücke (2.6) Linearkombinationen der Y_ν sind:

$$(2.18)\qquad [Y_\nu, Y_\mu] = \sum_{\varrho=1}^{2n-l} a_{\nu\mu,\varrho}\, Y_\varrho.$$

In diesem Falle ist M^{2n-r} lokal darstellbar als $(l-r)$-parametrige Schar $(2n-l)$-dimensionaler Teilmannigfaltigkeiten, deren Tangentialräume V^{2n-l} durch die Y_ν aufgespannt werden.

Wollen wir die Frage untersuchen, ob M^{2n-r} lokal in analytische Teilmannigfaltigkeiten geblättert ist, so müssen wir eine Unterverteilung von $\mathfrak{V}$ finden, die integrabel ist und in jedem Punkte einen komplex-linearen Teilraum von V_C^m aufspannt. Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst den Fall, daß M^{2n-r} einmal stetig differentiierbar, von gerader Dimension $2n-2l$ ist und in jedem Punkt einen komplex-analytischen Tangentialraum besitzt. In diesem Falle läßt sich die Verteilung allein durch eine Basis (2.16) darstellen. Durch passende Linearkombinationen und eventuelle Umbenennungen der Variablen können wir die infinitesimalen Transformationen (2.16) auf die Form

$$(2.19)\qquad X_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \sum_{\mu=n-l+1}^{n} X_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-l,$$

und

$$(2.20)\qquad \overline{X}_\nu = \frac{\partial}{\partial \overline{x}_\nu} + \sum_{\mu=n-l+1}^{n} \overline{X}_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_\mu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-l,$$

bringen. Man kann jetzt die Gleichungen (2.7) nach den x_μ und $\overline{x}_\mu$,

---

[8]) Siehe: S.-S. CHERN [3].

$\mu = n - l + 1, \ldots, n$, auflösen und in der Gestalt

$$\left.\begin{aligned}\Phi_\mu &\equiv x_\mu - \Psi_\mu(x_1, \ldots, x_{n-l}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-l}) = 0\\ \bar{\Phi}_\mu &\equiv \bar{x}_\mu - \bar{\Psi}_\mu(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-l}, x_1, \ldots, x_{n-l}) = 0\end{aligned}\right\} \mu = n - l + 1, \ldots, n \tag{2.21}$$

schreiben. Aus den Bedingungen, daß die X_ν und $\bar{X}_\nu$ tangential an M^{2n-2l} sind, folgt nun

$$X_\nu \Phi_\mu = 0, \; X_\nu \bar{\Phi}_\mu = 0, \; \bar{X}_\nu \Phi_\mu = 0, \; \bar{X}_\nu \bar{\Phi}_\mu = 0, \quad \begin{cases}\nu = 1, 2, \ldots, n - l,\\ \mu = n - l + 1, \ldots, n.\end{cases} \tag{2.22}$$

Die zweiten und dritten Gleichungen liefern die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_\mu}{\partial x_\nu} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Psi_\mu}{\partial \bar{x}_\nu} = 0\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n - l, \; \mu = n - l + 1, \ldots, n, \tag{2.23}$$

also die Holomorphie der Funktionen Ψ_μ in Abhängigkeit von $x_1, \ldots, x_{n-l}$:

$$\left.\begin{aligned}x_\mu &= \Psi_\mu(x_1, \ldots, x_{n-l})\\ \bar{x}_\mu &= \bar{\Psi}_\mu(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-l})\end{aligned}\right\} \mu = n - l + 1, \ldots, n\,. \tag{2.24}$$

Damit haben wir folgendes Ergebnis[9]):

Satz 3 (Levi-Civita): *Eine reelle $(2n - 2l)$-dimensionale Mannigfaltigkeit M^{2n-2l} im C^n, die durch $2l$ reelle einmal stetig differentiierbare Gleichungen*

$$\varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2l\,,$$

mit

$$\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}, \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \bar{x}_\mu}\right) = 2l$$

gegeben ist, ist genau dann eine komplex analytische Mannigfaltigkeit M_C^{n-l}, wenn sie in jedem Punkt eine analytische Tangentialebene der komplexen Dimension $n - l$ besitzt. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}\right) = l$$

ist.

Setzt man auf M^{2n-2l} in die Koeffizienten $X_{\nu\mu}$ und $\bar{X}_{\nu\mu}$ der Transformationen (2.19) und (2.20) die Variablen $x_\mu, \bar{x}_\mu, \mu = n - l + 1, \ldots, n$, gemäß (2.21) ein, so werden die $X_{\nu\mu}$ zu holomorphen Funktionen $X^*_{\nu\mu}$ von $x_1, \ldots, x_{n-l}$ und die $\bar{X}_{\nu\mu}$ zu antiholomorphen Funktionen $\bar{X}^*_{\nu\mu}$ von $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-l}$. Dies folgt daraus, daß die Vektoren X_ν und $\bar{X}_\nu$ auf M^{2n-2l} eindeutig bestimmt sind, andererseits aber die Vektoren

$$\left.\begin{aligned}X_\nu &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \sum_{\mu = n-l+1}^{n} X^*_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\\ \bar{X}_\nu &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\nu} + \sum_{\mu = n-l+1}^{n} \bar{X}^*_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_\mu}\end{aligned}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, n - l\,, \tag{2.25}$$

mit

$$X^*_{\nu\mu} = \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}\,, \quad \bar{X}^*_{\nu\mu} = \frac{\partial \bar{\psi}_\mu}{\partial \bar{x}_\nu} \tag{2.26}$$

---

[9]) Siehe: T. Levi-Civita [7].

tangential an M^{2n-2l} sind. Die $X^*_{\nu\mu}$ sind aber auf M^{2n-2l} nach (2.26) holomorphe Funktionen und die $\overline{X}^*_{\nu\mu}$ antiholomorphe Funktionen von $x_1, \ldots, x_{n-l}$.

Kehren wir nun zur Mannigfaltigkeit M^{2n-r} zurück mit einer Basis (2.13), (2.15), (2.17) aller Tangentialvektoren in jedem Punkte P. M^{2n-r} sei zweimal stetig differentiierbar. Besitzt M^{2n-r} eine komplex-analytische Blätterung in analytische Mannigfaltigkeiten M^{n-l}_C, so liefern die Tangentialvektoren in jedem Punkt P von M^{2n-r} an die Mannigfaltigkeit M^{n-l}_C, die durch ihn hindurchgeht, eine Unterverteilung der Verteilung (2.13), (2.15), die integrabel ist. Es gibt dann notwendig in der Umgebung eines jeden Punktes P eine Basis dieser Unterverteilung:

$$(2.27)\qquad Y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} Y_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \overline{Y}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \overline{Y}_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_\mu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-l,$$

die die Integrabilitätsbedingungen erfüllt ($\varrho, \sigma = 1,2, \ldots, n-l$):

$$(2.28)\qquad [Y_\varrho, Y_\sigma] = \sum_{\nu=1}^{n-l} a_{\varrho\sigma,\nu}\, Y_\nu,\ [\overline{Y}_\varrho, \overline{Y}_\sigma] = \sum_{\nu=1}^{n-l} \overline{a}_{\varrho\sigma,\nu}\, \overline{Y}_\nu,$$

$$(2.29)\qquad [Y_\varrho, \overline{Y}_\sigma] = \sum_{\nu=1}^{n-l} b_{\varrho\sigma,\nu}\, Y_\nu + \sum_{\nu=1}^{n-l} b^*_{\varrho\sigma,\nu}\, \overline{Y}_\nu.$$

Hat man umgekehrt auf M^{2n-r} eine Unterverteilung vom Typus (1.0) mit einer Basis

$$(2.30)\qquad Y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} Y_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-l,$$

gegeben, die zusammen mit den konjugiert komplexen Vektoren $\overline{Y}_\nu$ den Integrabilitätsbedingungen (2.28) und (2.29) genügt, so ist nach dem Frobeniusschen Lemma diese Verteilung integrabel. Die reellen Teilmannigfaltigkeiten M^{2n-2l} der Integralschar dieser Verteilung erfüllen dann genau die Voraussetzungen des Satzes 3 und sind daher analytische Mannigfaltigkeiten M^{n-l}_C der komplexen Dimension $n-l$. Es gilt also

Satz 4. *Eine zweimal stetig differentiierbare reelle Mannigfaltigkeit M^{2n-r} im C^n sei durch r reelle Gleichungen*

$$\varphi_\nu(x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, r$$

mit

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}, \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \overline{x}_\mu}\right) = r$$

gegeben. Überall auf M^{2n-r} sei

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu}\right) = k.$$

In der Umgebung eines Punktes P sei

$$(2.31)\qquad X_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} X_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-k,$$

eine Basis aller Tangentialvektoren vom Typus (1.0) *an M^{2n-r}. Dann ist M^{2n-r} in der Umgebung von P genau dann als $(2l-r)$-parametrige Schar analytischer*

Mannigfaltigkeiten M_C^{n-l} darstellbar, wenn es eine Unterverteilung von (2.31) mit einer Basis

$$Y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} Y_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-l, \tag{2.32}$$

gibt, die mit den konjugiert komplexen Transformationen $\overline{Y}_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots, n-l$, den Integrabilitätsbedingungen (2.28) und (2.29) genügt.

Damit ist unser Problem, zu einer reell gegebenen Mannigfaltigkeit eine maximale analytische Blätterung zu finden, auf die Aufgabe zurückgeführt, eine maximale Verteilung (2.32) zu suchen, die in der Verteilung (2.31) enthalten ist und den Bedingungen (2.28) und (2.29) genügt.

3. Anwendungen

Als einfachste Anwendungen dieses Satzes erhält man die bekannten Kriterien für *analytische Hyperflächen*. Eine $(2n-1)$-dimensionale Fläche M^{2n-1} heißt eine analytische Hyperfläche, wenn sie in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte P eine einparametrige Schar analytischer Flächen M_C^{n-1} ist. Es gilt nun[10])

Satz 5 (Krzoska). ***Eine zweimal stetig differentiierbare Fläche M^{2n-1}, die durch eine reelle Gleichung***

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) = 0$$

mit

$$\text{Rang}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}, \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{x}_\nu}\right) = 1$$

gegeben ist, ist genau dann eine analytische Hyperfläche, wenn überall auf M^{2n-1} die Hermitesche Form

$$H = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\nu \partial \overline{x}_\mu} u_\nu \overline{u}_\mu \tag{3.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} u_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial \overline{x}_\nu} \overline{u}_\nu = 0 \tag{3.2}$$

verschwindet.

O. B. d. A. können wir annehmen, daß in der Umgebung eines Punktes P die Ableitung $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \neq 0$ ist. Dann bilden die Vektoren

$$X_\nu = \varphi_n \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \varphi_\nu \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.3}$$

wobei $\varphi_\kappa = \frac{\partial\varphi}{\partial x_\kappa}$, $\kappa = 1,2,\ldots,n$, gesetzt ist, eine Basis aller Tangentialvektoren vom Typus (1.0). Daher ist M^{2n-1} nach Satz 4 genau dann eine

10) Siehe: J. Krzoska [5].

analytische Hyperfläche, wenn die Vektoren (3.3) zusammen mit den konjugiert komplexen Vektoren $\overline{X}_\nu$ den Integrabilitätsbedingungen (2.28) und (2.29) genügen; denn in diesem und nur in diesem Falle ist Satz 4 für den Spezialfall $r = k = l = 1$ erfüllt. Nun sei $\varphi_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$, $\varphi_{\bar\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar x_\nu}$, $\varphi_{\nu\mu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial x_\mu}$, $\varphi_{\bar\nu\bar\mu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar x_\nu \partial \bar x_\mu}$, $\varphi_{\nu\bar\mu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial \bar x_\mu}$. Dann ist

$$\overline{X}_\nu = \varphi_{\bar n} \frac{\partial}{\partial \bar x_\nu} - \varphi_{\bar\nu} \frac{\partial}{\partial \bar x_n}, \quad \nu = 1,2,\ldots,n-1. \tag{3.4}$$

Die Vektoren (3.3) und (3.4) bilden zusammen mit dem Vektorfeld

$$X = \varphi_{\bar n} \frac{\partial}{\partial x_n} - \varphi_n \frac{\partial}{\partial \bar x_n} \tag{3.5}$$

eine Basis für die $(2n-1)$-dimensionale Verteilung aller Tangentialvektoren in der Umgebung von P. Wann sind nun die Integrabilitätsbedingungen erfüllt? Die Bedingungen (2.28) gelten stets:

$$[X_\varrho, X_\sigma] = a_\sigma X_\varrho - a_\varrho X_\sigma, \quad [\overline{X}_\varrho, \overline{X}_\sigma] = \bar a_\sigma \overline{X}_\varrho - \bar a_\varrho \overline{X}_\sigma, \quad \varrho, \sigma = 1,2,\ldots,n-1, \tag{3.6}$$

mit

$$a_\nu = \frac{1}{\varphi_n} (\varphi_n \varphi_{\nu n} - \varphi_\nu \varphi_{nn}), \quad \nu = 1,2,\ldots,n-1. \tag{3.7}$$

Der Klammerausdruck (2.29) liefert

$$[X_\varrho, \overline{X}_\sigma] = \bar b_\sigma X_\varrho - b_\varrho \overline{X}_\sigma - c_{\varrho\sigma} X, \quad \varrho, \sigma = 1,2,\ldots,n-1, \tag{3.8}$$

mit

$$b_\nu = \frac{1}{\varphi_{\bar n}} (\varphi_n \varphi_{\nu\bar n} - \varphi_\nu \varphi_{n\bar n}), \quad \nu = 1,2,\ldots,n-1, \tag{3.9}$$

$$c_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\varphi_n \varphi_{\bar n}} (\varphi_n \varphi_{\bar n} \varphi_{\varrho\bar\sigma} - \varphi_n \varphi_{\bar\sigma} \varphi_{\varrho\bar n} - \varphi_\varrho \varphi_{\bar n} \varphi_{n\bar\sigma} + \varphi_\varrho \varphi_{\bar\sigma} \varphi_{n\bar n}), \quad \varrho, \sigma = 1,2,\ldots,n-1. \tag{3.10}$$

Die $c_{\varrho\sigma}$ sind nun genau die Koeffizienten der Hermiteschen Form (3.1) unter der Nebenbedingung (3.2). So erkennen wir die notwendige und hinreichende Bedingung für die analytische Hyperfläche: die Koeffizienten $c_{\varrho\sigma}$ müssen auf M^{2n-1} sämtlich verschwinden, damit das System (3.3), (3.4) integrabel ist. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Im Falle $n = 2$ ist das Kriterium des Satzes 5 genau dann erfüllt, wenn $c_{11} = 0$ ist. c_{11} ist nun bis auf den Faktor $\frac{1}{\varphi_2 \varphi_{\bar 2}}$ gerade der Levische Differentialausdruck[11]):

$$L(\varphi) = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_{\bar 1} & \varphi_{1\bar 1} & \varphi_{2\bar 1} \\ \varphi_{\bar 2} & \varphi_{1\bar 2} & \varphi_{2\bar 2} \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck ist für $n = 2$ der Koeffizient der alternierenden Differentialform vom Grade 4:

$$d'\varphi \wedge d''\varphi \wedge d'd''\varphi, \tag{3.11}$$

[11]) Siehe: E. E. LEVI [6].

wobei

$$d'\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} d x_\nu, \quad d''\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_\nu} d \bar{x}_\nu, \tag{3.12}$$

$$d'd''\varphi = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial \bar{x}_\mu} d x_\nu \wedge d \bar{x}_\mu$$

ist. Das Verschwinden der Form (3.11) ist nun aber für beliebiges n äquivalent mit dem Verschwinden der Hermiteschen Form (3.1) unter der Nebenbedingung (3.2). Es gelten nämlich allgemein die folgenden Aussagen:

Satz 6. *Eine Hermitesche Form*

$$H = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$$

hat genau dann den Rang k, wenn für die zugeordnete alternierende Form

$$\Omega = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} d x_\nu \wedge d \bar{x}_\mu$$

die Relationen

$$\Omega^k \neq 0, \quad \Omega^{k+1} = 0 \tag{3.13}$$

gelten.

Dabei ist unter Ω^r das äußere Produkt $\underbrace{\Omega \wedge \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega}_{r \text{ Faktoren}}$ zu verstehen, und $\Omega^0 = 1$. Zum Beweise bringe man H durch eine analytische Transformation auf die Diagonalform $\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa v_\varkappa \bar{v}_\varkappa$, $a_\varkappa \neq 0$. Dabei geht Ω in die zugeordnete Form $\sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa d y_\varkappa \wedge d \bar{y}_\varkappa$ über, und aus dieser liest man die Beziehungen (3.13) unmittelbar ab.

Satz 7. *Eine Hermitesche Form*

$$H = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} u_\nu \bar{u}_\mu$$

hat unter der Nebenbedingung

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu u_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \bar{b}_\nu \bar{u}_\nu = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden b_ν genau dann den Rang k, wenn für die zugeordneten alternierenden Formen

$$\Omega = \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} d x_\nu \wedge d \bar{x}_\mu, \quad \omega = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu d x_\nu, \quad \bar{\omega} = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{b}_\nu d \bar{x}_\nu$$

die Relationen

$$\omega \wedge \bar{\omega} \wedge \Omega^k \neq 0, \quad \omega \wedge \bar{\omega} \wedge \Omega^{k+1} = 0 \tag{3.14}$$

gelten.

Hier bringe man durch eine lineare Transformation die Form H so auf die Diagonalform $\sum_{\varkappa=1}^{k+1} a_\varkappa v_\varkappa \bar{v}_\varkappa$, wobei $a_\varkappa \neq 0$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ ist, daß $v_{k+1} = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu u_\nu$ wird. Die zugeordneten Formen Ω, ω und $\overline{\omega}$ gehen dann über in $\sum_{\varkappa=1}^{k+1} a_\varkappa d y_\varkappa \wedge d \bar{y}_\varkappa$, $d y_{k+1}$ und $d \bar{y}_{k+1}$. Für diese gelten dann die Relationen (3.14) und damit auch für die ursprünglichen Formen Ω, ω und $\overline{\omega}$.

Nun sind der Hermiteschen Form H in (3.1) und der Bedingung (3.2) die Differentialformen $d'd''\varphi$, $d'\varphi$ und $d''\varphi$ aus (3.12) zugeordnet. Daher liefert Satz 5, wenn man ihn mit Satz 7 für den Spezialfall $k = 0$ kombiniert, die Aussage:

Satz 8. *Eine zweimal stetig differentiierbare Fläche M^{2n-1}, die durch eine reelle Gleichung*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) = 0$$

mit

$$\mathrm{Rang}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}, \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}_\nu}\right) = 1$$

gegeben ist, ist genau dann eine analytische Hyperfläche, wenn überall auf M^{2n-1} die Levische Differentialform verschwindet:

$$d'\varphi \wedge d''\varphi \wedge d'd''\varphi = 0\,.$$

Die Sätze 5 und 8 stellen den einfachsten Fall einer Aussage dar, die man aus Satz 4 erhält:

Satz 9. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 ist M^{2n-r} genau dann in der Umgebung von P eine $(2k-r)$-parametrige Schar analytischer Mannigfaltigkeiten M_C^{n-k}, wenn die Vektoren*

$$Z_{\varrho\sigma} = \sum_{\mu=1}^{n} (\overline{X}_\sigma X_{\varrho\mu}) \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n-k; \tag{3.15}$$

Linearkombinationen der Vektoren X_ν sind.

Man erhält diesen Satz aus Satz 4, wenn man dort $l = k$ setzt. Dann können als Y_ν stets die X_ν gesetzt werden. Für diese sind aber die Bedingungen (2.28) immer erfüllt, und der Klammerausdruck $[X_\varrho, \overline{X}_\sigma]$ lautet:

$$[X_\varrho, \overline{X}_\sigma] = Z_{\varrho\sigma} - \overline{Z}_{\sigma\varrho}\,.$$

Wenn dieser Ausdruck eine Linearkombination der X_ν und $\overline{X}_\nu$ sein soll, so muß $Z_{\varrho\sigma}$ eine Linearkombination der X_ν sein und $\overline{Z}_{\sigma\varrho}$ eine Linearkombination der $\overline{X}_\nu$. Aus (3.15) erhält man die letzten Bedingungen durch Übergang zu den konjugiert komplexen Vektoren.

Für $r = k = 1$ gewinnt man aus (3.15) die Bedingungen des Satzes 5 auf dem gleichen Wege wie dort.

Als einfache Folgerung aus Satz 4 wollen wir noch die drei- und vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten im C^n betrachten.

Eine zweimal stetig differentiierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit M^3 im C^n sei in Parameterform gegeben:

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, t_3), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

mit

$$\text{(3.16)} \qquad \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \\ \dfrac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t_j} \end{pmatrix} = 3\,.$$

Nun betrachten wir zwei Fälle: Erstens sei in der Umgebung eines Punktes P auf M^3

$$\text{(3.17)} \qquad \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = 3\,.$$

Dann gibt es nach Satz 2 überhaupt keine 1-dimensionale analytische Tangente an einen Punkt der Umgebung von P, also besitzt dann M^3 *keine analytische Blätterung in der Umgebung von* P.

Zweitens sei in der Umgebung von P

$$\text{(3.18)} \qquad \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = 2\,.$$

Dann gibt es nach Satz 2 in jedem Punkte der Umgebung von P eine 1-dimensionale analytische Tangente X an M^3. Diese ist nach dem Verfahren, welches wir im Anschluß an Satz 2 geschildert haben, leicht zu berechnen: Die drei linear unabhängigen Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{\partial}{\partial t_3}$ drücken wir durch die komplexen Tangentialvektoren aus:

$$\text{(3.19)} \qquad \frac{\partial}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\,, \qquad j = 1, 2, 3\,.$$

Wegen (3.18) ist auch

$$\text{(3.20)} \qquad \operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t_j}\right) = 2\,,$$

und daher gibt es für die zur Umgebung von P gehörenden Parameter t_1, t_2, t_3 drei stetig differentiierbare Funktionen $\psi_j(t_1, t_2, t_3)$, die nirgends sämtlich verschwinden, so daß

$$\text{(3.21)} \qquad \sum_{j=1}^{3} \psi_j \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t_j} = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

ist. Dann ist

$$\text{(3.22)} \qquad X = \sum_{j=1}^{3} \psi_j \frac{\partial}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{3} \psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

vom Typus (1.0). Die durch X und $\overline{X}$ aufgespannte Verteilung ist nach Satz 4 genau dann integrabel, wenn $[X, \overline{X}]$ eine Linearkombination von X und $\overline{X}$ ist. Nun ist in diesem Fall

$$[X, \overline{X}] = \sum_{j=1}^{3} (\overline{X}\,\psi_j - X\,\overline{\psi}_j)\frac{\partial}{\partial t_j}\,.$$

Wir erhalten also als *notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß* M^3 *eine einparametrige Schar analytischer Kurven* M^1_C *ist, daß erstens*

Rang $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = 2$ *ist und zweitens die Determinante*

$$\begin{vmatrix} X\psi_1 - X\bar{\psi}_1 & X\psi_2 - X\bar{\psi}_2 & X\psi_3 - X\bar{\psi}_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist.

Auch der Fall der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M^4 ist leicht zu behandeln. Sie sei durch zweimal stetig differentiierbare Funktionen gegeben:

(3.23) $$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, t_3, t_4), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

mit

(3.24) $$\text{Rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \\ \frac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial t_j} \end{pmatrix} = 4.$$

Zunächst betrachten wir die trivialen Fälle: Rang $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = 2$ und Rang $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = 4$ in der Umgebung eines Punktes P. Im ersten Fall ist nach Satz 2 und Satz 3 die Mannigfaltigkeit in der Umgebung von P eine analytische Mannigfaltigkeit M_C^2 der komplexen Dimension 2, im zweiten Fall gibt es nach Satz 2 keine analytische Tangente, also auch keine analytische Blätterung. Interessant ist lediglich der Fall

(3.25) $$\text{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = 3.$$

Dann gibt es in der Parameterumgebung des Punktes P vier stetig differentiierbare Funktionen $\psi_j(t_1, t_2, t_3, t_4)$, die nirgends sämtlich verschwinden, so daß das Vektorfeld

(3.26) $$X = \sum_{j=1}^{4} \psi_j \frac{\partial}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{4} \psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

vom Typus (1,0) ist. Wie im Falle der Mannigfaltigkeit M^3 erhält man daraus als *notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die M^4 in der Umgebung des Punktes P eine 2-parametrige Schar analytischer Kurven M_C^1 ist, daß die Matrix*

$$\begin{pmatrix} X\psi_1 - X\bar{\psi}_1 & X\psi_2 - X\bar{\psi}_2 & X\psi_3 - X\bar{\psi}_3 & X\psi_4 - X\bar{\psi}_4 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 & \bar{\psi}_4 \end{pmatrix}$$

den Rang 2 hat.

Für reelle Mannigfaltigkeiten der Dimensionen 5 bis $2n-1$ kommt man mit diesen einfachen Betrachtungen nicht mehr durch; denn jetzt kann der allgemeine Fall in Satz 4 eintreten, daß die Verteilung (2.32) echt in der Verteilung (2.31) enthalten ist, d. h. daß $k < l$ ist, und neben den Tangentialvektoren vom Typus (1,0) und (0,1) noch Tangentialvektoren vom Typus (1,1) auftreten, die sich durch die Tangentialvektoren vom Typus (1,0) und (0,1) nicht linear kombinieren lassen. Diese Probleme sollen in einem zweiten Teil behandelt werden.

Literatur

[1] BEHNKE, H., u. F. SOMMER: Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Über die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes. Math. Ann. **121**, 356 (1950). — [2] BEHNKE, H., u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Berlin 1934. — [3] CHERN, S.-S.: Differentiable Manifolds. Chicago 1953. Hektographierte Ausarbeitung. — [4] CHEVALLEY, CL.: Theory of Lie groups. Princeton 1946. — [5] KRZOSKA, J.: Über die natürliche Grenze analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen. Diss. Kneser, Greifswald 1933. — [6] LEVI, E. E.: Sulle ipersuperficie dello spacio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitiche di due variabili complesse. Ann. Mat. pur. appl. III, **18** (1911). — [7] LEVI-CIVITA, T.: Sulle funzioni di due o piu variabili complesse. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. V, **14** (1933). — [8] RIZZA, G. B.: Su diverse estensioni dell' invariante di E. E. LEVI nella teoria delle funzioni di piu variabili complesse. Annali di mathematica pura et applicata (IV) **44**, 73 (1957). — [9] SOMMER, F.: Analytische Geometrie im C^n. Schriftenreihe des Math. Institutes d. Univ. Münster. H. 11 (1957). — [10] WIRTINGER W.: Zur formalen Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **97**, 357 (1927).

(Eingegangen am 1. April 1958)

BERGMAN, S.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 134—138 (1958)

A Class of Pseudo-Conformal and Quasi-Pseudo-Conformal Mappings*

By

STEFAN BERGMAN in Stanford**

To HEINRICH BEHNKE on his 60th birthday with the author's respects

§ 1

The generalization of methods in the theory of functions of one complex variable to the case of mapping by pairs of analytic functions of two complex variables (PC transformations)[1]) is one of the problems of the theory of functions of several complex variables. The generalization of a given theorem in one variable often can be done in various different ways.

The lemma of SCHWARZ-PICK states that if the function $Z(z)$ maps the unit circle $\mathfrak{c} = [|z| < 1]$ into a domain which lies in $[|Z| < 1]$, then the inequality

$$(1) \qquad d S_{\mathfrak{c}}(Z) = \frac{|dZ(z)|}{1-|Z(z)|^2} \leq \frac{|dz|}{1-|z|^2} = d S_{\mathfrak{c}}(z)$$

holds (see [14], p. 45ff.). Using the theory of the kernel function this theorem can be generalized to the case of PC mappings (see [5], p. 49ff.). However, the line element $dS(z_1, z_2)$ of the invariant metric which we obtain in the case of two complex variables is no longer a monotone functional of the domain[2]). This fact, in some instances, causes complications.

In [2] the notion of the B-area $d\omega^{(2)}(u_1,u_2)$ of a segment of a surface $z_k = z_k(u_1,u_2)$, $k = 1, 2$, given by[3])

$$(2) \qquad d\omega^{(2)}(u_1,u_2) = \left|\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(u_1,u_2)}\right| du_1 du_2$$

have been introduced. B-area has a simple geometrical interpretation[4]).

---

*) The present paper has been done under a contract with the National Science Foundation.

**) Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford University.

[1]) PC = pseudo-conformal.

[2]) In the case of two (and more) variables the line-element $dS(z_1, z_2)$ obtained by using the method of the kernel function can be represented as a *quotient* of quantities which are monotone functionals of the domain. See [1], [4] p. 53.

[3]) Here u_1, u_2 are *real* parameters.

[4]) See [5] p. 51 and [4] p. 9.

Remark. We note further that the invariant[5]) B-area of a surface and an invariant volume element given by

$$d\,\Omega_{\mathfrak{b}}^{(2)} = K_{\mathfrak{b}}^{1/2} \left| \frac{\partial(z_1, z_2)}{\partial(u_1, u_2)} \right| du_1 du_2 , \tag{3a}$$

$$d\,\Omega_{\mathfrak{b}}^{(4)} = K_{\mathfrak{b}}\, d\omega^{(4)}, \quad d\omega^{(4)} = d x_1 d y_1 d x_2 d y_2, \tag{3b}$$

$$K_{\mathfrak{b}} = K_{\mathfrak{b}}(z_1, z_2; \bar z_1, \bar z_2), \quad z_k = x_k + i\, y_k, \quad \bar z_k = x_k - i\, y_k,$$

respectively, have been introduced. Here $K_{\mathfrak{b}}$ is the kernel function of the domain $\mathfrak{b}$. The quantities $d\,\Omega_{\mathfrak{b}}^{(2)}$ and $d\,\Omega_{\mathfrak{b}}^{(4)}$ are monotone functionals of the domain $\mathfrak{b}$. Using $d\,\Omega_{\mathfrak{b}}^{(2n)}$, $n = 1, 2$, one obtains generalizations of the lemma of Schwarz-Pick, [5] p. 51, [2, 3, 8].

A further type of inequalities[6]) is obtained in the case of conformal mapping as follows. Suppose we have a schlicht (conformal) mapping of the square $a_1 a_2 a_3 a_4$, $a_1 = (0,0)$, $a_2 = (0,1)$, $a_3 = (1,0)$, $a_4 = (1,1)$ in the x, y-plane into a domain $\mathfrak{B}$ in the X, Y-plane. Let $l(y^{(0)})$ denote the length of the image in the X, Y-plane of the segment $[0 \le x \le 1,\ y = y^{(0)}]$. Then[7])

$$\int_0^1 l^2(y)\, dy \le \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy = \text{Area of } \mathfrak{B}. \tag{4}$$

When we pass to the case of two complex variables we replace the line-element by the element of the B-area and the area integral by the four-dimensional volume integral and in this way we obtain the following generalization of the formula (4) to the case of PC transformations.

Theorem. *Let a schlicht PC mapping*

$$Z_k = Z_k(z_1, z_2), \quad k = 1, 2, \tag{5}$$

defined in

$$\mathfrak{r} = [0 \le x_k \le 1, \quad 0 \le y_k \le 1, \quad k = 1, 2]$$

map $\mathfrak{r}$ *into a domain* $\mathfrak{R}$ *of the* X_1, Y_1, X_2, Y_2*-space. Then the inequality*

$$\int_0^1 \int_0^1 [L(y_1, y_2)]^2 dy_1\, dy_2 \le \text{Vol}(\mathfrak{R}) \tag{6}$$

holds. Here $L(y_1^{(0)}, y_2^{(0)})$ *is the* B*-area of the image in the* X_1, Y_1, X_2, Y_2*-space of the rectangle.*

$$[0 \le x_\varkappa \le 1, \quad \varkappa = 1, 2,\ y_k = y_k^{(0)} = \text{const.},\ k = 1, 2]. \tag{7}$$

Proof. We note at first that

$$\left| \frac{\partial(Z_1, Z_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right| = \left| \left[\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x_1, x_2)} - \frac{\partial(Y_1, Y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right] + i \left[\frac{\partial(Y_1, X_2)}{\partial(x_1, x_2)} + \frac{\partial(X_1, Y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right] \right| \tag{8}$$

---

[5]) With respect to PC transformations.

[6]) The inequalities to be discussed here *do not require* the use of the kernel function when generalized to several complex variables.

[7]) Here we employ the Schwarz inequality and Cauchy-Riemann equations. To obtain (6), an analogue of (4) in the case of pseudo-conformal mappings, we use (9) and (10).

and (as a formal computation shows)

$$\frac{\partial(X_1, Y_1, X_2, Y_2)}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2)} = \left|\frac{\partial(Z_1, Z_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|^2 \equiv \left|\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(X_1, Y_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(Y_1, Y_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|^2 + \tag{9}$$
$$+ \left|\frac{\partial(Y_1, Y_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|^2 - 2\,\frac{\partial(X_1, Y_1)}{\partial(x_1, x_2)}\,\frac{\partial(X_2, Y_2)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Therefore

$$L^2(y_1, y_2) \equiv \left[\int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial(Z_1, Z_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right| dx_1 dx_2\right]^2 \tag{10}$$
$$\leq \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial(Z_1, Z_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|^2 dx_1 dx_2 \cdot \int_0^1\int_0^1 dx_1 dx_2 .$$

Using (9) and multiplying both sides of (10) by $dy_1 dy_2$ and integrating over $[0 < y_k < 1\,,\ k = 1, 2]$ we obtain the desired inequality, since $\int_0^1\int_0^1 dx_1 dx_2 = 1$ and

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial(X_1, Y_1, X_2, Y_2)}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2)}\, dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \mathrm{Vol}\,(\mathfrak{R})\,. \tag{11}$$

Remark. If the distance between the image of the segment $a_1 a_2 = [x = 0,\ 0 \leq y_1 \leq 1]$ and that of $a_3 a_4 = [x = 1,\ 0 \leq y_1 \leq 1]$ in the X, Y-plane is larger than a fixed constant c, then for the area of $\mathfrak{B}$ [see (4)] we obtain a lower bound, namely

$$c^2 \leq \text{Area of } \mathfrak{B}\,.$$

In the case of two variables, if for every y_k, $0 \leq y_k \leq 1$, we have

$$L(y_1, y_2) \geq c \tag{12}$$

then

$$c^2 \leq \mathrm{Vol}\,(\mathfrak{R})\,. \tag{13}$$

§ 2

When formulating the theorem on p. 135 the notion of the B-area has been used. The B-area can be expressed as an integral of the (ordinary) area-element multiplied with a conveniently chosen weighting function.

In the transformation (5) the lines

$$[0 \leq x_1 \leq 1\,,\ x_2 = x_2^{(0)},\ \ y_k = y_k^{(0)}] \tag{14}$$

and

$$[x_1 = x_1^{(0)},\ \ 0 \leq x_2 \leq 1\,,\ \ y_k = y_k^{(0)}] \tag{15}$$

are transformed into two families of lines. We denote by $dS_k \equiv dS_k(x_k, x_{3-k}^{(0)}; y_\varkappa^{(0)})$, $k = 1, 2$, $\varkappa = 1, 2$, the line-elements of images of these lines in the X_1, Y_1, X_2, Y_2-space for $k = 1$ and $k = 2$. As has been shown in [4] p. 9 and [5] p. 51 we have for the line-element dA of (ordinary) area of the surface formed by

the image of (14) and (15) for fixed $y_k^{(0)}$, $k = 1, 2$,

(16) $$dA = dS_1\, dS_2 \sin\psi\,,$$

while for the B-area

(17) $$dB = dS_1\, dS_2 \sin\chi\,.$$

Here ψ denotes the (ordinary) angle between dS_1 and dS_2, while χ denotes the *analytic angle* between these two directions. According to [4] p. 9

(18) $$dB = dA\,\frac{(1-\sin^2\varphi/\sin^2\psi)^{1/2}}{\cos\varphi}$$

where φ is the so called *angle of deviation*. Thus the B-area of a surface can be interpreted as the integral over the surface of the (ordinary) area-element with weighting-factor $(1-\sin^2\varphi/\sin^2\psi)^{1/2}/\cos\varphi$.

§ 3

In a number of investigations the usefulness of functions of various extended classes has been shown. See [6, 7, 9, 10, 11, 12, 13]. In addition to functions of the extended class, *mappings of extended class* have also been considered, i. e. mappings of domains of four-dimensional x_1, y_1, x_2, y_2-space by four real functions $X_k(x_1, y_1, x_2, y_2)$, $Y_k(x_1, y_1, x_2, y_2)$, $k = 1, 2$, which satisfy certain additional conditions. See [7]. (Here X_k, Y_k are not necessarily supposed to be the real and the imaginary parts of an analytic function of two complex variables, but are only required to satisfy a certain differential inequality.) The considerations of the present paper can be generalized to the case of certain extended classes of mappings[8]).

Suppose the functions X_k, Y_k instead of satisfying (9) possess the property that

(19) $$\left|\frac{\partial(X_1+iY_1, X_2+iY_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right|^2 \le C\,\frac{\partial(X_1, Y_1, X_2, Y_2)}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2)}\,,$$
$$C = C(x_1, y_1, x_2, y_2) > 0\,.$$

We denote these mappings as QPC *(quasi-pseudo-conformal) mappings.*

Repeating our previous considerations we obtain that

(20) $$\int_0^1\int_0^1 [L(y_1, y_2)]^2\, dY_1\, dY_2$$
$$\le \int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 C(x_1, y_1, x_2, y_2)\,\frac{\partial(X_1, Y_1, X_2, Y_2)}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2)}\,dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\,.$$

The right hand side of (20) is an integral over the volume-element $dX_1\,dY_1\,dX_2\,dY_2$ multiplied by a positive weighting function C.

Bibliography

[1] Bergman, Stefan: Über die Kernelfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. J. reine angew. Math. **169**, 1—42 (1933); **172**, 89—128 (1934). — [2] Sur quelques propriétés des transformations par un couple des fonctions de deux variables complexes. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., 6e sér., **19**, 474—478 (1934). — [3] Zur Theorie

[8]) In a paper in preparation, see [11], S. Hitotumatu uses a class of quasi-pseudo-conformal mappings which satisfy an inequality similar to (19).

von pseudokonformen Abbildungen. Rec. Math., n. s., 1 (43), 79—96 (1936). — [4] Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des fonctions analytiques. Interscience Publishers (1941), and Mém. Sci. math. (Paris) 106, 1—62 (1947). — [5] Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes. Mém. Sci. math. (Paris) 108, 1—80 (1948).— [6] Functions of the extended class in the theory of functions of several complex variables. Trans. Amer. math. Soc. 63, 423—447 (1948). — [7] On zero and pole surfaces of functions of two complex variables. Trans. Amer. math. Soc. 77, 413—454 (1954). — [8] The method of the minimum integral and analytic continuation of functions of complex variables. Proc. nat. Acad. Sci. (Wash.) 27, 328—332 (1941). — [9] Bremermann, H.: Complex convexity. Trans. Amer. math. Soc. 82, 17—51 (1956). — [10] Epstein, B.: Conformal and pseudo-conformal invariants. To appear in J. Math. and Mech. 7 (1958). — [11] Hitotumatu, Sin: On a quasi-conformal function of several complex variables (to appear).— [12] Lowdenslager, D.: Potential theory in bounded symmetric homogeneous complex domains. To appear in Ann. of Math. — [13] Potential theory and a generalized Jensen-Nevanlinna formula for functions of several complex variables. J. Math. and Mech. 7, 207—218 (1958). — [14] Nevanlinna, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Grundlehren der math. Wiss., Bd. 46. Berlin: Springer 1936.

(Eingegangen am 8. April 1958)

van der Waerden, B. L.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 139—155 (1958)

Zur algebraischen Geometrie 19. Grundpolynom und zugeordnete Form

Von

B. L. van der Waerden in Zürich

Heinrich Behnke zum 60. Geburtstag

Es sei k ein beliebiger Konstantenkörper und V eine über k irreduzible Varietät im projektiven Raum P_n. Die *zugeordnete Form* von V wurde von Chow und mir[1]) folgendermaßen definiert. Man schneide V mit r allgemeinen Hyperebenen $U_1, \ldots, U_r$. Die Koordinaten der Hyperebenen U_i sind Unbestimmte $U_{ij} (1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq n)$. Wenn V nicht in der Hyperebene $y_0 = 0$ liegt, so liegen die Schnittpunkte $y^{(\nu)}$ auch nicht in dieser Hyperebene, und man kann ihre Koordinaten durch $y_0 = 1$ eindeutig normieren. Nun bildet man mit neuen Unbestimmten $U_{0j} (j = 0, \ldots, n)$ die Linearformen

$$(U_0 y^{(\nu)}) = \sum_0^n U_{0j} y_j^{(\nu)} . \tag{1}$$

Ihr Produkt (wenn nötig in eine p^e-te Potenz erhoben, falls k die Charakteristik p hat) ist eine Form F in den U_{0j}, die rational von den übrigen $U_{1j}, \ldots, U_{rj}$ abhängt. Macht man sie durch Multiplikation mit einem nur von den Variablenreihen $U_1, \ldots, U_r$ abhängigen Faktor ganz rational und primitiv in diesen Variablenreihen, so erhält man die zugeordnete Form

$$F(U) = F(U_0, U_1, \ldots, U_r) . \tag{2}$$

Diese Definition scheint für die geometrischen Anwendungen die zweckmäßigste zu sein. Für die algebraische Untersuchung eignet sich aber eine andere Definition besser, auf die man so geführt wird:

Es sei x ein allgemeiner Punkt von V. Mit der Normierung $x_0 = 1$ seien $x_1, \ldots, x_n$ die inhomogenen Koordinaten von x. Nun bildet man, mit unbestimmten Koeffizienten u_{ij}, die $r + 1$ Linearkombinationen

$$z_i = -\sum_1^n u_{ij} x_j \qquad (i = 0, \ldots ; r) .$$

Man zeigt dann leicht, daß $z_1, \ldots, z_r$ in bezug auf den Koeffizientenkörper $k(u)$ algebraisch unabhängig sind, dagegen $z_0, \ldots, z_r$ abhängig. Es gibt also ein einziges irreduzibles Polynom $F(Z_0, \ldots, Z_r)$ mit Koeffizienten aus $k(u)$ mit der Eigenschaft

$$F(z_0, \ldots, z_r) = 0 .$$

Das Polynom F kann als ganz rational in den u_{ij} angenommen werden.

[1]) W.-L. Chow und B. L. van der Waerden, ZAG 9. Math. Annalen 113 (1937), S. 692.

Ferner kann man annehmen, daß es keinen nur von den u_{ij} abhängigen Faktor enthält. Das nunmehr bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Polynom $F(Z_i; u_{ij})$ heißt nach W. Krull[2]) das *Grundpolynom* der Varietät V oder des zugehörigen Primideals $\mathfrak{p}$. Das Grundpolynom stimmt mit der von K. Hentzelt[3]) eingeführten und von E. Noether[4]) eingehend studierten „Elementarteilerform" des Primideals $\mathfrak{p}$ überein.

Aus dem Grundpolynom erhält man die zugeordnete Form einfach, indem man die Z_i in U_{i0} und die u_{ij} in $U_{ij} (j > 0)$ umbenennt. Das soll in § 1 gezeigt werden.

In § 2 wird bewiesen, daß $F(U)$ bei einer Permutation der Variablenreihen $U_0, \ldots, U_r$ bis auf das Vorzeichen in sich übergeht und daß $F(U)$ sich im Falle der Charakteristik p als p^e-te Potenz eines Polynoms $F_0(U_0, \ldots, U_r)$ schreiben läßt, wobei F_0, als Polynom in U_0 betrachtet, ein Produkt von lauter verschiedenen Linearfaktoren (1) ist. Der Exponent $q = p^e$ heißt der *Inseparabilitätsgrad* der Form F.

Im Fall eines vollkommenen Grundkörpers k ist $q = 1$ und $F = F_0$. Allgemein gilt $q = 1$ dann und nur dann, wenn $F(U)$ als Polynom in $Z_0 = U_{00}$ separabel ist (siehe dazu Krull[2]), Satz 6 u. 7). In § 3 wird gezeigt, daß das genau dann der Fall ist, wenn $k(x)$ im Sinne von A. Weil[5]) separabel erzeugbar über k ist. Dieses Ergebnis hat S. V. K. Hegde[6]) bereits erhalten. Der hier zu gebende Beweis ist etwas einfacher als der von Hegde, beruht aber auf demselben Grundgedanken.

In § 4 wird untersucht, unter welcher Bedingung $F(U)$ absolut prim ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $k(x)$ im Sinne von A. Weil[5]) regulär über k ist, oder, wie wir auch sagen werden, wenn *k gut für V* ist. Dieser Satz ist äquivalent dem Satze 9 von Krull[2]).

In § 5 wird zunächst gezeigt, daß alle x_j *ganze* algebraische Funktionen von $z_1, \ldots, z_r$ über $k(u_{11}, \ldots, u_{rn})$ als Konstantenkörper sind. Darauf gestützt, wird eine Methode entwickelt, die es gestattet, alle Punkte von V zu finden, indem man für $z_1, \ldots, z_r$ speziell Werte $t_1, \ldots, t_r$ einsetzt und t_0 als Lösung der Gleichung

$$F(t_0, t_1, \ldots, t_r) = 0$$

bestimmt[7]). Ferner wird gezeigt, daß ein Punkt y dann und nur dann auf V liegt, wenn die Linearformen

$$t_i = -\sum_1^n u_{ij} y_j$$

[2]) W. Krull: Parameterspezialisierung in Polynomringen. II. Archiv der Math. 1 (1948), S. 129.

[3]) K. Hentzelt: Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten. Math. Annalen 88 (1923) S. 53.

[4]) E. Noether: Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie. Math. Annalen 90 (1923) S. 229.

[5]) A. Weil: Foundations of Algebraic Geometry (1946), zu zitieren als "Foundations".

[6]) S. V. Keshava Hegde: The associated form of a variety over a field of prime characteristic. Commentarii math. Helvetici 30, (1956) S. 132.

[7]) Die Methode wurde bereits in § 1 meiner Arbeit ZAG 3, Math. Annalen 108 (1933) entwickelt.

identisch in den u_{ij} die Gleichung $F(t_0, \ldots, t_r) = 0$ erfüllen. Man kann also, wenn das Grundpolynom $F(Z_i; u_{ij})$ bekannt ist, ohne weiteres die Gleichungen von V im affinen Raum A_n aufstellen. Für den projektiven Raum ist eine kleine Modifikation erforderlich, die in der Arbeit[1]) angegeben ist.

In § 6 wird untersucht, wie eine Primvarietät V bei Erweiterung des Grundkörpers k zerfallen kann. Es wird gezeigt, daß die irreduziblen Teile alle dieselbe Dimension haben und eineindeutig den Primfaktoren der Form $F(U)$ entsprechen. Dieses Ergebnis steht zwar schon in § 1 meiner Arbeit ZAG 10 (Math. Annalen **113**, S. 706) und bei HEDGE[6]), aber gewisse Einzelheiten des Beweises sind weder in ZAG 10 noch bei HEGDE ganz ausgeführt.

Anschließend ergibt sich, ebenfalls in § 6, eine einfache Charakterisierung der Körper k, die gut für V sind, sowie eine Konstruktion des kleinsten guten Körpers für eine gegebene unteilbare Varietät V.

Zur Bequemlichkeit des Lesers wird aus früheren Arbeiten nur das folgende als bekannt vorausgesetzt:

1) Der Begriff „allgemeiner Punkt einer über k irreduziblen Varietät" und dessen einfachste Eigenschaften,

2) die Sätze aus Chapter I von WEILs "Foundations", die in meiner „Neubegründung"[8]) neu hergeleitet wurden,

3) der Begriff „Spezialisierung" und die Tatsache, daß eine Spezialisierung $z \to t$ über einem Körper L sich immer zu einer Spezialisierung des Paares (z, x) fortsetzen läßt. Im allgemeinen muß man dabei auch unendliche Spezialisierungen zulassen oder den projektiven Raum heranziehen.

§ 1. Algebraische und geometrische Definition der Form $F(U)$

A. Die algebraische Definition

Das System $(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ habe den Transzendenzgrad r über dem Grundkörper k. Im Fall $r = n$ gibt es keine zugeordnete Form; wir nehmen also $r < n$ an. Wir adjungieren dem Grundkörper n^2 von den x_j unabhängige Unbestimmte u_{ij} und bilden

$$z_i = -\sum_1^n u_{ij} x_j \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3}$$

Es sei

$(\dot z)$ bzw. $(\dot u)$ das System der z_i bzw. u_{ij} mit $1 \leq i \leq r$,

$(\ddot z)$ bzw. $(\ddot u)$ das System der z_i bzw. u_{ij} mit $0 \leq i \leq r$,

(z) bzw. (u) das System aller z_i bzw. v_{ij}, wobei der Index j immer von 1 bis n geht. Dann gilt

Satz 1. *$z_1, \ldots, z_r$ sind algebraisch unabhängig über $k(u)$, also auch über $k(\dot u)$ und $k(\ddot u)$. Dagegen sind $z_0, \ldots, z_r$ algebraisch abhängig über $k(\ddot u)$.*

Beweis. Wären $z_1, \ldots, z_r$ abhängig über $k(u)$, so wären, da man die z_i beliebig permutieren kann, je r aus (z) ausgewählte z_i abhängig über $k(u)$.

---

[8]) B. L. VAN DER WAERDEN: Über A. WEILs Neubegründung der algebr. Geom. Abhandlungen math. Sem. Univ. Hamburg (1958).

Das System (z) hätte also über $k(u)$ einen Transzendenzgrad kleiner als r. Aus (3) kann man die x_j auflösen, also hätte das System (x) auch einen Transzendenzgrad kleiner als r über $k(u)$, was unseren Voraussetzungen über (x) und (u) widerspricht. Also sind $z_1, \ldots, z_r$ unabhängig über $k(u)$.

Wegen (3) hat das System $\bar{z}$ höchstens den Transzendenzgrad r über $k(\bar{u})$. Also sind $z_0, \ldots, z_r$ abhängig über $k(\bar{u})$. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Aus Satz 1 folgt, daß das System $(\bar{z})$ genau den Transzendenzgrad r über $k(\bar{u})$ hat. Es gibt also ein einziges Primpolynom $F(Z_0, \ldots, Z_r)$ mit Koeffizienten aus $k(\bar{u})$ mit der Eigenschaft

$$F(z_0, \ldots, z_r) = 0 \, . \tag{4}$$

Durch Multiplikation mit einem nur von den u_{ij} abhängigen Faktor kann man $F(Z)$ ganzrational in allen u_{ij} machen. Falls das so erhaltene Polynom in den Z_i und u_{ij} einen nur von den u_{ij} abhängigen Faktor enthält, kann man diesen weglassen. So erhält man ein Primpolynom

$$F(Z; \bar{u}) = F(Z_0, \ldots, Z_r; \; u_{01}, \ldots, u_{rn}) \, , \tag{5}$$

das bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist. Wir nennen es nach Krull das *Grundpolynom* der Varietät V über dem Körper k.

B. Faktorzerlegung des Grundpolynoms

Ersetzt man in $F(Z_0, \ldots, Z_r)$ die Unbestimmten $Z_1, \ldots, Z_r$ durch die Körperelemente $z_1, \ldots, z_r$, die nach Satz 1 über $k(\bar{u})$ unabhängig sind, so erhält man ein Polynom in einer Unbestimmten $Z_0 = U_{00}$ mit Koeffizienten aus $k(\bar{u}, \dot{z})$:

$$F(Z_0) = F(Z_0, \dot{z} \, ; \bar{u}) \, . \tag{6}$$

Das Polynom ist irreduzibel in $k(\bar{u}, \dot{z})\,[Z_0]$ und hat die Nullstelle

$$z_0 = -\sum_1^n u_{0j} x_j \, . \tag{7}$$

In einem geeigneten algebraischen Erweiterungskörper von $k(\bar{u}, \dot{z})$ zerfällt das Polynom (6) ganz in Linearfaktoren $(Z_0 - z_0^{(\nu)})$, wobei die $z_0^{(\nu)}$ konjugiert zu z_0 in bezug auf $k(\bar{u}, \dot{z})$ sind. Übt man auf (7) die Isomorphismen aus, die z_0 in seine Konjugierten $z_0^{(\nu)}$ überführen, so erhält man, da die u_{0j} bei diesen Isomorphismen fest bleiben,

$$z_0^{(\nu)} = -\sum_1^n u_{0j} x_j^{(\nu)} \, .$$

Also zerfällt $F(Z_0)$ in einem algebraischen Erweiterungskörper von $k(\bar{u}, \dot{z})$ ganz in Linearfaktoren

$$Z_0 - z_0^{(\nu)} = Z_0 + \sum_1^n u_{0j} x_j^{(\nu)} \, . \tag{8}$$

Ist z_0 separabel über $k(\bar{u}, \dot{z})$, so ist $F(Z_0)$ einfach das Produkt der Linearfaktoren (8), multipliziert mit einem von Z_0 unabhängigen Faktor. Ist z_0

inseparabel über $k(\ddot{u}, \dot{z})$ und ist p die Charakteristik, so kommt jeder Linearfaktor $q = p^s$mal vor und man hat

$$F(Z_0) = f(\dot{z}, \ddot{u}) \prod_\nu (Z_0 + \sum_1^n u_{0j} x_j^{(\nu)})^q. \tag{9}$$

Setzt man im separablen Fall $q = 1$, so gilt die Formel (9) allgemein. Der Exponent q heißt der *Separabilitätsgrad* des Grundpolynoms. Er ist gleich Eins im Fall eines separablen und gleich p^s im Fall eines inseparablen Grundpolynoms.

Nach Satz 1 hat der Körper $k(\dot{u})(\dot{z})$ den Transzendenzgrad r über $k(\dot{u})$, also denselben Transzendenzgrad wie der umfassendere Körper $k(\dot{u})(x)$. Also ist $k(\dot{u})(x)$ algebraisch über $k(\dot{u})(\dot{z})$. Die x_j und ebenso die konjugierten Größen $x_j^{(\nu)}$ sind also algebraisch über $k(\dot{u}, \dot{z})$.

Wir schreiben (9) als

$$F(Z_0, \dot{z}; \ddot{u}) = f(\dot{z}, \ddot{u})\, P(Z_0, \dot{z}; \ddot{u})$$

oder, nach Potenzen von Z_0 geordnet, als

$$f_0 Z_0^g + \cdots + f_{g-1} Z_0 + f_g = f(\dot{z}, \ddot{u}) \cdot (Z_0^g + \cdots + p_{g-1} Z_0 + p_g)\,.$$

Der Vergleich der Koeffizienten der Potenzen von Z_0 links und rechts zeigt erstens, daß $f(\dot{z}, \ddot{u}) = f_0$ ein Polynom in $(\dot{z})$ und $(\ddot{u})$ ist, und zweitens, daß die Koeffizienten p_i des Polynoms P gleich Quotienten f_i/f_0, also rationale Funktionen von $(\dot{z})$ und $(\ddot{u})$ sind.

Andererseits ist P ein Produkt von Linearfaktoren in den Z_0 und den u_{0j} mit Koeffizienten, die algebraische Funktionen von $(\dot{z})$ und $(\dot{u})$ sind. Das Produkt ist somit ein Polynom in Z_0 und den u_{0j} mit Koeffizienten, die rationale Funktionen von $(\dot{z})$ und $(\dot{u})$ sind. Man kann also schreiben

$$P(Z_0, \dot{z}; \ddot{u}) = \frac{Q(Z_0, \dot{z}, \ddot{u})}{R(\dot{z}, \dot{u})}\,,$$

wobei der Nenner R nur noch $(\dot{z})$ und $(\dot{u})$, nicht mehr die u_{0j} enthält. Der Faktor $f(\dot{z}, \ddot{u})$, mit dem man P zu multiplizieren hat, um eine ganz rationale Funktion in allen Variablen zu erhalten, enthält also nur $(\dot{z})$ und $(\dot{u})$ und kann $f(\dot{z}, \dot{u})$ genannt werden.

Somit vereinfacht sich (9) zu

$$F(Z_0, \dot{z}; \ddot{u}) = f(\dot{z}, \dot{u}) \prod_\nu (Z_0 + \Sigma\, u_{0j} x_j^{(\nu)})^q. \tag{10}$$

C. Übergang zur geometrischen Definition

Wir betrachten eine Korrespondenz K zwischen einem affinen Raum $A_{r(n+1)}$, in dem ein Punkt v durch Koordinaten

$$v_{ij} (i = 1, \ldots, r\,,\ j = 0, \ldots, n)$$

gegeben ist, und einem affinen Raum A_n, in dem ein Punkt y durch Koordinaten

$$y_1, \ldots, y_n$$

gegeben wird.

Die Gleichungen der Korrespondenz K seien:

erstens die Gleichungen, die ausdrücken, daß y auf der Primvarietät V liegt,

zweitens diejenigen, die ausdrücken, daß y in den Hyperebenen $v_1, \ldots, v_r$ liegt:

(11) $$v_{i0} + \Sigma v_{ij} y_j = 0 .$$

Nun wird behauptet:

Die Korrespondenz K ist irreduzibel über k.

Beweis: Ein allgemeines Paar $(w; x)$ der Korrespondenz wird erhalten, indem man in (11) statt (y) einen allgemeinen Punkt (x) von V und statt der $v_{ij} (j > 0)$ Unbestimmte w_{ij} einsetzt, die w_{i0} aber so bestimmt, daß (11) erfüllt bleibt:

(12) $$w_{i0} = - \Sigma w_{ij} x_j .$$

Daß jede Gleichung $g(w; x) = 0$ erfüllt bleibt, wenn man das allgemeine Paar $(w; x)$ durch irgend ein Paar $(v; y)$ der Korrespondenz ersetzt, ist trivial; denn man kann in $g(w; x) = 0$ zunächst für die w_{i0} ihre Ausdrücke (12) einsetzen:

$$g(- \Sigma w_{ij} x_j , \; w_{ij}; x) = 0 ,$$

sodann die x durch y ersetzen:

$$g(- \Sigma w_{ij} y_j , \; w_{ij}; y) = 0$$

und schließlich die Unbestimmten w_{ij} durch v_{ij} ersetzen, was wegen (11) ohne weiteres

$$g(v_{i0} , \; v_{ij}; y) = 0$$

ergibt.

Wenn man die Unbestimmten w_{ij} $(j > 0)$ in u_{ij} umbenennt, so gehen die w_{i0} in die früher durch (3) eingeführten z_i über. Also definieren auch die z_i, u_{ij} und x_i ein allgemeines Paar $(\dot{z}, \dot{u}; x)$ der Korrespondenz.

Die Dimension der Korrespondenz K ist

$$r(n+1) = r + r n ,$$

denn (x) hat die Dimension r und die Zahl der Unbestimmten w_{ij} oder u_{ij} ist $r n$.

Nach Satz 1 sind die z_i und u_{ij} $(1 \leqq i \leqq r)$ algebraisch unabhängig. Ihre Anzahl ist wieder $r(n+1)$. Also kann man ein allgemeines Paar (U', y') der Korrespondenz auch so erhalten: Für die $r(n+1)$ Koordinaten von U' nimmt man lauter unabhängige Unbestimmte

$$U_{ij} (i = 1, \ldots, r; \; j = 0, \ldots, n) ,$$

und für y' nimmt man irgend eine dazu gehörige Lösung der Gleichungen der Korrespondenz, d. h. irgend einen Schnittpunkt von V mit den Hyperebenen $U_1, \ldots, U_r$. Alle so erhaltenen Paare (U', y') haben den Transzendenzgrad $r(n+1)$, sind also allgemeine Paare der Korrespondenz. Da (y') algebraisch über $k(U')$ ist, so gibt es in einem normalen algebraischen Erweiterungskörper von $k(U')$ nur endlich viele Lösungen y', die wir auch mit $y^{(\nu)}$ bezeichnen

können. Weil alle allgemeinen Paare einer irreduziblen Korrespondenz äquivalent sind, so folgt:

Alle Schnittpunkte $y^{(\nu)}$ von V mit den allgemeinen Hyperebenen $U_1, \ldots, U_r$ sind konjugiert in bezug auf den Körper

$$k(U') = k(U_1, \ldots, U_r).$$

Ist y' irgend einer von diesen Schnittpunkten, so gibt es einen Isomorphismus, der das früher konstruierte allgemeine Paar $(\dot{z}, \dot{u}; x)$ in (U', y') überführt. Wir erweitern nun das System $\dot{u}$ zu $\ddot{u}$, indem wir noch die Unbestimmten u_{0j} $(j = 1, \ldots, n)$ hinzunehmen und verabreden, daß sie beim Isomorphismus in neue Unbestimmte U_{0j} übergehen. So erhalten wir

$$k(\dot{z}, \ddot{u}; x) \cong k(U', U_{0j}; y').$$

Schließlich nehmen wir links noch die Unbestimmte Z_0, rechts U_{00} hinzu und erhalten isomorphe Polynombereiche

$$k(\dot{z}, \ddot{u}; x)\,[Z_0] \cong k(U', U_{0j}; y')\,[U_{00}].$$

Unter B hatten wir das Primpolynom

$$F(Z_0) = F(Z_0, \dot{z}; \ddot{u})$$

mit der Nullstelle

$$z_0 = -\Sigma\, u_{0j} x_j \tag{13}$$

betrachtet. Ihm entspricht im Isomorphismus ein Primpolynom

$$F(U_{00}) = F(U_{00}, U_{0j}; U') = F(U)$$

mit der Nullstelle

$$z'_0 = -\Sigma\, U_{0j} y'_j. \tag{14}$$

In einem geeigneten algebraischen Erweiterungskörper von $k(U_{0j}, U')$ zerfällt das Polynom $F(U)$ natürlich wieder in Linearfaktoren

$$U_{00} - z_0^{(\nu)},$$

wobei die $z_0^{(\nu)}$ in bezug auf $k(U_{0j}, U')$ zu z'_0 konjugiert sind. Daraus folgen wie unter B die Gleichungen

$$z_0^{(\nu)} = -\Sigma\, U_{0j} y_j^{(\nu)} \tag{15}$$

und die zu (10) analoge Faktorzerlegung

$$F(U) = f(U') \prod_{\nu} (U_0 y^{(\nu)})^q \tag{16}$$

mit

$$(U_0 y^{(\nu)}) = U_{00} + \sum_1^n U_{0j} y_j^{(\nu)}.$$

In (16) sind die $y^{(\nu)}$ die durch $y_0 = 1$ normierten Schnittpunkte der Hyperebenen $U_1, \ldots, U_r$ mit der Varietät V. Ferner bedeutet:

U das System aller $U_{ij} (0 \leq i \leq r,\ 0 \leq j \leq n)$,
U_0 die Reihe der $U_{0j} (0 \leq j \leq n)$,
U' das System der übrigen $U_{ij} (i \neq 0)$.

Damit ist der Übergang zur geometrischen Definition der zugeordneten Form vollzogen.

Im folgenden werden wir abwechselnd die geometrische und die algebraische Ausdrucksweise gebrauchen, wie es jeweils zweckmäßig erscheint. Die Variabelnreihe

$$(U_{i0}, U_{i1}, \ldots, U_{in}) \text{ oder } (Z_i, u_{i1}, \ldots, u_{in})$$

wird immer mit U_i bezeichnet. Die Ausdrücke „Grundpolynom", „zugeordnete Form" und Form $F(U)$ sollen als Synonyme gelten.

Die Bezeichnung „Form" rechtfertigt sich dadurch, daß $F(U)$ in der Variabelnreihe U_0 homogen vom Grade

$$g = g_0 q$$

ist, wie man aus (16) ohne weiteres entnimmt. Dabei bedeutet g_0 die Anzahl der verschiedenen Linearfaktoren rechts in (16), oder den (reduzierten) Grad der Varietät V.

§ 2. Die Vertauschungseigenschaft und der Separabilitätsgrad

Wir gehen von der algebraischen Definition der Form

$$F(U) = (Z_0, \ldots, Z_r; \ddot{u})$$

aus, die so lautete: F ist ein Primpolynom in $Z_0, \ldots, Z_r$ und den $u_{ij} = U_{ij}$ $(j > 0)$ mit der Eigenschaft (4).

Vertauscht man irgend zwei von den Variablenreihen $u_0, \ldots, u_r$, etwa u_i und u_l, so werden nach (3) auch z_i und z_l vertauscht. Alle algebraischen Eigenschaften der z_i und u_{ij} bleiben bei dieser Vertauschung erhalten, also bleibt auch (4) erhalten. Da aber F bis auf einen konstanten Faktor das einzige Primpolynom mit der Eigenschaft (4) ist, so geht F bei der Vertauschung der Indizes i und l in cF über. Vertauscht man noch einmal, so erhält man

$$c^2 F = F,$$

also muß $c = \pm 1$ sein. Da jede Permutation ein Produkt von Transpositionen ist, so folgt:

Bei beliebigen Permutationen der Variablenreihen $U_0, \ldots, U_r$ geht $F(U)$ bis auf das Vorzeichen in sich über.

Aus dieser Vertauschungseigenschaft folgt, daß $F(U)$ in jeder einzelnen Variablenreihe U_i homogen ist und in jeder den Grad $g = g_0 q$ hat.

Der Inseparabilitätsgrad q ist 1 im separablen, p^e im inseparablen Fall. In beiden Fällen ist die q-te Potenz einer Summe gleich der Summe der q-ten Potenzen der Glieder. Also folgt aus (16), daß $F(U)$ die Variabeln U_{0j} der Reihe U_0 nur als q-te Potenzen enthält. Wegen der Vertauschungseigenschaft kann $F(U)$ auch die übrigen Variabeln U_{ij} nur als q-te Potenzen enthalten. Also hat man

$$F(U) = F_0(U)^q, \tag{17}$$

wobei F_0 eine Form in den Variabelnreihen $U_0, \ldots, U_r$ mit Koeffizienten aus dem q-ten Wurzelkörper von k ist.

Nach (10) ist $f(\dot{z}, \dot{u})$ gleich dem Koeffizienten der höchsten Potenz von Z_0 in $F(Z_0, \dot{z}; \ddot{u})$. Also enthält auch $f(\dot{z}, \dot{u})$ die Variabeln u_{ij} und z_i nur als q-te Potenzen und man kann schreiben

(18) $$f(\dot{z}, \dot{u}) = f_0(\dot{z}, \dot{u})^q .$$

Setzt man (17) und (18) in (10) ein und zieht auf beiden Seiten die q-te Wurzel, so folgt

(19) $$F_0(Z_0, \dot{z}; \ddot{u}) = f_0(\dot{z}, \dot{u}) \prod_\nu (Z_0 + \sum_1^n u_{0j} x_j^{(\nu)}) .$$

§ 3. Die Separabilität von F (Z_0)

Der folgende Satz 2 umfaßt die Sätze 8 und 9 von Hegde[6]).

Satz 2. *Ist $k(x)$ separabel erzeugbar über k, so ist z_0 separabel über $k(\ddot{u}, \dot{z})$ und umgekehrt. Ferner ist dann*

(20) $$k(\ddot{u}, x) = k(\ddot{u}, \ddot{z}) .$$

Beweis. Wir brauchen nur den Fall der Charakteristik p zu behandeln. Der p-te Wurzelkörper von k werde allgemein mit k' bezeichnet.

1. Es sei $k(x)$ separabel erzeugbar über k. Dann ist $k(u, x)$ auch separabel erzeugbar über $k(u)$. Nun ist aber, da die lineare Transformation (3) umkehrbar ist,

$$k(u, x) = k(u, z) ,$$

also ist $k(u, z)$ separabel erzeugbar über $k(u)$.

Nach Weils "Foundations" oder nach § 3 meiner „Neubegründung" folgt daraus, daß der Wurzelkörper $k(u)'$ und $k(u, z)$ linear disjunkt sind. Nach Satz 5 meiner „Neubegründung" kann man einige von den z_i als separierende Variabeln wählen. Da die Indices i in u_{ij} und z_i beliebig permutiert werden können, kann man auch $z_1, \ldots, z_r$ als separierende Variabeln wählen. Also ist z_0 separabel über

$$k(u, z_1, \ldots, z_r) = k(u, \dot{z}) .$$

Nun ist z_0 aber algebraisch über $k(\ddot{u}, \dot{z})$, d. h. in der irreduziblen Gleichung für z_0 über $k(u, \dot{z})$ kommen nur die $\ddot{u}$ und $\dot{z}$ vor. Also ist z_0 separabel über $k(\ddot{u}, \dot{z})$.

2. Nun sei z_0 separabel über $k(\ddot{u}, \dot{z})$, also auch über $k(u, \dot{z})$. Was für z_0 gilt, gilt auch für $z_{r+1}, \ldots, z_n$; also sind alle z_i separabel über $k(u, \dot{z})$. Somit ist $k(u, z)$ separabel erzeugbar über k. Daraus folgt, daß k' und $k(u, z)$ linear disjunkt sind. Um so mehr sind k' und $k(x)$ linear disjunkt, also ist $k(x)$ separabel erzeugbar über k.

3. Ist das der Fall, so folgt wie unter 1, daß $z_0, \ldots, z_{n-1}$ und daher auch $x_1, \ldots, x_n$ separabel über $k(u, \dot{z})$ sind. Nach § 1 sind alle x_i algebraisch über $k(\dot{u}, \dot{z})$, d. h. in den Minimalgleichungen für $x_1, \ldots, x_n$ über $k(u, \dot{z})$ kommen nur die $\dot{u}$ und $\dot{z}$ wirklich vor. Also sind $x_1, \ldots, x_n$ separabel über $k(\dot{u}, \dot{z})$.

Die Isomorphismen des Körpers $k(\ddot{u}, x)$, die die Elemente von $k(\ddot{u}, \dot{z})$ fest lassen, führen (x) in konjugierte Systeme $(x^{(\nu)})$ und z_0 in

$$z_0^{(\nu)} = -\sum_1^n u_{0j} x_j^{(\nu)}$$

über. Die $(x^{(\nu)})$ sind algebraisch über $k(\dot{u}, \dot{z})$ und die u_{0j} sind algebraisch unabhängig über diesem Körper. Daraus folgt: wenn ein $(x^{(\nu)})$ von (x) verschieden ist, so ist auch $z^{(\nu)}$ von z_0 verschieden. Wenn also ein Isomorphismus der eben betrachteten Art z_0 fest läßt, so muß er auch (x) fest lassen. Somit bleiben die x_i fest bei allen den Isomorphismen von $k(\ddot{u}, x)$, die die Elemente von $k(\ddot{u}, \ddot{z})$ fest lassen. Da die x_i außerdem separabel über $k(\ddot{u}, \ddot{z})$ sind, müssen sie diesem Körper angehören. Daraus folgt (20), und Satz 2 ist vollständig bewiesen.

Wir denken uns den Grundkörper k durch Adjunktion der Unbestimmten $\ddot{u}$ zu $K = k(\ddot{u})$ erweitert. Die Gleichung (20) besagt dann, daß $K(x)$ aus K erzeugt wird durch Adjunktion der $r+1$ Größen $z_0, \ldots, z_r$. Dabei sind $z_1, \ldots, z_r$ unabhängig über K, und z_0 ist eine separable Funktion von $z_1, \ldots, z_r$, die mit $z_1, \ldots, z_r$ durch die Gleichung (4) verbunden ist.

In meiner „Neubegründung" wurde der separabel erzeugbare Körper $k(x)$ durch $r+1$ Elemente $y_1, \ldots, y_{r+1}$ erzeugt, wobei y_{r+1} eine separable Funktion der unabhängigen $y_1, \ldots, y_r$ war. Wir sehen jetzt, daß über dem neuen Grundkörper $K = k(\ddot{u})$ die Linearkombinationen $z_0, \ldots, z_r$ die Rolle der $y_1, \ldots, y_{r+1}$ übernehmen können. Die Rolle des früher benutzten Primpolynoms $f(Y)$ mit der Eigenschaft $f(y) = 0$ spielt jetzt das Primpolynom $F(Z_0, \ldots, Z_r)$, d. h. die zugeordnete Form. Auf diesem Grundgedanken beruhen die folgenden Beweise.

Es sei k_v der kleinste vollkommene Körper über k. Ist k selbst vollkommen, so ist $k_v = k$; andernfalls entsteht k_v aus k durch Adjunktion aller p^m-ten Wurzeln $(m = 1, 2, \ldots)$. Die Koeffizienten der in § 2 definierten Form $F_0(U)$ liegen in k_v. Wir beweisen nun:

$F_0(U)$ ist über k_v irreduzibel.

Beweis. Im Falle $k_v = k$ ist die Behauptung klar. Andernfalls nehmen wir an, $F_0(U)$ wäre zerlegbar:

$$F_0(U) = G(U)\, H(U)\,. \tag{21}$$

Da F_0, als Form in U_0 betrachtet, nach (19) ein Produkt von lauter verschiedenen Linearfaktoren ist, sind die Faktoren $G(U)$ und $H(U)$ sicher teilerfremd. Wir erheben nun beide Seiten von (21) in eine solche q'-te Potenz $(q' = p^m)$, daß alle Koeffizienten links und rechts in k liegen. Man erhält links eine Potenz von $F(U)$, aber $F(U)$ ist prim in $k(U)$, also müssen rechts beide Faktoren Potenzen von F sein. Das widerspricht aber der Teilerfremdheit von G und H. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Mit derselben Methode beweist man, daß die Varietät V über k_v irreduzibel bleibt. Würde nämlich V über k_v zerfallen, so gäbe es in $k_v[X]$ ein Produkt

$$G(X)\, H(X)\,,$$

das Null wäre auf V, während $G(X)$ und $H(X)$ es nicht sind. Bestimmt man

$q' = p^m$ so, daß die q'-ten Potenzen von $G(X)$ und $H(X)$ beide in $k[X]$ liegen, so erhält man wie vorhin einen Widerspruch.

Die zugeordnete Form von V über k_v ist offensichtlich $F_0(U)$.

§ 4. Die absolute Irreduzibilität der Form F(U)

Satz 3. *Die Form $F(U)$ ist dann und nur dann absolut prim, wenn $k(x)$ regulär über k ist, d. h. wenn k und $k(x)$ linear disjunkt sind.*

Beweis. 1. $F(U)$ sei absolut prim. Aus (17) folgt dann, daß $q = 1$ sein muß. Nach Satz 2 ist also $k(x)$ separabel erzeugbar über k und es gilt

$$k(\ddot{u}, x) = k(\ddot{u}, \ddot{z}) .$$

Das System $(\ddot{u}, \ddot{z})$ besteht aus $(r + 1)\, n + r + 1$ Elementen und hat nur den Transzendenzgrad $(r + 1)\, n + r$, also hat das Ideal $\mathfrak{P}_{(\ddot{u}, \ddot{z})/k}$ eine Basis aus nur einem Primpolynom (für die Bezeichnungen siehe Weils "Foundations" oder meine „Neubegründung"). Dieses Primpolynom ist eben die zugeordnete Form $F(U)$. Diese ist nach Voraussetzung absolut prim, bleibt also prim nach der Erweiterung von k zu $\bar{k}$. Daraus folgt, daß die Basis von $\mathfrak{P}_{(\ddot{u}, \ddot{z})/\bar{k}}$ aus eben demselben Primpolynom $F(U)$ besteht. Nach Theorem 3 aus Weils "Foundations" (Satz 3 meiner „Neubegründung") sind also $\bar{k}$ und $k(\ddot{u}, \ddot{z})$ linear disjunkt. Um so mehr sind $\bar{k}$ und $k(x)$ linear disjunkt, d. h. $k(x)$ ist regulär über k.

Der hier angewandte Schluß ist genau derselbe, der in meiner „Neubegründung" zum Beweis des Satzes 6 führte. Die Form $F(U)$ tritt eben an die Stelle des damals benutzten Polynoms $f(Y)$.

2. Nun sei $k(x)$ regulär über k. Der Körper $K = k(\ddot{u})$ ist frei in bezug auf (x), also ist $K(x)$ regulär über K ("Foundations", Theorem 5, oder „Neubegründung", Satz 6). Nach Satz 2 ist aber

$$K(x) = k(\ddot{u}, x) = k(\ddot{u}, \ddot{z}) = K(\ddot{z}) ,$$

also ist $K(\ddot{z})$ regulär über K.

Wir wollen zeigen, daß $F(U) = F(Z_0, \ldots, Z_r, \ddot{u})$ als Polynom in $Z_0, \ldots, Z_r$ absolut prim ist. Wäre das nicht der Fall, so würde $F(U)$ in $\bar{K}[Z_0, \ldots, Z_r]$ zerfallen:

$$F(U) = G(Z) \cdot H(Z) .$$

Ersetzt man $Z_0, \ldots, Z_r$ durch $z_0, \ldots, z_r$, so wird F Null, also muß G oder H dann Null werden, etwa

$$G(z_0, \ldots, z_r) = 0 . \tag{22}$$

Die in $G(z_0, \ldots, z_r)$ vorkommenden Potenzprodukte der z_i wären dann linear abhängig über $\bar{K}$, aber nicht über K. Das geht nicht, weil $\bar{K}$ und $K(\ddot{z})$ linear disjunkt sind. Also ist $F(U)$ als Polynom in $Z_0, \ldots, Z_r$ absolut prim.

Wäre nun $F(U)$ als Funktion sämtlicher U_{ij} nicht absolut prim, so müßte es in der Zerlegung

$$F(U) = G(U)\, H(U) \tag{23}$$

einen Faktor, etwa $H(U)$, geben, der die $Z_i = U_{i0}$ nicht enthält, sondern nur die U_{ij} mit $j > 0$.

Wir betrachten nun beide Seiten von (23) als Funktionen von $Z_0 = U_{00}$ allein und wenden links die Zerlegung (16) an. Der erste Faktor $f(U')$ dieser Zerlegung enthält $U_{01}, \ldots, U_{0n}$ nicht. Die übrigen Faktoren sind Linearfaktoren $U_{00} + \cdots$, die keinen von U_{00} unabhängigen Faktor enthalten. Also muß $H(U)$ als Faktor in $f(U')$ enthalten sein, also enthält $H(U)$ die U_{0j} nicht.

Vertauscht man nun die Variabelnreihen $U_0, \ldots, U_r$, so folgt, daß $H(U)$ keinen der U_{ij} enthalten kann, d. h. $H(U)$ ist eine Konstante und $F(U)$ absolut irreduzibel.

Ist $k(x)$ regulär über k, so heißt der Körper k *gut für die Varietät* V. A. WEIL nennt k in diesem Fall a field of definition of V. Aus Satz 3 folgt unmittelbar:

Satz 4. *Der Körper k ist dann und nur dann gut für V, wenn die zugeordnete Form $F(U)$ absolut prim ist.*

§ 5. Ganzheitseigenschaften. Die Gleichungen von V

A. *Die x_j als ganze Funktion von $z_1, \ldots, z_r$*

Wir beweisen zunächst:

Satz 5. *Wenn das Grundpolynom $F(Z)$ als Polynom in $Z_0, \ldots, Z_r$ den Grad h hat, so enthält es ein Glied $c Z_0^h$ mit $c \neq 0$.*

Beweis. Wir schreiben die ersten $r + 1$ Gleichungen (3) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_{01} & \cdots & u_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{r1} & \cdots & u_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

oder kurz

(24) $$z = -u\,x\,.$$

Mit $(r+1)^2$ Unbestimmten t_{ij} bilden wir eine quadratische Matrix T und setzen

(25) $$z' = T^{-1} z \quad \text{oder} \quad z = T z'\,.$$

Durch die Transformation $Z = T\,Z'$ möge das Grundpolynom $F(Z)$ in $F'(Z')$ übergehen:

(26) $$F(TZ') = F'(Z')\,.$$

In F' kommt das Glied $Z_0'^h$ mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten vor, denn die Elemente der ersten Spalte der Matrix T sind Unbestimmte und F ist nicht identisch Null.

Ersetzt man in (26) die Z' durch z', so wird die linke Seite und daher auch die rechte Seite Null. Also ist $F'(Z')$ das Primpolynom in $Z_0', \ldots, Z_r'$ mit der Eigenschaft $F'(z') = 0$.

Setzt man (24) in (25) ein und setzt $T^{-1}u = u'$, so erhält man

(27) $$z' = -u'\,x\,.$$

Die Gleichung $F(z) = 0$ gilt, wenn man $z = -u x$ in ihr einsetzt, identisch in den u. Sie bleibt also gelten, wenn u überall durch u' und z durch z' ersetzt wird. Also kann man das Polynom $F'(Z')$ mit der Eigenschaft $F'(z') = 0$ einfach dadurch erhalten, daß man in $F(Z)$ die u durch u' und die Z durch Z' ersetzt.

Würde nun F kein Glied mit Z_0^h enthalten, so würde das durch die Substitution $u \to u'$ erhaltene Polynom F' kein Glied mit $Z_0'^h$ enthalten. Wir haben aber gesehen, daß ein solches Glied vorhanden ist. Also enthält F ein Glied mit Z_0^h.

Aus Satz 5 folgt, daß das Polynom $f(\dot{z}, \dot{u})$ in (10) die Variabeln $z_1, \ldots, z_r$ nicht enthalten kann. Sonst hätte nämlich die rechte Seite von (10) in allen Variabeln $Z_0, z_1, \ldots, z_r$ zusammen einen Grad größer als $g = g_0 q$, enthielte aber Z_0 nur in der g-ten Potenz, was dem Satz 5 widerspricht.

Nebenbei folgt jetzt $g = h$ und $c = f(\dot{u})$.

Aus Satz 5 folgt weiter, daß z_0 eine *ganze* algebraische Funktion von $z_1, \ldots, z_r$ über $k(\ddot{u})$ als Konstantenkörper ist. Diese Funktion erfüllt die Gleichung

$$F(z_0) = 0 \tag{28}$$

oder ausführlicher

$$F(z_0, z_1, \ldots, z_r; \ddot{u}) = 0\,. \tag{29}$$

Setzt man $z_0 = -\Sigma u_{0j} x_j$ in (29) ein und hebt unter den $\ddot{u}$ die u_{0j} besonders hervor, so erhält man

$$F(-\Sigma u_{0j} x_j, z_1, \ldots, z_r;\ u_{0j}, \dot{u}) = 0\,. \tag{30}$$

Die u_{0j} sind Unbestimmte, die von den $\dot{u}$, x_j und z_i unabhängig sind. Die Gleichung (30) gilt identisch in den u_{0j}. Man kann also $u_{01} = 1$ und die übrigen $u_{0j} = 0$ setzen. So erhält man eine Gleichung für x_1:

$$f(\dot{u})\, x_1^h + f_1(\dot{z};\, \dot{u})\, x_1^{h-1} + \cdots + f_h(\dot{z};\, \dot{u}) = 0 \tag{31}$$

und analoge Gleichungen für $x_2, \ldots, x_n$. Daher:

Die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ des allgemeinen Punktes x von V sind ganze algebraische Funktionen von $z_1, \ldots, z_r$ über $k(\dot{u})$ als Konstantenkörper.

B. *Die Gleichungen von V*

In ZAG 3 (Math. Ann. 108) wurde eine Methode entwickelt, durch Faktorzerlegung des Grundpolynoms $F(Z_0, \ldots, Z_r; \ddot{u})$ für spezielle Werte von $Z_1, \ldots, Z_r$ alle Punkte von V zu erhalten. Auf Grund dieser Methode kann man auch sehr leicht die Bedingungen herleiten, die ein Punkt y zu erfüllen hat, damit er auf V liegt. Diese Methode und diese Bedingungen wollen wir jetzt, leicht modifiziert, neu herleiten.

Es sei K ein beliebiger Erweiterungskörper von k. Wir nehmen an, daß die u_{ij} $(0 \leqq i \leqq r, 1 \leqq j \leqq n)$ Unbestimmte über K sind. Wir bezeichnen mit L die algebraisch abgeschlossene Hülle von $K(\dot{u})$, wobei $(\dot{u})$ wie immer das System der u_{ij} mit $1 \leqq i \leqq r$ bezeichnet. Wir setzen uns zum Ziel, alle Punkte y von V mit Koordinaten aus L zu bestimmen.

Setzt man in (29) für alle z_i ihre Ausdrücke (3) ein, so erhält man

(32) $$F(-\Sigma u_{ij} x_j;\ \ddot{u}) = 0\,.$$

Diese Gleichungen gelten (identisch in den u_{ij}) für den allgemeinen Punkt x von V und daher für jeden Punkt y von V:

(33) $$F(-\Sigma u_{ij} y_j;\ \ddot{u}) = 0\,.$$

Setzt man also

(34) $$t_i = -\Sigma u_{ij} y_j \qquad (i = 0, \ldots, r)\,,$$

so erhält man

(35) $$F(t_0, t_1, \ldots, t_r;\ \ddot{u}) = 0\,.$$

Wenn die y_j in L liegen, liegen $t_1, \ldots, t_r$ ebenfalls in L.

Jetzt kehren wir den Zusammenhang um und nehmen $t_1, \ldots, t_r$ als gegebene Elemente von L an. Wir bestimmen t_0 als irgend eine Lösung der Gleichung (35) im algebraisch abgeschlossenen Universalkörper Ω. Solche Lösungen gibt es immer, denn (35) enthält nach Satz 5 ein Glied $c\,t_0^h$ mit $c \neq 0$.

Das Polynom $F(Z_0, Z_1, \ldots, Z_r;\ \ddot{u})$ ist über $k(\ddot{u})$ irreduzibel. Die Gleichung (35) definiert also eine über $k(\ddot{u})$ irreduzible Varietät im affinen $(r+1)$-dimensionalen Raum der Punkte $t = (t_0, \ldots, t_r)$. Ein allgemeiner Punkt dieser Varietät ist der durch (3) definierte Punkt $z = (z_0, \ldots, z_r)$, denn $z_1, \ldots, z_r$ sind nach Satz 1 algebraisch unabhängig über $k(\ddot{u})$. Also ist t eine Spezialisierung von z über $k(\ddot{u})$.

Eine solche Spezialisierung läßt sich immer zu einer Spezialisierung

(36) $$(z, x) \to (t, y) \text{ über } k(\ddot{u})$$

fortsetzen. Unendliche Spezialisierungen sind dabei von vornherein ausgeschlossen, da $x_1, \ldots, x_n$ nach (31) ganze algebraische Funktionen von $z_1, \ldots, z_r$ über $k(\ddot{u})$ sind.

Bei der Spezialisierung (36) bleibt die Gleichung (31) erhalten. Also ist jedes y_j algebraisch über L und daher in L enthalten.

Ferner ist y eine Spezialisierung von x über k und daher ein Punkt von V.

Auch die Gleichungen (3) bleiben bei der Spezialisierung erhalten; daher gelten wieder die Gleichungen (34). Das heißt: Wenn wir, von den t_i ausgehend, den Punkt y bestimmen und aus y nach (34) wieder die t_i berechnen, so kommen wir genau auf die t_i zurück, von denen wir ausgegangen sind. Insbesondere folgt aus der ersten Gleichung (34)

$$t_0 = -\Sigma u_{0j} y_j\,,$$

daß die Lösungen t_0 der Gleichung (35) samt und sonders dem Körper $L(u_{0j})$ angehören und Linearformen in den Unbestimmten $u_{01}, \ldots, u_{0n}$ sind. Die Koeffizienten dieser Linearformen sind die y_j; diese sind also durch t_0 jeweils *eindeutig bestimmt*. Zu jeder Lösung t_0 der Gleichung (35) gehört ein einziger Punkt y.

Will man Punkte y mit Koordinaten aus der algebraisch abgeschlossenen Hülle $\bar{K}$ des vorgegebenen Körpers K erhalten, so muß man, wie das in ZAG 3 getan wurde, für $(\dot{u})$ ein System von Elementen aus $\bar{K}$ so wählen, daß $f(\dot{u}) \neq 0$ wird. Dann wird $L = \bar{K}$ und die eben erklärte Methode ergibt alle Punkte y von V mit Koordinaten aus $\bar{K}$. Die u_{0j} bleiben nach wie vor Unbestimmte.

In dieser Arbeit bleiben wir aber dabei, daß sämtliche u_{ij} Unbestimmte sind.

Wir haben gesehen: Wenn y auf V liegt und $t_0, \ldots, t_r$ durch (34) definiert werden, so erfüllen diese t_i die Gleichung (35).

Es gilt aber auch umgekehrt: *Wenn die durch* (34) *definierten* t_i *die Gleichung* (35) *erfüllen, so liegt* y *auf* V. Man kann dann nämlich nach der eben geschilderten Methode durch Fortsetzung der Spezialisierung $z \to t$ zu $(z, x) \to$ $\to (t, y')$ einen Punkt y' von V erhalten, für den

$$t_0 = -\Sigma u_{0j} y'_j$$

gilt. Vergleicht man das mit

$$t_0 = -\Sigma u_{0j} y_j,$$

so folgt $y_j = y'_j$, weil die u_{0j} über L unabhängig sind. Also ist y ein Punkt von V.

Daraus folgt:

Satz 6. *Ein Punkt* y *mit Koordinaten aus* L *liegt dann und nur dann auf* V, *wenn die Linearformen* (34) *die Gleichung* (35) *erfüllen:*

$$F(-\Sigma u_{ij} y_j; \ddot{u}) = 0. \tag{37}$$

Dieser Satz gilt insbesondere für Punkte y mit Koordinaten aus $\bar{K}$. Über $\bar{K}$ sind die u_{ij} unabhängige Unbestimmte; also folgt aus (36), daß die Koeffizienten aller Potenzprodukte der u_{ij} gleich Null sein müssen. So erhält man ein explizites Gleichungssystem für V:

$$F_h(y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind ganzzahlige Linearkombinationen der Koeffizienten der zugeordneten Form F.

Die geometrische Bedeutung der Formel (37) ist ganz einfach. Legt man durch einen Punkt y möglichst allgemein $r+1$ Hyperebenen $w_0, \ldots, w_r$, so haben die Koeffizienten w_{ij} dieser Hyperebenen w_i die Bedingungen

$$w_{i0} + \sum_1^n w_{ij} y_j = 0$$

zu erfüllen. Daraus ergibt sich

$$w_{i0} = -\Sigma w_{ij} y_j. \tag{38}$$

Damit nun y auf V liegt, müssen die Hyperebenen $w_0, \ldots, w_r$ die Bedingung

$$F(w_0, \ldots, w_r) = 0 \tag{39}$$

erfüllen, wo F die zugeordnete Form ist. Dabei kann man die w_{ij} mit $i \neq 0$ als Unbestimmte u_{ij} wählen und die w_{i0} durch (38) definieren. So ergibt sich (37).

Im projektiven Fall ist das Prinzip gleich, aber die Rechnung etwas komplizierter. Die allgemeinste Hyperebene w, die durch einen Punkt $(y_0, \ldots, y_n)$ im projektiven Raum geht, ist durch

$$w_j = \Sigma s_{jk} y_k \qquad (s_{jk} = -s_{kj}, s_{jj} = 0)$$

gegeben. Nimmt man wieder $r+1$ solche Hyperebenen $u_0, \ldots, u_r$ und setzt die Bedingungsgleichung

$$F(w_0, \ldots, w_r) = 0 \tag{40}$$

identisch in den s_{jk} an, so erhält man nach[1]) die Gleichungen der Varietät V im projektiven Raum.

§ 6. Zerfall einer Varietät bei Erweiterung des Grundkörpers

Es gibt zwei Methoden, das Verhalten einer Primvarietät bei Erweiterung des Grundkörpers k zu untersuchen. Man kann, wie das in den Arbeiten [2]) und [3]) geschehen ist, das Verhalten des zu V gehörigen Primideals $\mathfrak{p}$ bei einer Erweiterung von k untersuchen. Einfacher ist es jedoch, die Idealtheorie ganz beiseite zu lassen und die Zerlegung von V aus der Faktorzerlegung der Form $F(U)$ zu erschließen.

Der Grundkörper k kann für die Zwecke dieser Untersuchung immer als vollkommen angenommen werden. Ist er es nämlich nicht, so kann man von k zum vollkommenen Wurzelkörper k_v übergehen. Auf die Reduzibilität von V hat diese Körpererweiterung keinen Einfluß (siehe § 3, Schluß).

Ist k vollkommen, so ist der Separabilitätsgrad $q=1$ und die Gleichung (16) vereinfacht sich zu

$$F(U) = f(U') \prod_{\nu} (U_0 y^{(\nu)}) = f(U') \, G(U)\,. \tag{41}$$

Dabei sind $y^{(\nu)}$ die Schnittpunkte von V mit den allgemeinen Hyperebenen $U_1, \ldots, U_r$; $f(U')$ ist eine Funktion von $U_1, \ldots, U_r$ allein und $G(U)$ ist das Produkt der Linearfaktoren $(U_0 y^{(\nu)})$.

Nun sei K ein beliebiger Erweiterungskörper von k. Wir nehmen an, daß die U_{ij} auch über K noch Unbestimmte sind. Die $y^{(\nu)}$ brauchen über $K(U_1, \ldots, U_r)$ nicht mehr alle konjugiert zu sein, sondern sie können in Systeme konjugierter Punkte zerfallen. Entsprechend zerfällt das Produkt $G(U)$ in Teilprodukte

$$G(U) = G_1 G_2 \ldots G_s\,, \tag{42}$$

wobei jeder Faktor G_i ein Produkt von über $K(U)$ konjugierten Linearfaktoren $(U_0 y^{(\nu)})$ ist.

Jeder der über $K(U)$ konjugierten, zu G_i gehörigen Punkten $y^{(\nu)}$ hat über K den Transzendenzgrad r und ist daher allgemeiner Punkt einer über K irreduziblen, r-dimensionalen Varietät V_i.

Macht man die G_i durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren $f_i(U')$ ganzrational auch in $U_1, \ldots, U_r$, so erhält man die zugeordneten Formen $F_i(U)$ der Varietäten V_i. Aus (42) folgt, wenn beide Seiten ganz rational

in allen Variabelnreihen gemacht und alle nur von $U_1, \ldots, U_r$ abhängigen Faktoren links und rechts weggekürzt werden,

$$F(U) = F_1 F_2 \ldots F_s. \tag{43}$$

Nun wird behauptet:

V ist die Vereinigung von $V_1, \ldots, V_s$.

Beweis. Nach § 5 B gehört ein Punkt y dann und nur dann zu V, wenn die $r+1$ Hyperebenen $w_0, \ldots, w_r$, die durch

$$w_{i0} = -\Sigma w_{ij} y_j$$

mit unbestimmten w_{ij} $(i \neq 0)$ definiert sind, identisch in diesen Unbestimmten die Gleichung

$$F(w_0, \ldots, w_r) = 0$$

erfüllen. Ist das für F der Fall und gilt (43), so ist es auch für ein F_i der Fall und umgekehrt. Also liegt ein Punkt y dann und nur dann auf V, wenn er auf einer der V_i liegt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nach dem eben Bewiesenen entsprechen die Primfaktoren F_i von $F(U)$ eineindeutig den irreduziblen Teilen V_i von V. Ist also F absolut prim, so ist auch V absolut irreduzibel oder „unteilbar".

Bei vollkommenen Grundkörpern k gilt auch das Umgekehrte: Ist V unteilbar, so ist F absolut prim. Ist k unvollkommen, so können wir nur schließen, daß F eine q-te Potenz einer absoluten Primform F_0 ist.

Damit haben wir

Satz 7. *Die Varietät V ist dann und nur dann unteilbar, wenn ihre zugeordnete Form* $F(U)$ *eine q-te Potenz einer absoluten Primform* $F_0(U)$ *ist, wobei* $q = 1$ *oder* $q = p^e$ *ist.*

Aus Satz 4 und Satz 7 folgt:

Satz 8. *Der Körper k ist dann und nur dann gut für V, wenn V unteilbar und* $q = 1$, *d. h.* $F(U) = F_0(U)$ *ist.*

Dieser Satz gibt uns, wenn eine unteilbare Varietät gegeben ist, ein einfaches Mittel an die Hand, den kleinsten Körper k_0 zu konstruieren, der gut für V ist. Man normiert die zugeordnete Form $F(U)$ so, daß ein Koeffizient gleich Eins wird. Im Fall der Charakteristik p sieht man zu, ob F sich als Polynom in den U_{ij}^q schreiben läßt, wobei $q = p^e$ als möglichst hohe Potenz von p zu bestimmen ist. Sodann bildet man $F_0(U)$, indem man aus allen Koeffizienten von $F(U)$ die q-te Wurzel auszieht. Für Charakteristik Null setze man $F_0 = F$. Die Koeffizienten von F_0 erzeugen den gewünschten Körper k_0.

(Eingegangen am 30. April 1958)

HIRZEBRUCH, F. und HOPF, H.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 156—172 (1958)

Felder von Flächenelementen in 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

Von

FRIEDRICH HIRZEBRUCH in Bonn und HEINZ HOPF in Zürich

Herrn H. BEHNKE zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Wir betrachten 4-dimensionale kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeiten M und in ihnen stetige Felder von orientierten Flächenelementen. Die nächstliegende Frage lautet: „*In welchen M existieren solche Felder ohne Singularitäten?*" Eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit besteht darin, daß diese M durch eine arithmetische Relation zwischen der Eulerschen Charakteristik e und der Poincaréschen Bilinearform $S(x,y)$ charakterisiert werden; $S(x,y)$ bezeichnet also die Schnittzahl der 2-dimensionalen Homologieklassen x und y, und zwar ist „Homologie" hier im einfachsten Sinne, nämlich als „Homologie mit Division" zu verstehen (x, y sind also Elemente der, modulo der Torsionsgruppe reduzierten, ganzzahligen Homologiegruppe). Übrigens werden wir uns der Cohomologie-Sprache bedienen, so daß nachher x, y Elemente der 2-dimensionalen, modulo der Untergruppe der Elemente endlicher Ordnung reduzierten, ganzzahligen Cohomologiegruppe und $S(x,y)$ den Wert des 4-dimensionalen Cup-Produktes xy auf dem Grundzyklus der orientierten M bezeichnen werden. In der erwähnten arithmetischen Relation werden außer dem Trägheitsindex (oder der Signatur) τ (vgl. 4.1) einer symmetrischen Bilinearform $S(x,y)$ noch die folgenden Begriffe auftreten:

Auf dem p-dimensionalen Gitter (ganzzahligen Modul) H sei S eine ganzzahlige symmetrische bilineare Funktion von Gittervektoren x, y mit der Determinante ± 1. Dann gibt es solche Gittervektoren w, daß

$$S(w, x) \equiv S(x, x) \bmod 2 \text{ für jeden } x \in H \tag{1}$$

ist; in der Tat: hat S in bezug auf eine beliebig gewählte Basis von H die Matrix (a_{ij}), so besitzt der Vektor w, dessen Komponenten w_j durch das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} w_j = a_{ii}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

bestimmt sind, die Eigenschaft (1); ferner sieht man leicht, daß mit w alle Vektoren $w' = w + 2x$ ($x \in H$ beliebig), und nur diese w', ebenfalls (1) erfüllen. Somit bilden die durch (1) charakterisierten w eine Restklasse $W \in H/2H$.

Wir verstehen unter Ω die Menge aller Zahlen $S(w,w)$ mit $w \in W$. (Im Falle $p = 0$ verstehen wir unter Ω die nur aus der 0 bestehende Menge.)

Für eine Mannigfaltigkeit M ist also neben der Eulerschen Charakteristik e und dem Trägheitsindex τ die Zahlenmenge Ω definiert. Nun lautet die Antwort auf die anfangs formulierte Frage:

In M gibt es dann und nur dann Felder von Flächenelementen ohne Singularität, wenn

$$3\tau + 2e \in \Omega \quad \textit{und} \quad 3\tau - 2e \in \Omega .$$

Felder mit höchstens endlich vielen Singularitäten existieren nach einem Satz von Whitney (den wir übrigens in (4.1 vi) noch einmal beweisen werden) in jeder M. Jeder isolierten Singularität P_i ist in bekannter Weise ein Index zugeordnet: er ist die Homotopieklasse einer bestimmten Abbildung einer Sphäre $\mathbf{S}_3$ in die Mannigfaltigkeit Σ der orientierten Ebenen durch einen Punkt des euklidischen $\mathbf{R}^4$, also ein Element der Gruppe $\pi_3(\Sigma)$; da Σ homöomorph mit dem Sphärenprodukt $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ und da $\pi_3(\mathbf{S}_2)$ unendlich zyklisch ist, kann der Index bei Beachtung gewisser Orientierungskonventionen als Paar (a_i, b_i) ganzer Zahlen aufgefaßt werden; die Indexsumme des Feldes ist das Paar (a, b) mit $a = \Sigma a_i$, $b = \Sigma b_i$, summiert über alle Singularitäten. Wir fragen, welche Indexsummen in einer gegebenen M auftreten. Diese Indexsummen sind im allgemeinen nicht einander gleich; vielmehr gilt folgender Satz:

Dann und nur dann haben in M alle Indexsummen den gleichen Wert, wenn die zweite Bettische Zahl $b_2 = 0$ ist; und zwar ist dieser Wert

$$(a, b) = (-e/2,\ +e/2) = (-1 + b_1\,,\ 1 - b_1)\,,$$

wobei b_1 die erste Bettische Zahl ist. Wenn $b_2 \neq 0$ ist, so gibt es in M Felder mit unendlich vielen verschiedenen Indexsummen.

Dies ist ein Korollar des folgenden Hauptsatzes der Arbeit:

Als Indexsummen von Feldern mit endlich vielen Singularitäten in M treten die folgenden Zahlenpaare (a, b) und nur diese auf:

$$\text{(2)} \quad a = \frac{1}{4}(\alpha - 3\tau - 2e)\,, \quad b = \frac{1}{4}(\beta - 3\tau + 2e) \quad \textit{mit beliebigen } \alpha,\ \beta \in \Omega \text{ [1]}.$$

[1]) Da a und b nach Definition ganze Zahlen sind, sind auch die rechten Seiten in (2), die man als

$$\frac{1}{4}(\alpha - \tau) - \frac{1}{2}(\tau + e)\,, \quad \frac{1}{4}(\beta - \tau) - \frac{1}{2}(\tau - e)$$

schreiben kann, ganz; ferner ist $\tau \equiv e \bmod. 2$ (da beide Zahlen mod. 2 der 2. Bettischen Zahl kongruent sind); daher ist die Ganzheit der obigen Zahlen gleichbedeutend mit der Gültigkeit der Kongruenzen

$$\text{(3)} \qquad S(w, w) \equiv \tau \bmod. 4 \ \text{ für } w \in W\,.$$

Für diejenigen Bilinearformen S, welche als Poincarésche Formen in Mannigfaltigkeiten M auftreten, haben wir somit (3) auf dem Umweg über (2) bewiesen. Herr W. Ledermann hat auf algebraischem Wege gezeigt, daß (3) für alle symmetrischen ganzzahligen Bilinearformen S mit ungerader Determinante gilt (An arithmetical property of quadratic forms, Comment. Math. Helvet. Erscheint demnächst).

Wenn wir ein festes $w \in W$ auszeichnen und

$$w^2 - 3\tau - 2e = 4a_0\,,\quad w^2 - 3\tau + 2e = 4b_0$$

setzen, so können wir statt (2) auch schreiben:

(2′) $\quad a = x^2 + wx + a_0\,,\; b = y^2 + wy + b_0$ mit beliebigen $x, y \in H$

(wobei H die, modulo der Cotorsion reduzierte, ganzzahlige 2. Cohomologiegruppe ist und hier ein Produkt uv zweier Elemente $u, v \in H$ — also z. B. x^2, $wx, \ldots$ — ebenso wie $S(u,v)$ den Wert des 4-dimensionalen Cup-Produktes auf dem Grundzyklus von M bezeichnet).

2-Beine, d. h. geordnete Paare linear unabhängiger Richtungen, stellen Flächenelemente dar. Es gilt:

In M gibt es dann und nur dann Felder von 2-Beinen ohne Singularität (d. h. Paare von überall linear unabhängigen Richtungsfeldern), wenn $e = 0$ und $3\tau \in \Omega$ ist.

Auch die möglichen Indexsummen der Singularitäten von 2-Bein-Feldern werden bestimmt. Ferner werden Kriterien für die Existenz einer fastkomplexen Struktur sowie für die Parallelisierbarkeit von M angegeben. Alle Ergebnisse sind in (4.3 — 4.6) zusammengestellt.

Daß die Indexsummen (a, b) durch die Werte zweier Cohomologie-Polynome 2. Grades von der Art (2′) bestimmt sind, war bereits — übrigens auf einem anderen Wege als dem, den wir jetzt benutzen werden — in den Noten [8] und [9] von HOPF festgestellt worden; jedoch gelang damals die Bestimmung der Koeffizienten dieser Polynome nur in Spezialfällen, z. B. für die komplexe projektive Ebene, aber nicht für beliebige M. Der allgemeine Fall wurde dann von HIRZEBRUCH erledigt. Die ganze Untersuchung betrifft natürlich Faserbündel, Hindernisse und charakteristische Klassen. Wir werden in unserer Darstellung Sätze aus diesen Theorien ohne Kommentar benutzen; wir verweisen auf [12] (besonders für die Hindernis-Theorie) und auch auf [1, 2, 3, 6] (für Faserbündel und charakteristische Klassen). Die Tatsache, daß unsere Sätze, zu denen wir auf erst in den letzten Jahren erschlossenen Wegen gelangen, ganz im Rahmen der alten Poincaréschen Begriffe formuliert werden können (wie wir es oben getan haben), hat vielleicht keine besonders große prinzipielle Bedeutung (da sie sich kaum auf höhere Dimensionszahlen übertragen lassen dürfte); aber wir halten sie doch für bemerkenswert nicht nur als Kuriosum, sondern auch im Hinblick auf die Beziehungen zwischen alten Begriffen und neuen Methoden, die sich in ihr äußern.

Aus Gründen teils sachlicher, teils persönlicher Natur, die wir angedeutet haben, macht es uns besondere Freude, diese Arbeit Herrn BEHNKE zu widmen, dessen Interessen und dessen Wirksamkeit in so hohem Maße der gegenseitigen Durchdringung der „klassischen“ und der „modernen“ Mathematik sowie der Zusammenarbeit zwischen Mathematikern verschiedener Generationen gelten.

§ 1. Homomorphismen und charakteristische Klassen

1.1. Wie in [2] werden Faserbündel durch ein Symbol, meistens durch einen kleinen griechischen Buchstaben, angedeutet. Ist ξ ein Faserbündel, dann wird mit E_ξ der Totalraum und mit B_ξ die Basis von ξ bezeichnet. Es sei G eine kompakte Liesche Gruppe und ξ ein G-Prinzipalfaserbündel. Wenn G auf dem Raum F operiert, dann hat man bekanntlich das zu ξ assoziierte Faserbündel (ξ, F) mit F als Faser, dessen Totalraum $E_\xi \times_G F$ ist, das ist der Quotient von $E_\xi \times F$ modulo der Äquivalenzrelation $(x, f) \approx \approx (x \cdot g, g^{-1} \cdot f)$. Es sei G' eine weitere kompakte Liesche Gruppe und λ ein Homomorphismus von G in G'. Jedem G-Prinzipalfaserbündel ξ ist dann die λ-Erweiterung $\lambda_* \xi$ zugeordnet, das ist ein G'-Prinzipalfaserbündel, ebenfalls mit der Basis B_ξ, dessen Totalraum $E_\xi \times_G G'$ ist, wo G auf G' durch $g \cdot g' = = \lambda(g) \cdot g'$ operiert. Operiert G' auf F, dann operiert auch G auf F durch $g \cdot f = \lambda(g) \cdot f$ und der Totalraum von $(\lambda_* \xi, F)$ ist kanonisch homöomorph zum Totalraum von (ξ, F):

$$(E_\xi \times_G G') \times_{G'} F \cong E_\xi \times_G F .$$

Dieser Homöomorphismus ist fasertreu. Weiter werde an folgendes erinnert: Wenn ξ ein G-Prinzipalfaserbündel und U eine abgeschlossene Untergruppe von G ist, dann ist E_ξ / U der Totalraum des zu ξ assoziierten Faserbündels mit G/U als Faser, wo G auf G/U durch Linkstranslationen operiert.

$$E_\xi / U = E_\xi \times_G G/U .$$

Dieses G/U-Faserbündel hat dann und nur dann einen Schnitt über B_ξ, wenn ξ die ι-Erweiterung eines U-Prinzipalfaserbündels über B_ξ ist, wo ι die Einbettung von U in G ist. — In [2] wird ein Verfahren zur Berechnung der charakteristischen Klassen von $\lambda_* \xi$ aus denen von ξ angegeben, das wir auf Homomorphismen von $\mathbf{SO}(4)$ in $\mathbf{SO}(3)$ und von $\mathbf{U}(2)$ in $\mathbf{SO}(3)$ anwenden werden. Wie üblich ist $\mathbf{SO}(k)$ die Gruppe der orthogonalen Abbildungen des $\mathbf{R}^k$ mit der Determinante 1 und $\mathbf{U}(k)$ die unitäre Gruppe im $\mathbf{C}^k$. Die in dieser Arbeit auftretenden G-Prinzipalfaserbündel haben folgende charakteristische Klassen:

i) $G = \mathbf{SO}(4)$. Man hat die Stiefel-Whitneyschen Klassen $w_2(\xi) \in H^2(B_\xi, \mathbf{Z}_2)$ und $W_3(\xi) \in H^3(B_\xi, \mathbf{Z})$, ferner die Eulersche Klasse $W_4(\xi) \in H^4(B_\xi, \mathbf{Z})$ und die Pontrjaginsche Klasse $p_1(\xi) \in H^4(B_\xi, \mathbf{Z})$.

ii) $G = \mathbf{SO}(3)$. Man hat die Stiefel-Whitneyschen Klassen $w_2(\xi) \in H^2(B_\xi, \mathbf{Z}_2)$ und $W_3(\xi) \in H^3(B_\xi, \mathbf{Z})$, ferner die Pontrjaginsche Klasse $p_1(\xi) \in H^4(B_\xi, \mathbf{Z})$.

iii) $G = \mathbf{U}(n)$. Man hat die Chernschen Klassen $c_i(\xi) \in H^{2i}(B_\xi, \mathbf{Z})$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

In i) und ii) ist $W_3 = \delta_* w_2$, wo δ_* der zur Koeffizientensequenz $0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2 \to 0$ gehörige Homomorphismus $H^2(B_\xi, \mathbf{Z}_2) \to H^3(B_\xi, \mathbf{Z})$ ist. Also ist $2\,W_3 = 0$. Die Stiefel-Whitneyschen, die Eulerschen und die Chernschen Klassen können bekanntlich als erste Hindernisse gewisser assoziierter Faserbündel definiert werden [12]. Die Pontrjaginsche Klasse $p_1(\xi)$ ist gleich

$-c_2(\lambda_* \xi)$, wo λ hier die „komplexe Erweiterung“ $\mathbf{SO}(4) \to \mathbf{U}(4)$ bzw. $\mathbf{SO}(3) \to \mathbf{U}(3)$ ist.

1.2. *Die Homomorphismen* $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ *von* $\mathbf{SO}(4)$ *auf* $\mathbf{SO}(3)$. Der Vektorraum $\mathbf{R}^4$ wird mit dem Körper $\mathbf{K}$ der Quaternionen identifiziert:

$$(1) \qquad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + i\, x_2 + j\, x_3 + k\, x_4 = x_1 + i\, x_2 + (x_3 + i\, x_4) \cdot j$$

Der komplexe Körper $\mathbf{C}$ ist in $\mathbf{K}$ enthalten $(x_3 = x_4 = 0)$. Mit $\mathbf{S}_3$ bezeichnen wir die multiplikative Gruppe der Quaternionen vom Betrage 1 und mit $\mathbf{S}_1$ die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1. Es ist also $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_3 \cap \mathbf{C}$. Das Element (q_1, q_2) der Gruppe $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$ operiert auf $\mathbf{R}^4$ $(= \mathbf{K})$ durch

$$(2) \qquad (q_1, q_2)(x) = q_1 \cdot x \cdot q_2^{-1}, \qquad (x \in \mathbf{K}, \text{ Multiplikation im Sinne von } \mathbf{K}).$$

Man erhält einen Homomorphismus α von $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$ auf $\mathbf{SO}(4)$, dessen Kern von $(-1, -1)$ erzeugt wird, und damit eine exakte Sequenz

$$(2) \qquad 0 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3 \xrightarrow{\alpha} \mathbf{SO}(4) \to 0.$$

Der Vektorraum $\mathbf{R}^3$ wird mit dem Raum der Quaternionen mit verschwindendem Realteil $(x_1 = 0)$ identifiziert. $q \in \mathbf{S}_3$ operiert auf $\mathbf{R}^3$ durch

$$(3) \qquad q(y) = q \cdot y \cdot q^{-1}, \qquad (y \in \mathbf{R}^3).$$

Man erhält einen Homomorphismus β von $\mathbf{S}_3$ auf $\mathbf{SO}(3)$, dessen Kern von -1 erzeugt wird, und damit eine exakte Sequenz

$$(3^*) \qquad 0 \to \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{S}_3 \xrightarrow{\beta} \mathbf{SO}(3) \to 0.$$

Es sei Δ die Diagonale von $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$. Dann ist $\alpha(\Delta) = 1 \times \mathbf{SO}(3) \subset \mathbf{SO}(4)$. Mit $\pi_r (r = 1, 2)$ bezeichnen wir die Projektion von $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$ auf seinen r-ten Faktor. Dann gibt es einen und nur einen Homomorphismus $\lambda^{(r)}$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist

$$(4) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{SO}(4) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_r} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda^{(r)}} \\ \mathbf{S}_3 & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{SO}(3) \end{array}$$

In den vier Gruppen dieses Diagramms zeichnen wir maximale Tori aus: In $\mathbf{S}_3$ die Untergruppe $\mathbf{S}_1$ der Elemente $\exp(2\pi i\, \varphi)$, $(\varphi \in \mathbf{R})$; in $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$ die Untergruppe $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ der Elemente $(\exp(2\pi i\, \varphi_1), \exp(2\pi i\, \varphi_2))$, $(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R})$; in $\mathbf{SO}(4)$ die Untergruppe $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$ der Matrizen

$$\begin{pmatrix} D(t_1) & 0 \\ 0 & D(t_2) \end{pmatrix}, \quad (t_1, t_2 \in \mathbf{R}),$$

wo

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix};$$

schließlich in $\mathbf{SO}(3)$ die Untergruppe $1 \times \mathbf{SO}(2)$ der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D(u) \end{pmatrix}, \quad (u \in \mathbf{R}).$$

Man kontrolliert sofort, daß durch α, β, π_r im Diagramm (4) der ausgezeichnete maximale Torus auf den ausgezeichneten maximalen Torus der Bildgruppe abgebildet wird und daß man die Abbildungen auf dem jeweiligen maximalen Torus durch folgendes Diagramm beschreiben kann

$$(4^*)\qquad \begin{array}{l}(\varphi_1, \varphi_2) \to (t_1, t_2) = (\varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 + \varphi_2)\\ \quad\downarrow\\ \varphi = \varphi_r \to u = 2\,\varphi.\end{array}$$

Damit wird die Abbildung $\lambda^{(1)}$ auf dem maximalen Torus von $\mathbf{SO}(4)$ *durch* $u = t_1 + t_2$ *gegeben und* $\lambda^{(2)}$ *durch* $u = t_2 - t_1$.

1.3. *Der Homomorphismus μ von* $\mathbf{U}(2)$ *auf* $\mathbf{SO}(3)$. Jedes Quaternion x kann auf genau eine Weise in der Form

$$x = z_1 + z_2 \cdot j\,, \qquad (z_1, z_2 \in \mathbf{C})\,,$$

geschrieben werden (1). Dadurch wird $\mathbf{K}$ mit dem $\mathbf{C}^2$ identifiziert. Die komplexe Struktur in dem Vektorraum $\mathbf{K}(= \mathbf{R}^4)$ wird durch die lineare Abbildung $I(x) = i\,x$ mit $I \circ I = -Id$ gegeben. Die unitäre Gruppe $\mathbf{U}(2)$ ist im folgenden immer als die Untergruppe der Elemente von $\mathbf{SO}(4)$, die mit I vertauschbar sind, aufzufassen. Es folgt

$$(5)\qquad \mathbf{U}(2) = \alpha(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3)\,.$$

Wir definieren den Homomorphismus μ von $\mathbf{U}(2)$ auf $\mathbf{SO}(3)$ als die Beschränkung von $\lambda^{(2)}$ auf $\mathbf{U}(2)$. Der Kern von μ ist gleich $\alpha(\mathbf{S}_1 \times 1)$, ist also isomorph zu $\mathbf{S}_1$. Man hat eine exakte Sequenz

$$(6)\qquad 0 \to \mathbf{S}_1 \to \mathbf{U}(2) \xrightarrow{\mu} \mathbf{SO}(3) \to 0\,.$$

Faßt man $\mathbf{U}(2)$ als Gruppe von 2×2-reihigen komplexen Matrizen auf, dann ist $\alpha(\mathbf{S}_1 \times 1)$ die Untergruppe der skalaren Matrizen. μ induziert einen Isomorphismus von $\mathbf{PU}(2)$, der projektiv-unitären Gruppe, auf $\mathbf{SO}(3)$.

Der in 1.2 betrachtete maximale Torus $\alpha(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1) = \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$ von $\mathbf{SO}(4)$ ist in $\mathbf{U}(2)$ enthalten. *Damit wird μ beschränkt auf diesen Torus wie $\lambda^{(2)}$ durch $u = t_2 - t_1$ gegeben.*

1.4. Mit $\mathbf{S}_2$ bezeichnen wir die Sphäre der Einheitsvektoren im $\mathbf{R}^3$, der wie in 1.2 mit dem Raum der Quaternionen mit verschwindendem Realteil identifiziert wird. Die Gruppe $\mathbf{S}_3$ operiert nach (3) auf $\mathbf{S}_2$. Die Isotropiegruppe des Punktes $(1, 0, 0) \in \mathbf{S}_2$, d. h. des Punktes $i \in \mathbf{K}$, ist $\mathbf{S}_1$. Damit ist $\mathbf{S}_3/\mathbf{S}_1 \cong \mathbf{S}_2$, und wir haben die Projektion

$$(7)\qquad \hbar : \mathbf{S}_3 \to \mathbf{S}_2\,,\ \hbar(q) = q\,i\,q^{-1}.$$

Die Gruppe $\mathbf{U}(2)$ operiert als Untergruppe von $\mathbf{SO}(4)$ auf $\mathbf{R}^4(= \mathbf{K})$ und damit auf $\mathbf{S}_3 \subset \mathbf{K}$. Die Isotropiegruppe von $(1, 0, 0, 0) \in \mathbf{S}_3$, d. h. von $1 \in \mathbf{K}$, ist $1 \times 1 \times \mathbf{SO}(2)$. Damit ist $\mathbf{U}(2)/1 \times 1 \times \mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{S}_3$, und wir haben die Projektion

$$(8)\qquad p_1 : \mathbf{U}(2) \to \mathbf{S}_3\,.$$

$\mathbf{U}(2)$ operiert vermöge (6) auf $\mathbf{S}_2$. Die Isotropiegruppe von $(1, 0, 0) \in \mathbf{S}_2$, d. h. von $i \in \mathbf{K}$, ist $\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$. Damit ist $\mathbf{U}(2)/\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{S}_2$, und wir haben die Projektion

$$(8^*) \qquad p_2 : \mathbf{U}(2) \to \mathbf{S}_2 .$$

Vermöge (8) und (8*) hat man eine natürliche Projektion

$$(9) \qquad h : \mathbf{S}_3 \to \mathbf{S}_2$$

mit $h \circ p_1 = p_2$. Das ist die sogenannte Hopfsche Abbildung. Es ist $h(q) = q^{-1} \cdot i \cdot q$, wie man leicht kontrolliert. Also ist

$$(10) \qquad h(q) = \hat{h}(q^{-1}) .$$

$\mathbf{SO}(4)/\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$, der Raum der orientierten 2-dimensionalen Teilräume durch den Nullpunkt des $\mathbf{R}^4$, werde mit Σ bezeichnet. Σ ist bekanntlich homöomorph zu $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$. Wir geben einen Homöomorphismus explizit an ((4), (7)):

$$(11) \qquad \begin{aligned} \Sigma = \alpha(\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3)/\alpha(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1) &\cong (\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3)/(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1) \\ &\cong (\mathbf{S}_3/\mathbf{S}_1) \times (\mathbf{S}_3/\mathbf{S}_1) \cong \mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2 . \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei Projektionen q_1, q_2 von Σ auf $\mathbf{S}_2$ definiert. Es sei p die natürliche Projektion von $\mathbf{SO}(4)$ auf Σ. Die Abbildung $q_r \circ p \, (r = 1, 2)$ ist gleich $\lambda^{(r)}$ gefolgt von $\mathbf{SO}(3) \to \mathbf{S}_2$, (vgl. (3*), (7)). Vermöge $\lambda^{(r)}$ operiert $\mathbf{SO}(4)$ transitiv auf $\mathbf{S}_2$. Die Gruppe aller $g \in \mathbf{SO}(4)$, für die $\lambda^{(r)}(g)$ den Punkt $(1, 0, 0) \in \mathbf{S}_2$ festhält, ist $\alpha(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3) = \mathbf{U}(2)$ bzw. $\alpha(\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1)$. Wir haben

$$(12) \qquad \mathbf{SO}(4)/\mathbf{U}(2) = \alpha(\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3)/\alpha(\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_3) \cong \mathbf{S}_3/\mathbf{S}_1 \cong \mathbf{S}_2 .$$

Die Projektion q_1 kann wegen (12) auch definiert werden als die kanonische Abbildung von Σ auf $\mathbf{SO}(4)/\mathbf{U}(2)$, $(\mathbf{U}(2) \supset \mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2))$. Entsprechend für q_2.

Die Sphäre $\mathbf{S}_3$ ist kanonisch orientiert (als Rand der orientierten Vollkugel des durch $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ orientierten $\mathbf{R}^4$). *$\pi_3(\mathbf{S}_3)$ ist kanonisch isomorph mit $\mathbf{Z}$.* Die Abbildung h induziert einen Isomorphismus $\pi_3(\mathbf{S}_3) \to \pi_3(\mathbf{S}_2)$. *Damit ist $\pi_3(\mathbf{S}_2)$ kanonisch isomorph mit $\mathbf{Z}$.* Für die Definition des letzten kanonischen Isomorphismus haben wir h genommen, nicht $\hat{h}$ [siehe (7)]. Der Homöomorphismus (q_1, q_2) von Σ auf $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$ induziert jetzt einen *kanonischen Isomorphismus*

$$(13) \qquad \varrho : \pi_3(\Sigma) \to \mathbf{Z} + \mathbf{Z} .$$

Dabei ist zu beachten, daß die Abbildung (11) von $\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$ auf Σ einen Isomorphismus ϱ' von $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ auf $\pi_3(\Sigma)$ induziert. $\varrho \circ \varrho'$ ist aber nicht die Identität, sondern die Abbildung $(a, b) \to (-a, -b)$, beachte (10).

1.5. **Satz.** *Es sei $\lambda^{(r)} : \mathbf{SO}(4) \to \mathbf{SO}(3)$ der in 1.2 definierte Homomorphismus. Die charakteristischen Klassen der $\lambda^{(r)}$-Erweiterung eines $\mathbf{SO}(4)$-Prinzipalfaserbündels ξ sind*

i) $$p_1(\lambda_*^{(r)} \xi) = p_1(\xi) - 2\,(-1)^r W_4(\xi) ,$$

ii) $$w_2(\lambda_*^{(r)} \xi) = w_2(\xi) ,$$

iii) $$W_3(\lambda_*^{(r)} \xi) = W_3(\xi) .$$

Beweis: Wir setzen $\lambda^{(r)}$ gleich λ und $(-1)^r$ gleich ε. Für den maximalen Torus $\mathbf{SO}(2)\times\mathbf{SO}(2)$ von $\mathbf{SO}(4)$ schreiben wir kurz T. Am Schluß von 1.2 wurde das Verhalten von λ auf T angegeben. Nach [2], Theorem 10.3, ist dann in reeller Cohomologie die folgende formale Rechnung legitimiert.

$$\begin{aligned} p_1(\lambda_*\xi) &= u^2 = (t_2-\varepsilon t_1)^2 = (t_1^2+t_2^2) - 2\varepsilon t_1 t_2 \\ &= p_1(\xi) - 2\varepsilon W_4(\xi)\,. \end{aligned}$$

Das ergibt i) in reeller Cohomologie.

$\Sigma = \mathbf{SO}(4)/T$ ist homöomorph zu $\mathbf{S}_2\times\mathbf{S}_2$, also $H^1(\mathbf{SO}(4)/T, \mathbf{Z}_2) = 0$. Einfache Anwendung der Spektralsequenz ergibt, daß in dem Faserbündel $(E_\xi/T, B_\xi, \mathbf{SO}(4)/T, \pi)$ der Homomorphismus π^* von $H^2(B_\xi, \mathbf{Z}_2)$ in $H^2(E_\xi/T, \mathbf{Z}_2)$ injektiv ist. Deshalb ist in $\mathbf{Z}_2$-Cohomologie die folgende Rechnung legitimiert (vgl. [2])

$$w_2(\lambda_*\xi) = u = t_2 - \varepsilon t_1 = t_1 + t_2 = w_2(\xi)\,.$$

Damit ist ii) bewiesen. iii) folgt, da für ξ und $\lambda_*\xi$ gilt (1.1): $W_3 = \delta_* w_2$. — Für ξ und $\lambda_*\xi$ ist bekanntlich [2] die $\mathbf{Z}_2$-Reduktion von p_1 gleich w_2^2. Aus ii) folgt deshalb i) auch in $\mathbf{Z}_2$-Cohomologie. Nach [2], Corollary 30.6, ist ein Element von $H^*(B_{\mathbf{SO}(k)}, \mathbf{Z})$ durch seine kanonischen Bilder in $H^*(B_{\mathbf{SO}(k)}, \mathbf{R})$ und $H^*(B_{\mathbf{SO}(k)}, \mathbf{Z}_2)$ bestimmt[2]). Wendet man dies auf die beiden Seiten von i) für den Fall an, daß ξ das universelle Bündel ist, dann erhält man i) in ganzzahliger Cohomologie.

1.6. **Satz.** *Es sei μ der in 1.3 definierte Homomorphismus von $\mathbf{U}(2)$ auf $\mathbf{SO}(3)$. Dann hat man für die charakteristischen Klassen der μ-Erweiterung eines $\mathbf{U}(2)$-Prinzipalfaserbündels ξ*

i) $\quad p_1(\mu_*\xi) = c_1(\xi)^2 - 4\,c_2(\xi)\,,$

ii) $\quad w_2(\mu_*\xi)$ ist die $\mathbf{Z}_2$-Reduktion von $c_1(\xi)\,,$

iii) $\quad W_3(\mu_*\xi) = 0\,.$

Beweis: Nach [2], Theorem 10.3, ist die folgende formale Rechnung in ganzzahliger Cohomologie legitimiert, bei der man das Verhalten von μ auf dem maximalen Torus von $\mathbf{U}(2)$ zu berücksichtigen hat (vgl. den Schluß von 1.3).

$$p_1(\mu_*\xi) = u^2 = (t_2 - t_1)^2 = (t_1+t_2)^2 - 4\,t_1 t_2\,.$$

Das ergibt i). In $\mathbf{Z}_2$-Cohomologie hat man $w_2(\mu_*\xi) = u = t_2 - t_1 = t_1 + t_2 = c_1(\xi)$. Das ergibt ii). Da $\delta_* w_2 = W_3$ und δ_* auf $\mathbf{Z}_2$-Reduktionen ganzzahliger Klassen verschwindet, folgt iii).

§ 2. Das zweite Hindernis in $\mathbf{S}_2$-Faserbündeln

2.1. Für ein $\mathbf{U}(2)$-Prinzipalfaserbündel ξ bezeichne ξ' das assoziierte Faserbündel mit $\mathbf{S}_3$ als Faser. Ferner sei ξ'' das zur μ-Erweiterung von ξ assoziierte Faserbündel mit $\mathbf{S}_2$ als Faser (vgl. 1.3 und 1.4). Wie leicht zu sehen (1.1), ist

(1) $\quad E_{\xi'} = E_\xi/1\times 1\times\mathbf{SO}(2)$ und $E_{\xi''} = E_\xi/\mathbf{SO}(2)\times\mathbf{SO}(2)\,.$

---

[2]) $H^*(B_{\mathbf{SO}(k)}, \mathbf{Z}_2)$ hat nur Torsionselemente der Ordnung 2.

Man hat die natürliche Projektion h von $E_{\xi'}$ auf $E_{\xi''}$ [siehe 1.4 (9)]. In der Tat ist $E_{\xi'}$ ein Prinzipalfaserbündel über $E_{\xi''}$ mit Faser und Gruppe $(\mathbf{SO}(2) \times \times \mathbf{SO}(2))/1 \times 1 \times \mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{SO}(2)$. Wegen der Darstellung (1) von $E_{\xi''}$ hat man über $E_{\xi''}$ in kanonischer Weise ein geordnetes Paar von $\mathbf{SO}(2)$-Bündeln, deren erstes mit $\gamma(\xi)$ bezeichnet werde. Wir fassen $\gamma(\xi)$ als $\mathbf{U}(1)$-Bündel auf $(\mathbf{SO}(2) = \mathbf{U}(1))$. $\gamma(\xi)$ ist in natürlicher Weise mit dem Faserbündel $(h: E_{\xi'} \to E_{\xi''})$ zu identifizieren. Die gemeinsame Basis von ξ, ξ', ξ'' werde mit B bezeichnet.

Wir nehmen jetzt an, daß B ein endlicher Zellenkomplex ist. B^r sei das r-dimensionale Gerüst von B. Es gibt Schnitte von ξ' über B^3, jeder derartige Schnitt definiert eine Hindernis-Cohomologieklasse, die als Element von $H^4(B, \mathbf{Z})$ aufzufassen ist[3]), da die dritte Homotopiegruppe von $\mathbf{S}_3$ zu $\mathbf{Z}$ kanonisch isomorph ist (1.4). Die Hindernisse aller Schnitte von ξ' über B^3 sind gleich $c_2(\xi)$, dem ersten Hindernis von ξ' (vgl. 1.1).

Jeder Schnitt s von ξ' induziert den Schnitt $h \circ s$ von ξ''. Also besitzt auch ξ'' Schnitte über B^3, in Übereinstimmung mit 1.6 iii): Die Stiefel-Whitneysche Klasse W_3 eines $\mathbf{SO}(3)$-Bündels über B ist nämlich gleich dem ersten Hindernis des assoziierten $\mathbf{S}_2$-Faserbündels. Jeder Schnitt f von ξ'' über B^3 definiert ein (zweites) Hindernis $\Gamma(f)$, das als Element von $H^4(B, \mathbf{Z})$ aufgefaßt werden kann[3]), da die dritte Homotopiegruppe von $\mathbf{S}_2$ zu $\mathbf{Z}$ kanonisch isomorph ist (1.4). Die Klasse $\Gamma(f)$ hängt im allgemeinen von f ab. Wenn s ein Schnitt von ξ' über B^3 ist, dann ist

$$\Gamma(h \circ s) = c_2(\xi) . \tag{2}$$

Der folgende Satz stammt von Kundert [11].

2.2. **Satz.** *Ein Element Γ von $H^4(B, \mathbf{Z})$ tritt dann und nur dann als Hindernis eines Schnittes von ξ'' über B^3 auf, wenn es ein $d \in H^2(B, \mathbf{Z})$ gibt, so daß*

$$\Gamma = d^2 + d \cdot c_1(\xi) + c_2(\xi) . \tag{3}$$

Beweis: Sei $d \in H^2(B, \mathbf{Z})$ und δ ein $\mathbf{U}(1)$-Prinzipalfaserbündel mit der ersten Chernschen Klasse d (vgl. [6], Satz 4. 3. 1). Dann ist $\xi \otimes \delta$ wieder ein $\mathbf{U}(2)$-Bündel und

$$c_2(\xi \otimes \delta) = d^2 + d \cdot c_1(\xi) + c_2(\xi) , \quad \text{vgl. [6], S. 67, Bemerk.}$$

Aus $\xi'' = (\xi \otimes \delta)''$ [siehe 1.3 (6)] folgt wegen (2), daß $c_2(\xi \otimes \delta)$ als Hindernis auftritt. Der Satz ist noch in umgekehrter Richtung zu beweisen: Wir verwenden die Bezeichnungen von 2.1, und δ sei wieder ein $\mathbf{U}(1)$-Prinzipalfaserbündel über B. Ferner sei ϱ die Projektion von $E_{\xi''} = E_{(\xi \otimes \delta)''}$ auf B. Über $E_{\xi''}$ hat man die $\mathbf{U}(1)$-Bündel $\gamma(\xi)$, $\gamma(\xi \otimes \delta)$, $\varrho^* \delta$, die in folgender Beziehung stehen

$$\gamma(\xi \otimes \delta) = \gamma(\xi) \otimes \varrho^* \delta . \tag{4}$$

Nun sei f ein Schnitt von ξ'' über B^3 und s ein Schnitt von ξ' über B^3. Dann ist $c_1(f^* \gamma(\xi))$ gleich der Differenz-Cohomologieklasse von $h \circ s$ und f, [vgl. [4], S. 114, Formel (14)]. Dieses Resultat wird auf $\xi \otimes \delta$ angewandt: Wenn g

[3]) Man beachte, daß die Strukturgruppe zusammenhängend ist.

ein Schnitt von $(\xi \otimes \delta)'$ und $\bar{g}$ der induzierte Schnitt von $(\xi \otimes \delta)''$ ist, dann ist $c_1(f^*\gamma(\xi)) + c_1(\delta)$ wegen (4) die Differenz-Cohomologieklasse von $\bar{g}$ und f. Wählt man nun für δ das $\mathbf{U}(1)$-Bündel über B mit $c_1(\delta) = -c_1(f^*\gamma(\xi))$, dann verschwindet die Differenz-Cohomologieklasse von $\bar{g}$ und f. Dann ist $\Gamma(f) = \Gamma(\bar{g})$, und $\Gamma(f)$ ist also von der Gestalt (3), nämlich

$$\Gamma(f) = d^2 + d\,c_1(\xi) + c_2(\xi)\,, \tag{3*}$$

wo $d = c_1(\delta)$ gleich der Differenz-Cohomologieklasse von f und $h \circ s$ ist.

2.3. Wir haben in 1.3 die exakte Sequenz (6) betrachtet. Zu μ gehört eine Faserabbildung $\varrho(\mu): B_{\mathbf{U}(2)} \to B_{\mathbf{SO}(3)}$ der universellen Räume mit dem Eilenberg-MacLaneschen Raum $K(\mathbf{Z}, 2) = B_{\mathbf{S}_1}$, dem unendlich-dimensionalen komplexen projektiven Raum, als Faser. (Vgl. [1], § 22 oder [3], § 1). Die zugehörige Spektralsequenz zeigt, daß das (einzige) Hindernis gegen einen Schnitt in diesem Faserraum die universelle Stiefel-Whitneysche Klasse W_3 ist. Daraus folgt auf übliche Weise, daß *ein* $\mathbf{SO}(3)$*-Prinzipalfaserbündel* η *dann und nur dann die* μ*-Erweiterung eines* $\mathbf{U}(2)$*-Prinzipalfaserbündels ist, wenn* $W_3(\eta) = 0$ (vgl. 1.6 *für „nur dann“*).

2.4. Wir betrachten ein $\mathbf{SO}(3)$-Prinzipalfaserbündel η und das assoziierte Bündel η'' mit $\mathbf{S}_2$ als Faser. Die Basis B von η und η'' sei ein endlicher Zellenkomplex. Das erste Hindernis gegen einen Schnitt von η'' ist $W_3(\eta) \in H^3(B,\mathbf{Z})$. Wir nehmen an, daß $W_3(\eta) = 0$. Dann gibt es Schnitte von η'' über B^3. Jedem derartigen Schnitt ist ein (zweites) Hindernis $\in H^4(B, \mathbf{Z})$ zugeordnet. [$\pi_3(\mathbf{S}_2)$ ist kanonisch isomorph zu $\mathbf{Z}$ (1.4).] Es stellt sich die Frage, welche Elemente von $H^4(B, \mathbf{Z})$ als Hindernisse von Schnitten von η'' über B^3 auftreten.

2.5. **Satz.** *Es sei* η *ein* $\mathbf{SO}(3)$*-Prinzipalfaserbündel über einem endlichen Zellenkomplex* B. *Es sei* $W_3(\eta) = 0$. *Das assoziierte Faserbündel* η'' *mit* $\mathbf{S}_2$ *als Faser hat dann über* B^3 *einen Schnitt. Es treten genau die Elemente* $\widetilde{\Gamma} \in H^4(B, \mathbf{Z})$ *als Hindernis multipliziert mit* 4 *eines solchen Schnittes auf, welche folgendermaßen dargestellt werden können*

$$\widetilde{\Gamma} = x^2 - p_1(\eta)\,, \quad x \in H^2(B, \mathbf{Z})\,, \quad x \equiv w_2(\eta) \bmod 2\,. \tag{5}$$

Insbesondere ist also jedes Element $\widetilde{\Gamma}$ *der Form* (5) *in* $H^4(B, \mathbf{Z})$ *durch* 4 *teilbar.*

Korollar. *Wenn* $H^4(B, \mathbf{Z})$ *keine* 2*-Torsion hat, so hat* η'' *genau dann einen Schnitt über* B^4, *wenn es ein* $x \in H^2(B, \mathbf{Z})$ *gibt, für das* $x^2 = p_1(\eta)$ *und dessen* $\mathbf{Z}_2$*-Reduktion gleich* $w_2(\eta)$ *ist.*

Beweis des Satzes: Wir wählen nach 2.3 ein $\mathbf{U}(2)$-Prinzipalfaserbündel ξ mit $\mu_* \xi = \eta$. Dann ist $\xi'' = \eta''$, und die gesuchten möglichen Hindernisse sind durch 2.2 (3) gegeben. Nun ist

$$4(d^2 + d\,c_1(\xi) + c_2(\xi)) = (2\,d + c_1(\xi))^2 - (c_1(\xi)^2 - 4\,c_2(\xi))\,.$$

Der Satz folgt jetzt aus 1.6.

Bemerkung: 2.5 bestätigt die Vermutung von H. Hopf, daß die Koeffizienten, die in seinem quadratischen Polynom für die möglichen zweiten Hindernisse auftraten, mit charakteristischen Klassen zusammenhängen

(vgl. [9], S. 121 unten). Das besagte quadratische Polynom findet sich in der vorliegenden Arbeit in 2.2 (3) und (3*) wieder. Die Koeffizienten $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$ hängen von der Wahl des $\mathbf{U}(2)$-Bündels ξ mit $\mu_* \xi = \eta$ ab. $c_1(\xi)$ mod. 2 und $c_1(\xi)^2 - 4\,c_2(\xi)$ sind aber wegen 1.6 unabhängig von der Wahl von ξ. Man kann direkt beweisen, daß $c_1(\xi)$ in 2.2 (3) gleich der von HOPF betrachteten Klasse $\omega(h \circ s,\, h \circ s)$ ist. Bezeichnet man noch die Differenz-Cohomologieklasse von f und $h \circ s$ mit $\alpha(f, h \circ s)$, dann geht 2.2 (3*) über in

$$\Gamma(f) = \alpha(f, h\circ s)^2 + \alpha(f, h\circ s) \cdot \omega(h\circ s, h\circ s) + \Gamma(h\circ s)\,.$$

Das ist genau die Formel (7.4) von [9], die von HOPF allerdings unter allgemeineren Voraussetzungen über die Strukturgruppe bewiesen wurde (vgl. auch [10]). Inzwischen ist eine Arbeit von WU WEN-TSUN über die erwähnte Vermutung erschienen, die uns unzugänglich ist. Ferner haben wir kürzlich (American Mathematical Society, Notices, February 1958, S. 27) eine Note von W. S. MASSEY gesehen, in der das obige Korollar ausgesprochen wird.

§ 3. Das zweite Hindernis in gewissen $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_2$-Faserbündeln

3.1. Es sei ξ ein $\mathbf{SO}(4)$-Prinzipalfaserbündel. Die Basis B von ξ sei ein endlicher Zellenkomplex. Das assoziierte Faserbündel $\bar{\xi}$ mit der Stiefelschen Mannigfaltigkeit $\mathbf{SO}(4)/1 \times 1 \times \mathbf{SO}(2)$ der 2-Beine als Faser hat einen Schnitt über dem 2-dimensionalen Gerüst B^2, und das Hindernis gegen Fortsetzung eines solchen Schnittes auf B^3 ist gleich $W_3(\xi) \in H^3(B, \mathbf{Z})$. Ferner betrachten wir das zu ξ assoziierte Faserbündel $\bar{\bar{\xi}}$ mit $\Sigma = \mathbf{SO}(4)/\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)$ als Faser und schließlich die beiden Faserbündel ξ_1, ξ_2 mit $\mathbf{S}_2$ als Faser, die zur $\lambda^{(1)}$- bzw. $\lambda^{(2)}$-Erweiterung von ξ assoziiert sind. Wir haben (1.1, 1.4)

$$(1)\qquad \begin{aligned} &E_{\bar{\xi}} = E_\xi/1 \times 1 \times \mathbf{SO}(2)\,, && E_{\bar{\bar{\xi}}} = E_\xi/\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(2)\\ &E_{\xi_1} = E_\xi/\mathbf{U}(2)\,, && E_{\xi_2} = E_\xi/\alpha(\mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_1) \end{aligned}$$

und natürliche Projektionen (1.4)

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\varphi : E_{\bar{\xi}} \to E_{\bar{\bar{\xi}}}\\ &q_1 : E_{\bar{\bar{\xi}}} \to E_{\xi_1}\,, \quad q_2 : E_{\bar{\bar{\xi}}} \to E_{\xi_2}\,. \end{aligned}$$

Jeder Schnitt s von $\bar{\bar{\xi}}$ (über einer Teilmenge von B) induziert Schnitte $q_1 \circ s$, $q_2 \circ s$ von ξ_1 bzw. ξ_2. Umgekehrt gibt es zu jedem Paar f_1, f_2, wo f_r ein Schnitt von ξ_r ist, genau einen Schnitt s von $\bar{\bar{\xi}}$ mit $(f_1, f_2) = (q_1 \circ s, q_2 \circ s)$. Ferner stellen wir fest, daß jeder Schnitt s von $\bar{\xi}$ den Schnitt $\varphi \circ s$ von $\bar{\bar{\xi}}$ induziert. Das Hindernis gegen einen Schnitt über B^3 ist für jedes der Bündel $\bar{\xi}$, ξ_1, ξ_2 gleich $W_3(\xi)$ [siehe 1.5 iii)]. *Wir setzen jetzt voraus, daß* $W_3(\xi) = 0$. Dann hat jedes der Bündel $\bar{\xi}$, $\bar{\bar{\xi}}$, ξ_1, ξ_2 einen Schnitt über B^3, und es tritt die Frage auf, welche 4-dimensionalen Cohomologieklassen als Hindernisse von Schnitten über B^3 (gegen die Fortsetzung auf B^4) auftreten. Diese Frage ist durch 2.5 für die $\mathbf{S}_2$-Faserbündel ξ_1, ξ_2 gelöst, und damit läßt sie sich für $\bar{\bar{\xi}}$ beantworten:

3.2. Das Hindernis eines Schnittes s von $\bar{\bar{\xi}}$ über B^3 ist eine 4-dimensionale Cohomologieklasse mit Koeffizienten in der Homotopiegruppe $\pi_3(\Sigma)$, welche

kanonisch isomorph zu $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}$ ist [1.4 (13)]. Also läßt sich die Hindernis-Cohomologieklasse des Schnittes s in bestimmter Weise als Element von $H^4(B, \mathbf{Z}+\mathbf{Z}) = h^4(B,\mathbf{Z}) + H^4(B,\mathbf{Z})$ auffassen und damit als Paar von Elementen aus $H^4(B,\mathbf{Z})$, dessen r-te Komponente ($r = 1, 2$) offenbar gleich dem Hindernis von $q_r \circ s$ in ξ_r ist. Hier hat q_r die in (2) angegebene Bedeutung. Es folgt, daß ein Paar $(a, b) \in H^4(B,\mathbf{Z}) + H^4(B,\mathbf{Z})$ dann und nur dann als Hindernis eines Schnittes von $\bar{\bar{\xi}}$ über B^3 auftritt, wenn a bzw. b Hindernis eines Schnittes von ξ_1 bzw. ξ_2 über B^3 ist. Anwendung von 2.5 auf ξ_1, ξ_2 ergibt unter Benutzung von 1.5 den folgenden Satz.

3.3. **Satz.** *Es sei ξ ein $\mathbf{SO}(4)$-Prinzipalfaserbündel über einem endlichen Zellenkomplex B. Es sei $W_3(\xi) = 0$. Das assoziierte Faserbündel $\bar{\bar{\xi}}$ mit Σ, dem Raum der orientierten 2-dimensionalen Teilräume durch den Nullpunkt des $\mathbf{R}^4$, als Faser hat dann über B^3 einen Schnitt, und es treten genau die Elemente $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in H^4(B,\mathbf{Z}) + H^4(B,\mathbf{Z})$ als Hindernis* (vgl. 3.2) *multipliziert mit 4 eines solchen Schnittes auf, welche folgendermaßen dargestellt werden können*

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) = (x^2 - p_1(\xi) - 2\cdot W_4(\xi)\,,\ y^2 - p_1(\xi) + 2\cdot W_4(\xi))\,, \tag{3}$$
$$\textit{wobei } x, y \in H^2(B,\mathbf{Z}),\quad x \equiv y \equiv w_2(\xi) \bmod 2\,.$$

3.4. Wir betrachten nun das Faserbündel $\bar{\xi}$. Die natürliche Projektion von $\mathbf{SO}(4)/1\times 1\times\mathbf{SO}(2)$ auf Σ induziert einen Isomorphismus der dritten Homotopiegruppen, wie sofort aus der exakten Homotopiesequenz folgt. Damit ist nach 1.4 (13) ein kanonischer Isomorphismus

$$k_1 : \pi_3(\mathbf{SO}(4)/1\times 1\times\mathbf{SO}(2)) \to \mathbf{Z}+\mathbf{Z} \tag{4}$$

gegeben, und das Hindernis eines Schnittes von $\bar{\xi}$ über B^3 kann wieder als Paar von Elementen aus $H^4(B,\mathbf{Z})$ aufgefaßt werden. Offenbar hat der Schnitt s von $\bar{\xi}$ über B^3 dann das gleiche Hindernis wie der Schnitt $\varphi\circ s$ [vgl. 3.1 (2)] von $\bar{\bar{\xi}}$ über B^3.

3.5. **Satz.** *Es sei ξ ein $\mathbf{SO}(4)$-Prinzipalfaserbündel über einem endlichen Zellenkomplex B. Es sei $W_3(\xi) = 0$. Das assoziierte Faserbündel $\bar{\xi}$ mit der Stiefelschen Mannigfaltigkeit $\mathbf{SO}(4)/1\times 1\times\mathbf{SO}(2)$ als Faser hat dann über B^3 einen Schnitt, und es treten genau die Elemente $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in H^4(B,\mathbf{Z}) + H^4(B,\mathbf{Z})$ als Hindernis multipliziert mit 4 eines solchen Schnittes auf, welche folgendermaßen dargestellt werden können*

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) = (x^2 - p_1(\xi) - 2\,W_4(\xi)\,,\ x^2 - p_1(\xi) + 2\,W_4(\xi))\,, \tag{5}$$
$$\textit{wobei } x \in H^2(B,\mathbf{Z}) \textit{ und } x \equiv w_2(\xi) \bmod 2\,.$$

Beweis: Die Stiefelsche Mannigfaltigkeit $\mathbf{SO}(4)/1\times 1\times\mathbf{SO}(2)$ ist homöomorph zu $\mathbf{S}_3\times\mathbf{S}_2$. Wir haben die natürliche Projektion

$$q : \mathbf{SO}(4)/1\times 1\times\mathbf{SO}(2) \to \mathbf{SO}(4)/1\times\mathbf{SO}(3) \cong \mathbf{S}_3\,.$$

Ferner haben wir eine Projektion q_1' der Stiefelschen Mannigfaltigkeit auf $\mathbf{S}_2$, die durch (vgl. 1.4)

$$\mathbf{SO}(4)/1\times 1\times\mathbf{SO}(2) \to \mathbf{SO}(4)/\mathbf{SO}(2)\times\mathbf{SO}(2) \xrightarrow{q_1} \mathbf{S}_2$$

definiert wird. Wie leicht aus 1.2 — 1.4 folgt, ist (q_1, q) ein Homöomorphismus der Stiefelschen Mannigfaltigkeit auf $\mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_3$, der einen Isomorphismus k_2 ihrer dritten Homotopiegruppe auf $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ induziert (1.4).

ξ' sei das zu ξ assoziierte Faserbündel mit $\mathbf{S}_3$ als Faser. Jeder Schnitt von ξ' über B^3 hat das Hindernis $W_4(\xi)$. Andererseits entsprechen die Schnitte von $\bar{\xi}$ über B^3 offenbar den Paaren (f_1, f_2), wo f_1 ein Schnitt von ξ_1 über B^3 und f_2 ein Schnitt von ξ' über B^3 ist. Das 4-fache Hindernis von f_1 ist von der Gestalt $x^2 - p_1(\xi) - 2\,W_4(\xi)$, $(x \equiv w_2(\xi) \bmod 2)$, während das von f_2 gleich $4\,W_4(\xi)$ ist. Wir haben den Automorphismus $k = k_2 \circ k_1^{-1}$ von $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ auf sich und behaupten $k(a, b) = (a, b - a)$. Dies folgt bei genauer Beachtung der am Schluß von 1.4 getroffenen Konventionen. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 4. Das Tangentialbündel einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit

4.1. Es sei M eine 4-dimensionale kompakte zusammenhängende orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (versehen mit einer Riemannschen Metrik) und ξ ihr tangentielles $\mathbf{SO}(4)$-Prinzipalfaserbündel. Die charakteristischen Klassen von ξ (vgl. 1.1) nennt man auch charakteristische Klassen von M. Sie werden mit $w_2(M)$, $W_3(M)$, $W_4(M)$, $p_1(M)$ bezeichnet. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß sie durch klassische Cohomologieinvarianten von M bestimmt sind. Gleichzeitig erinnern wir noch einmal an einige bereits in der Einleitung erwähnte Begriffe.

Ein Element $y \in H^4(M, \mathbf{Z})$ ist durch seinen Wert $y[M]$ auf dem Grundzyklus der orientierten M bestimmt. Wir haben zunächst

i) $\qquad W_4(M)\,[M]$ *ist die Eulersche Charakteristik* $e(M)$.

Es sei T^2 die Torsionsgruppe von $H^2(M, \mathbf{Z})$ und $H = H^2(M, \mathbf{Z})/T^2$. Die Gruppe H ist ein b_2-dimensionales Gitter, wobei b_i die i-te Bettische Zahl von M ist. Da $(xy)\,[M]$ für $x, y \in H^2(M, \mathbf{Z})$ offenbar nur von den durch x, y gegebenen Elementen von H abhängt, erhalten wir eine symmetrische Bilinearform S über H von der Determinante ± 1 (vgl. Einleitung). Als Form über dem reellen Vektorraum $H \otimes \mathbf{R}$ kann diese auf Diagonalform gebracht werden. Es sei p^+ (bzw. p^-) die Anzahl der positiven (bzw. negativen) Diagonalkoeffizienten. Es ist dann $p^+ + p^- = b_2$, während $p^+ - p^-$ der Index $\tau(M)$ ist. Es gilt

ii) $\qquad p_1(M)\,[M] = 3 \cdot \tau(M)$.

Diese Formel folgt aus der Cobordisme-Theorie von Thom [14]; (vgl. auch [6]).

Für einen Raum X hat Steenrod für jedes i $(i \geq 0)$ einen Homomorphismus $Sq^i : H^k(X, \mathbf{Z}_2) \to H^{k+i}(X, \mathbf{Z}_2)$ definiert (Steenrodsche reduzierte Quadrate). Wenn $x \in H^k(X, \mathbf{Z}_2)$ und $i > k$, dann $Sq^i x = 0$. Für $x \in H^i(X, \mathbf{Z}_2)$ ist $Sq^i x = x^2$. Wenn X eine zusammenhängende kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist (nicht notwendigerweise orientierbar), dann wird für $i \leq n$ der Homomorphismus $Sq^i : H^{n-i}(X, \mathbf{Z}_2) \to H^n(X, \mathbf{Z}_2) \cong \mathbf{Z}_2$ wegen des Poincaréschen Dualitätssatzes durch Multiplikation mit einer Klasse $U_i \in H^i(X, \mathbf{Z}_2)$ gegeben, d. h. es ist $Sq^i x = U_i x$ für alle $x \in H^{n-i}(X, \mathbf{Z}_2)$. Die U_i wurden

von Wu Wen-Tsun [16] eingeführt, der auch gezeigt hat, daß die U_i Polynome in den Stiefel-Whitneyschen Klassen w_i von X sind (vgl. hierzu [5, 13, 17]). In [5] wurden diese Polynome durch Reduktion mod 2 aus den Toddschen Polynomen erhalten. Wenn X orientierbar ist, dann ist $w_1 = 0$; in diesem Fall verschwinden die U_i für ungerades i, und es ist $U_2 = w_2$, $U_4 = w_4 + w_2^2$, $U_6 = w_4 w_2 + w_2^3$.

Wir betrachten nun wieder unsere 4-dimensionale M. Der Homomorphismus $x \to x^2$ von $H^2(M, \mathbf{Z}_2)$ in $H^4(M, \mathbf{Z}_2)$ ist gleich Sq^2. Wie oben erwähnt, ist $U_2 = w_2$, also gilt

iii) $\quad x^2 = w_2(M) \cdot x \quad$ *für alle* $x \in H^2(M, \mathbf{Z}_2)$.

Zu der exakten Koeffizientensequenz

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_2 \to 0$$

gehört die exakte Cohomologiesequenz

$$H^2(M, \mathbf{Z}) \xrightarrow{2} H^2(M, \mathbf{Z}) \xrightarrow{r} H^2(M, \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\delta_*} H^3(M, \mathbf{Z}) \qquad \text{(vgl. 1.1)}.$$

Der Homomorphismus r ist die $\mathbf{Z}_2$-Reduktion. Es ist

$$rH^2(M, \mathbf{Z}) \cong H^2(M, \mathbf{Z})/2\, H^2(M, \mathbf{Z}).$$

Wir betrachten die Inklusionen

$$H^2(M, \mathbf{Z}_2) \supset rH^2(M, \mathbf{Z}) \supset r\,T^2.$$

Aus dem Poincaréschen Dualitätssatz folgt leicht, daß $rH^2(M, \mathbf{Z})$ und $r\,T^2$ bezüglich des Cup-Produktes in $H^2(M, \mathbf{Z}_2)$ gegenseitige Annulatoren sind. Also: Für $z \in H^2(M, \mathbf{Z}_2)$ ist dann und nur dann $zx = 0$ für alle $x \in r\,T^2$, wenn $z \in rH^2(M, \mathbf{Z})$.

iv) $\quad w_2(M)$ *ist die* $\mathbf{Z}_2$*-Reduktion einer ganzzahligen Klasse.*

Beweis: Wenn $x \in r\,T^2$, dann ist $xx = 0$. Wegen iii) ist auch $x \cdot w_2(M) = 0$. Aus der obigen Annulierungseigenschaft folgt, daß $w_2(M) \in rH^2(M, \mathbf{Z})$.

Wegen eines oben erwähnten Isomorphismus ist $w_2(M)$ in natürlicher Weise als Element von $H^2(M, \mathbf{Z})/2\, H^2(M, \mathbf{Z})$ aufzufassen. Bei dem natürlichen Homomorphismus von $H^2(M, \mathbf{Z})/2\, H^2(M, \mathbf{Z})$ in $H/2\,H$ geht $w_2(M)$ in ein Element W von $H/2\,H$ über. Diese Restklasse W stimmt wegen iii) mit der in der Einleitung betrachteten Restklasse W überein, d. h.

v) $\quad S(w, x) \equiv S(x, x)$ mod 2 für $x \in H$ und $w \in W \subset H$.

Wie aus der Anschreibung der vorstehenden Formel ersichtlich ist, haben wir das Element W von $H/2H$ als Restklasse, d. h. als Teilmenge von H aufgefaßt. Wir führen wie in der Einleitung die Menge Ω aller ganzen Zahlen der Form $S(y, y)$, $(y \in W)$, ein. Offensichtlich ist Ω auch gleich der Menge aller Zahlen $x^2[M]$ mit $x \in H^2(M, \mathbf{Z})$ und $x \equiv w_2(M)$ mod 2. Weiter bemerken wir, daß Ω dann und nur dann aus einem einzigen Element besteht, wenn $b_2(M) = 0$. In diesem Fall ist $\Omega = \{0\}$.

Die Stiefel-Whitneysche Klasse $W_3(M) \in H^3(M, \mathbf{Z})$ ist gleich $\delta_* w_2(M)$ (vgl. 1.1). Aus iv) und der Exaktheit der obigen Cohomologiesequenz erhält man den folgenden Satz von Whitney [15]:

vi) $\quad$ *Für eine kompakte orientierte 4-dimensionale M verschwindet $W_3(M)$.*

Bemerkung: iv) und vi) lassen sich sofort auf kompakte orientierte $4k$-dimensionale M verallgemeinern. Es gilt, daß U_{2k} die $\mathbf{Z}_2$-Reduktion einer ganzzahligen Klasse ist und daß also $\delta_* U_{2k}$ verschwindet. In einer 8-dimensionalen M ist $U_4 = w_4 + w_2^2$. Da w_2^2 die $\mathbf{Z}_2$-Reduktion von p_1 ist (vgl. [2]), folgt für den Fall einer 8-dimensionalen M, daß $\delta_* w_4 = W_5 = 0$.

4.2. Wir betrachten jetzt die zu dem Tangentialbündel ξ assoziierten Faserbündel $\bar{\xi}$ und $\bar{\bar{\xi}}$ (siehe 3.1). $\bar{\xi}$ ist das Bündel der (orthonormierten) 2-Beine und $\bar{\bar{\xi}}$ das Bündel der orientierten Flächenelemente von M. Da $W_3(M)$ verschwindet, gibt es 2-Bein-Felder und auch Felder von Flächenelementen mit endlich vielen Singularitäten. Jede Singularität hat als „Index" ein Paar ganzer Zahlen. Jedes Feld hat eine Indexsumme, die wieder ein Paar ganzer Zahlen ist. Welche Paare von ganzen Zahlen treten als Indexsumme eines Feldes von orientierten Flächenelementen mit endlich vielen Singularitäten auf? Dieselbe Frage stellt sich für Felder von 2-Beinen. Die Antworten sind in 3.3 und 3.5 enthalten. Sie lassen sich wegen 4.1 mit alleiniger Verwendung der Eulerschen Charakteristik $e = e(M)$ und der Poincaréschen Bilinearform S formulieren. Durch S sind die Zahlenmenge Ω und der Index $\tau = \tau(M)$ bestimmt.

4.3. **Satz.** *Es sei M eine 4-dimensionale kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es gibt auf M Felder von orientierten Flächenelementen mit endlich vielen Singularitäten. Ein Zahlenpaar (a, b) tritt dann und nur dann als Indexsumme eines derartigen Feldes auf, wenn*

$$(1) \qquad a = \frac{1}{4}(\alpha - 3\tau - 2e)\,, \quad b = \frac{1}{4}(\beta - 3\tau + 2e) \ \textit{mit} \ \alpha, \beta \in \Omega\,.$$

Es gibt auf M auch Felder von 2-Beinen mit endlich vielen Singularitäten. Ein Paar (a, b) tritt dann und nur dann als Indexsumme eines solchen Feldes auf, wenn

$$(2) \qquad a = \frac{1}{4}(\alpha - 3\tau - 2e)\,, \quad b = \frac{1}{4}(\alpha - 3\tau + 2e) \ \textit{mit} \ \alpha \in \Omega\,.$$

Die rechten Seiten von (1) und (2) sind immer ganzzahlig.

4.4. **Korollar.** *Die Indexsumme (a, b) aus (1) ist dann und nur dann unabhängig von der Wahl des Feldes, wenn die zweite Bettische Zahl von M verschwindet. Dann ist $\tau = 0$, $\Omega = \{0\}$, und die invariante Indexsumme ist $(-e/2, + e/2)$. Dasselbe gilt für (2).*

4.5. **Korollar.** *Es gibt auf ganz M ein Feld orientierter Flächenelemente dann und nur dann, wenn $3\tau + 2e$ und $3\tau - 2e$ zu Ω gehören. Es gibt auf ganz M ein 2-Bein-Feld dann und nur dann, wenn $e = 0$ und $3\tau \in \Omega$.*

4.6. Die ganzen Zahlen der Form $\frac{1}{4}(\alpha - 3\tau - 2e)$, $\alpha \in \Omega$, sind die möglichen Indexsummen (Hindernisse) für das Bündel ξ_1, das $E_\xi/\mathbf{U}(2)$ als Totalraum hat (vgl. 1.4 und 3.1). Also läßt M dann und nur dann eine fastkomplexe Struktur zu, wenn ξ_1 über ganz M einen Schnitt hat (1.1). Das ist aber genau dann der Fall, wenn unter den möglichen Indexsummen die Zahl 0 vorkommt. Damit erhalten wir einen Satz von WU WEN-TSUN ([18], S. 74) in folgender Fassung.

Satz. *Eine 4-dimensionale orientierte kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit läßt dann und nur dann eine fast-komplexe Struktur zu, wenn* $3\tau + 2e \in \Omega$.

Bemerkung: Dieser Satz gilt für die *orientierte* Mannigfaltigkeit M. Wir haben immer von dem $\mathbf{SO}(4)$-Tangentialbündel Gebrauch gemacht. Nimmt man die entgegengesetzte Orientierung, dann bleibt e fest, aber τ ändert sein Vorzeichen. Ω geht über in $-\Omega = \{\alpha : -\alpha \in \Omega\}$. Aus 4.5 und dem vorstehenden Satz folgt, daß M dann und nur dann bezüglich beider Orientierungen eine fast-komplexe Struktur zuläßt, wenn sie ein Feld von orientierten Flächenelementen ohne Singularitäten besitzt. Für die komplexe projektive Ebene mit der üblichen Orientierung ist $3\tau + 2e = 3 + 6 = 9$ und Ω ist die Menge der ungeraden Quadratzahlen. Für die entgegengesetzte Orientierung hat man $3\tau + 2e = 3$. Nur für die erste Orientierung läßt die komplexe projektive Ebene eine fast-komplexe Struktur zu [7].

4.7. Nach 1.3 ist μ als die Beschränkung von $\lambda^{(2)}$ auf $\mathbf{U}(2)$ definiert. Daraus folgt: Wenn M mit einer fast-komplexen Struktur versehen ist, dann ist ξ_2 das $\mathbf{S}_2$-Faserbündel, das zur μ-Erweiterung des tangentiellen $\mathbf{U}(2)$-Bündels von M assoziiert ist (vgl. 3.1, ξ ist immer das tangentielle $\mathbf{SO}(4)$-Bündel von M). Also ist ξ_2 das Bündel der komplexen Linienelemente der fast-komplexen M, und eine ganze Zahl b tritt dann und nur dann als Indexsumme eines Feldes komplexer Linienelemente mit endlich vielen Singularitäten auf, wenn $b = \frac{1}{4}(\beta - 3\tau + 2e)$ mit $\beta \in \Omega$. Für die komplexe projektive Ebene treten die ganzen Zahlen der Form $\frac{1}{4}((2k+1)^2 - 3 + 6) = k^2 + k + 1$ (k ganz) auf [7, 8]. — Wie wir gesehen haben, ist „das Bündel ξ_2 der komplexen Linienelemente“ mit $\mathbf{PU}(2)$ ($= \mathbf{SO}(3)$) als Strukturgruppe unabhängig von der fast-komplexen Struktur und kann sogar definiert werden, wenn M gar keine fast-komplexe Struktur besitzt. ξ_2 besitzt dann und nur dann einen Schnitt mit der Indexsumme e, wenn M eine fast-komplexe Struktur zuläßt.

4.8. Für die von uns betrachteten M ist die Existenz eines 1-Bein-Feldes über ganz M mit $e = 0$ gleichbedeutend, die Existenz eines 2-Bein-Feldes mit $e = 0$ und $3\tau \in \Omega$.

Satz. *Die Existenz eines 3-Bein-Feldes, d. h. die Parallelisierbarkeit, ist äquivalent mit* $e = \tau = 0$ *und* $x^2 = 0$ *für alle* $x \in H^2(M, \mathbf{Z}_2)$.

Beweis: Wenn M parallelisierbar, dann verschwinden alle charakteristischen Klassen, also $e = \tau = 0$ und $x^2 = 0$ ($x \in H^2(M, \mathbf{Z}_2)$) wegen 4.1 i), ii), iii). Wenn umgekehrt $x^2 = 0$ für alle $x \in H^2(M, \mathbf{Z}_2)$, dann ist $w_2(M) = 0$ und das Tangentialbündel ξ läßt $\mathbf{Spin}(4) = \mathbf{S}_3 \times \mathbf{S}_3$ als Strukturgruppe zu ([2], § 26). Das Hindernis gegen einen Schnitt in diesem $\mathbf{Spin}(4)$-Bündel verschwindet, wenn $p_1(M)$ und $W_4(M)$ verschwinden, also wenn $e = \tau = 0$. Wenn das $\mathbf{Spin}(4)$-Bündel einen Schnitt hat, dann auch ξ.

Eine M, die ein 1-Bein-Feld, aber kein 2-Bein-Feld zuläßt, ist uns nicht bekannt.

Literatur

[1] BOREL, A.: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. Ann. of Math. **57**, 115—207 (1953). — [2] BOREL, A., and F. HIRZEBRUCH: Characteristic classes and homogeneous spaces. Part I: Amer. J. Math. **80**, 458—538 (1958). Part II: Amer. J. Math. (erscheint demnächst) — [3] BOREL, A., et J. P. SERRE: Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod. Amer. J. Math. **75**, 409—448 (1953). — [4] HIRZEBRUCH, F.: Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. J. reine angew. Math. **191**, 110—124 (1953). — [5] HIRZEBRUCH, F.: On Steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the Todd genus. Proc. Nat. Acad. Sci. (Wash.) **39**, 951—956 (1953). — [6] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Ergebnisse der Mathematik. Springer-Verlag 1956. — [7] HOPF, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant, p. 167—185. New York 1948. — [8] HOPF, H.: Sur les champs d'éléments de surface dans les variétés à 4 dimensions. Colloques internat. centre nat. rech. sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 1947), 55—59 (1949). — [9] HOPF, H.: Sur une formule de la théorie des espaces fibrés. Centre Belge rech. math., Coll. Top. 117—121 (1951). — [10] HOPF, H.: Die Coinzidenz-Cozyklen und eine Formel aus der Fasertheorie. Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in honor of S. LEFSCHETZ. Princeton University Press 1957. — [11] KUNDERT, E. G.: Über Schnittflächen in speziellen Faserungen und Felder reeller und komplexer Linienelemente. Ann. of Math. **54**, 215—246 (1951). — [12] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton University Press 1951. — [13] THOM, R.: Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod. Ann. Sci. Ecol. norm. sup. **69**, 109—182 (1952). — [14] THOM, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comm. Math. Helvet. **28**, 17—86 (1954). — [15] WHITNEY, H.: On the topology of differentiable manifolds. Lectures in Topology. Ann Arbor, Michigan, 1941. — [16] WU WEN-TSUN: Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci. (Paris) **230**, 508—511 (1950). — [17] WU WEN-TSUN: Sur les puissances de Steenrod. Colloque de topologie de Strasbourg 1951 (vervielfältigt). — [18] WU WEN-TSUN: Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques. Actual. Sci. industr. 1183 (1952).

(Eingegangen am 10. Juni 1958)

BREMERMANN, H. J.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 173—186 (1958)

Die Charakterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische Funktionen+)

Von

HANS J. BREMERMANN in Seattle, Washington

Meinem verehrten Lehrer HEINRICH BEHNKE zum 60. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

In der Funktionentheorie einer Veränderlichen besagt der Rungesche Satz, daß alle holomorphen Funktionen eines Gebietes D der komplexen Ebene genau dann im Innern von D gleichmäßig durch Polynome approximierbar sind, wenn D einfach zusammenhängend ist. CARTAN und THULLEN [14, 15] zeigten, daß der entsprechende Satz für mehr als eine Veränderliche nicht gilt (vgl. auch BEHNKE-THULLEN [5]): Es gibt im C^n für $n \geqq 2$ sowohl einfach zusammenhängende Gebiete, für die die Aussage des Rungeschen Satzes falsch ist, wie Gebiete von beliebigem Zusammenhang, für die sie gilt.

Das Problem der Approximierbarkeit reduziert sich im wesentlichen auf Holomorphiegebiete; ist nämlich D ein beliebiges Gebiet, so ist jede in D holomorphe Funktion f in die Holomorphiehülle $E(D)$ von D hinein holomorph fortsetzbar, und läßt sich f im Innern von D gleichmäßig approximieren, so auch im Innern von $E(D)$. Nach J. P. SERRE [28] definiert man:

D heißt ein „Rungesches Gebiet" genau dann, wenn 1) D ein Holomorphiegebiet ist, 2) jede in D holomorphe Funktion in jedem relativ kompakten Teilgebiet $D' \Subset D$ sich gleichmäßig durch Polynome approximieren läßt.

Nach A. WEIL [25] gilt: D ist genau dann ein Rungesches Gebiet, wenn D polynomkonvex ist (die Definition von „polynomkonvex" siehe § 2).

Die Frage der Approximation durch Polynome ist ein spezieller Fall des Problems: *Wann läßt sich jede in D holomorphe Funktion im Innern von D gleichmäßig durch in einem D umfassenden Gebiet D^* holomorphe Funktionen approximieren? Wir nennen genau dann, wenn dies der Fall ist und D und D^* Holomorphiegebiete sind, D „Rungesch relativ zu D^*", und wir schreiben „$D \mathfrak{R} D^*$".*

Dieses Problem wurde von BEHNKE u. STEIN [2] gelöst: D ist genau dann Rungesch relativ zu D^*, wenn D holomorphkonvex in bezug auf D^* ist. (Die Definition von „holomorphkonvex in bezug auf . . ." siehe 2.4.)

+) Diese Arbeit ist zum Teil vom Office of Scientific Research der United States Air Force unterstützt worden und zum Teil vom Office of Naval Research. Das Hauptresultat der Arbeit hat Verf. angekündigt in: Nachr. Österr. Math. Ges. 47/48, 58—59 (1957).

Während die ersten Untersuchungen nur für schlichte Gebiete galten, haben BEHNKE [1] und BEHNKE und STEIN [4] die Resultate auf nichtschlichte Gebiete ausgedehnt. Dabei stellte es sich heraus, daß, während die Approximation in schlichten Gebieten der komplexen Ebene sehr einfach ist, man für Riemannsche Flächen (der komplexen Dimension 1) bereits dieselbe Theorie wie bei mehreren Veränderlichen benötigt. H. FLORAK [17], einer Schülerin von BEHNKE, gelang es dann mit Hilfe dieser Theorie zu zeigen, daß zu jeder offenen Riemannschen Fläche eine genau dort holomorphe Funktion existiert.

Bei der Verallgemeinerung der Funktionentheorie auf „komplexe Räume" ist das Analogon des Behnke-Stein-Weilschen Satzes von grundlegender Bedeutung, der Beweis wurde kürzlich von H. GRAUERT [18] erbracht. Eine Charakterisierung der Rungeschen Gebiete mit ganz anderen Mitteln wurde von L. EHRENPREIS [16] gefunden. Und J. P. SERRE und K. STEIN haben notwendige (aber nicht hinreichende) topologische Bedingungen für Rungesche und relativ Rungesche Gebiete angegeben [27, 28].

Es ist nun auffallend, daß die Behnke-Steinsche Bedingung für D und D^*, relativ Rungesch zu sein, der Cartan-Thullenschen Bedingung, daß ein Gebiet Holomorphiegebiet ist, sehr ähnlich ist (ein Gebiet D ist ein Holomorphiegebiet genau dann, wenn D holomorphkonvex ist). Einer der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen besagt, daß ein Gebiet des C^n genau dann holomorphkonvex ist, wenn es pseudokonvex ist. Es ist also äquivalent: „D ist holomorphkonvex" und „D ist pseudokonvex". Gibt es eine Eigenschaft, so daß gilt: 1) „D ist holomorphkonvex in bezug auf D^*" genau dann, wenn D diese gesuchte Eigenschaft besitzt, und 2) für $D^* = D$ ist die gesuchte Eigenschaft mit der gewöhnlichen Pseudokonvexität identisch?

Es wird in dieser Arbeit gezeigt, daß die im folgenden definierte Eigenschaft „D ist pseudokonvex relativ zu D^*" diesen Bedingungen genügt.

Definition: D ist pseudokonvex relativ zu D^* genau dann, wenn

$$D = \lim_{\nu\to\infty} D_\nu\,,\quad D_\nu \subset D_{\nu+1} \subset D\,,$$

und

$$D_\nu = \{z \mid V_\nu(z) < 0\}\,,$$

wobei die Funktionen $V_\nu(z)$ sämtlich in D^* plurisubharmonisch sind.

In anderen Worten: D ist der limes von Gebieten, deren Rand Niveaufläche einer in D^* plurisubharmonischen Funktion ist. Für $D = D^*$ ist diese Eigenschaft äquivalent damit, daß D im gewöhnlichen Sinne pseudokonvex ist. (Die gewöhnliche Pseudokonvexität läßt sich bekanntlich auf mannigfache Weise definieren, und die allgemeinste Definition ist äquivalent mit der Bedingung, die wir aus der obigen erhalten, wenn wir $D = D^*$ setzen (vgl. BREMERMANN [7, 10] und LELONG [21]). Mit dieser Definition lautet das Hauptresultat dieser Arbeit:

D ist genau dann Rungesch relativ zu D^*, wenn D pseudokonvex relativ zu D^* ist.

Es werden dann eine Reihe von Folgerungen aus diesem Hauptsatz gezogen, die insbesondere auch die von BEHNKE und STEIN [3] eingeführte „holomorphe Ausdehnung von D auf D^*“ unter einem neuen Gesichtspunkt erscheinen lassen. Es ergibt sich folgendes ungelöste Problem: Es seien D und D^* pseudokonvex. Es sei $D \cap E$ relativ einfach zusammenhängend in bezug auf $D^* \cap E$ für jede beliebige komplex eindimensionale analytische Ebene E. Ist dann D Rungesch relativ zu D^*?

In einer etwas anderen Sprache kann man den Sachverhalt $D \mathfrak{R} D^*$ auch wie folgt ausdrücken: Es ist D Rungesch relativ zu D^* genau dann, wenn D und D^* Holomorphiegebiete sind und die Algebra der in D^* holomorphen Funktionen dicht ist in der Algebra der in D holomorphen Funktionen (in der Topologie, die durch die gleichmäßige Konvergenz erzeugt wird). So ergeben sich einige Konsequenzen des Hauptsatzes für Funktionenalgebren und insbesondere auch für Banach-Algebren und Šilov-Ränder. Die Methode hat vielleicht auch für abstraktere Fälle Bedeutung, da unter allgemeinen Bedingungen die Punkte des Gebietes D den maximalen Idealen einer Banach-Algebra entsprechen.

Schließlich wird skizziert, wie sich die Resultate auf Steinsche Mannigfaltigkeiten ausdehnen lassen.

Der Autor möchte Dr. L. EHRENPREIS für wertvolle Ratschläge danken, sowie der Air Force und der Navy für ihre Unterstützung.

2. Definitionen und Sätze

2.1. Für die Definition von „Rungesches Gebiet“, „D ist Rungesch relativ zu D^*“ und „D ist pseudokonvex relativ zu D^*“ siehe Einleitung. (Bei der Definition von $D \mathfrak{R} D^*$ ist es unnötig, $D \subset D^*$ zu verlangen.)

2.2. *Eine reellwertige Funktion $V(z)$ heißt „plurisubharmonisch in D“ genau dann, falls in jedem Gebiet D', $D' \subset D$, eine Folge von Funktionen $\{V_\nu(z)\}$ existiert, so daß $V(z) = \lim_{\nu\to\infty} V_\nu(z)$, $V_\nu(z) \geq V_{\nu+1}(z) \geq V(z)$ in D', und $V_\nu(z)$ ist beliebig oft differenzierbar, und die Hermitesche Form*

$$\sum_{j=k=1}^{n} \frac{\partial^2 V_\nu(z)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} d z_j d \bar{z}_k$$

ist positiv semidefinit (vgl. LELONG [20] und BREMERMANN [7]).

2.3. *D ist „pseudokonvex“ genau dann, wenn $D = \lim_{\nu\to\infty} D_\nu$, $D_\nu \subset D_{\nu+1} \subset D$, und $D_\nu = \{z \mid V_\nu(z) < 0\}$ und $V_\nu(z)$ ist plurisubharmonisch in D für alle ν.*

D ist pseudokonvex genau dann, wenn die Funktion $-\log d_D(z)$, wo $d_D(z)$ der euklidische Abstand des Punktes z vom Rande von D ist, plurisubharmonisch ist in D. Allgemeiner: D ist pseudokonvex genau dann, wenn eine in D plurisubharmonische Funktion $V(z)$ existiert, die überall am Rande von D gegen unendlich geht, d. h. wenn für beliebig großes M die Punktmenge $\{z \mid V(z) < M\}$ relativ kompakt in D ist. Für die Äquivalenz dieser Definitionen und für die Äquivalenz mit der bekannten Definition mit dem Levischen Differentialausdruck siehe LELONG [21] und BREMERMANN [7, 10].

2.4. *D ist „holomorphkonvex in bezug auf D^*" genau dann, wenn $D \subset D^*$ und zu jedem $D_0 \Subset D$ ein Gebiet D' existiert, $D_0 \subset D' \Subset D$, so daß für jeden Punkt $P \in D - D'$ eine in D^* holomorphe Funktion f existiert, so daß*

$$\max_{z \in D_0} |f(z)| < |f(P)| .$$

Falls $D^* = D$ ist, so heißt D schlechtweg „holomorphkonvex", und falls $D^* = C^n$ (der ganze Raum), so ist D „polynomkonvex".

2.5. **Satz.** (BEHNKE-STEIN [2]). *D ist Rungesch relativ zu D^* genau dann, wenn D holomorphkonvex ist in bezug auf D^*.*

2.6. **Satz.** (OKA [24], NORGUET [23], BREMERMANN [9]). *D ist holomorphkonvex (ein Holomorphiegebiet) genau dann, wenn D pseudokonvex ist.*

2.7. *D ist „holomorph ausdehnbar auf D^*" genau dann, wenn es zu jedem $D' \Subset D$ und $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl von Holomorphiegebieten $D^{(1)}, \ldots D^{(k)}$, mit $D^{(1)} \subset \cdots \subset D^{(k)}$, $D^{(1)} = D$ und $D^{(k)} = D^*$ gibt, so daß, wenn $D_\varepsilon^{(j)} = \{z \mid d_D(z) > > \varepsilon\}$: $D' \subset D_\varepsilon^{(1)}$ und $D_\varepsilon^{(j+1)} \subset D^{(j)}$, $j = 1, \ldots k-1$.*

Satz. (BEHNKE-STEIN [3]). *D ist Rungesch relativ zu D^* genau dann, wenn D holomorph ausdehnbar ist auf D^*.*

2.8. *Es seien D und D^* Gebiete in der komplexen Ebene. Dann heißt D „relativ einfach zusammenhängend in bezug auf D^*" genau dann, wenn jeder Randpunkt von D in $\bar{D}^* - D$ mit dem Rand von D^* verbindbar ist.*

Satz. (BEHNKE-STEIN [4]). *Es seien D und D^* Gebiete der komplexen Ebene, dann ist D Rungesch relativ zu D^* genau dann, wenn D relativ einfach zusammenhängend ist in bezug auf D^*.*

2.9. Aus dem Behnke-Steinschen Satz folgt sofort: 1) *Falls $D_1 \mathfrak{R} D^*$ und $D_2 \mathfrak{R} D^*$, so ist $D_1 \cap D_2 \mathfrak{R} D^*$.*

2) *Wenn $D_1 \mathfrak{R} D_1^*$ und $D_2 \mathfrak{R} D_2^*$, so ist $D_1 \times D_2 \mathfrak{R} D_1^* \times D_2^*$.*

3. Der Hauptsatz

3.1. **Satz 1.** (**Hauptsatz**). *Ein Gebiet D ist Rungesch relativ zu einem umfassenden Gebiet D^* genau dann, wenn D pseudokonvex relativ zu D^* ist, das ist, wenn D von der Form ist*

$$D = \lim_{\nu \to \infty} D_\nu, \quad D_{\nu_1} \subset D_{\nu_2} \subset D \quad \textit{für} \quad \nu_2 > \nu_1 ,$$

und

$$D_\nu = \{z \mid V_\nu(z) < 0\} ,$$

wobei $V_\nu(z)$ in D^* plurisubharmonisch ist.

Ist D Rungesch relativ zu D^*, so ist der Beweis, daß D von der obigen Form ist, leicht zu erbringen. Es ist dann nämlich, auf Grund des Behnke-Stein-Weilschen Satzes 2.5, D holomorphkonvex in bezug auf D^*. Dann läßt sich, und das ist eine Standardfolgerung, D durch analytische Polyeder D_ν approximieren:

$$D = \lim_{\nu \to \infty} D_\nu, \quad D_\nu \Subset D_{\nu+1} \Subset D ,$$

$$D_\nu = \{z \mid |f_1^{(\nu)}(z)| < 1, \ldots |f_{k_\nu}^{(\nu)}(z)| < 1\} ,$$

wobei die Funktionen $f_1^{(\nu)}, \ldots, f_{k_\nu}^{(\nu)}$ in D^* holomorph sind.

Es sei

$$V_\nu(z) = \sup\{\log|f_1^{(\nu)}(z)|, \ldots \log|f_{k_\nu}^{(\nu)}(z)|\},$$

dann ist $V_\nu(z)$ plurisubharmonisch in D^* als obere Einhüllende endlich vieler plurisubharmonischer Funktionen und D_ν läßt sich in folgender Form schreiben:

$$D_\nu = \{z \mid V_\nu(z) < 0\}.$$

Damit ist der obige Satz in der einen Richtung bewiesen.

Wir haben sogar noch mehr gezeigt, nämlich: *Falls $D \,\mathfrak{R}\, D^*$ ist, so ist $D = \lim\limits_{\nu\to\infty} D_\nu$, mit $D_\nu \subset D_{\nu+1} \subset D$ und $D_\nu = \{z \mid V_\nu(z) < 0\}$, wobei $V_\nu(z)$ stetig und plurisubharmonisch in D^* ist.*

3.2. Der wesentliche Teil des Hauptsatzes ist die Aussage, daß D Rungesch relativ ist zu D^*, wenn D von der im Satze beschriebenen Form ist. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten und zeigen zunächst:

Hilfssatz 1. Es sei $D = \lim\limits_{\nu\to\infty} D_\nu$, $D_{\nu_1} \subset D_{\nu_2} \subset D$ für $\nu_2 < \nu_1$, und es sei $D_\nu \,\mathfrak{R}\, D^*$ für alle ν, dann ist $D \,\mathfrak{R}\, D^*$.

$D_\nu \,\mathfrak{R}\, D^*$ impliziert, daß für alle ν: D_ν holomorphkonvex in bezug auf D^* ist, und damit ist dann offenbar auch D holomorphkonvex in bezug auf D^*, und damit ist nach dem Behnke-Stein-Weilschen Satze (2.5): $D \,\mathfrak{R}\, D^*$.

3.3. Zum vollständigen Beweis des Hauptsatzes verbleibt damit zu zeigen: Es sei $V(z)$ plurisubharmonisch in D^*, und es sei $D = \{z \mid V(z) < 0\}$, dann ist D Rungesch relativ zu D^*.

Hierzu weisen wir nach, daß D holomorphkonvex in bezug auf D^* ist: Es sei D_0 ein beliebiges relativ kompaktes Teilgebiet von D: $D_0 \subset D$. Es sei

$$\varrho = \max_{z\in D_0} V(z),$$

dann ist offenbar $\varrho < 0$. Es sei ferner

$$D_\varrho = \{z \mid V(z) < \varrho,\ z \in D^*\}.$$

Dann ist wegen der oberen Halbstetigkeit von $V(z)$:

$$D_0 \subset D_\varrho \subset D.$$

Es sei nun P ein Punkt in $D - \bar{D}_\varrho$, und angenommen, es gäbe keine in D^* holomorphe Funktion $f(z)$, so daß

$$|f(P)| > \max_{z\in D_0} |f(z)|.$$

Dann wäre also für alle in D^* holomorphen Funktionen

$$|f(P)| \leq \max_{z\in D_0} |f(z)|.$$

Andererseits ist, auf Grund der Definition von D_ϱ:

$$V(P) > \varrho = \max_{z\in D_0} V(z).$$

Da D^* als Holomorphiegebiet vorausgesetzt war, ist das ein Widerspruch zu dem folgenden Hilfssatz 2 mit $D^* = G$, $D_0 = T$, $P = S$.

Folglich gibt es zu jedem $D_0 \subset D$ und zu jedem $P \in D - \bar{D}_0$ eine in D^* holomorphe Funktion $f(z)$, so daß $|f(P)| > \max_{z \in D_0} |f(z)|$, und damit ist D holomorphkonvex in bezug auf D^*, und folglich ist unser „Hauptsatz" bewiesen, wenn der folgende Hilfssatz 2 bewiesen ist.

3.4. *Hilfssatz 2. Es sei G ein Holomorphiegebiet, und S, T seien zwei Punktmengen, $S \cup T \subset G$, so daß für alle in G holomorphen Funktionen $f(z)$ gilt*

$$\max_{z \in S} |f(z)| \leq \max_{z \in T} |f(z)| .$$

Dann gilt auch für alle in G plurisubharmonischen Funktionen

$$\max_{z \in S} V(z) \leq \max_{z \in T} V(z) .$$

Hierzu ist zu bemerken, daß die Klasse der in G plurisubharmonischen Funktionen die Klasse der Absolutbeträge der in G holomorphen Funktionen als echte Teilklasse enthält. Die Voraussetzung, daß G ein Holomorphiegebiet ist, ist notwendig. Die Arbeit Bremermann [11] impliziert, daß für gewisse Gebiete G (siehe das „Beispiel" in der ebengenannten Arbeit), die keine Holomorphiegebiete sind, der Hilfssatz falsch ist.

Zum Beweis von Hilfssatz 2 werden zwei weitere Hilfssätze benötigt.

3.5. *Hilfssatz 3. Wenn G ein Holomorphiegebiet ist im C^n und $V(z)$ eine in G plurisubharmonische Funktion, dann ist im Raum der $n+1$ komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n, w$ der Hartogssche Körper*

$$H = \{(z,w) \mid z \in G, \; |w| < e^{-V(z)}\}$$

ein Holomorphiegebiet.

Beweis. Als Holomorphiegebiet ist G pseudokonvex. Folglich haben wir $G = \lim_{\nu \to \infty} G_\nu$, $G_\nu = \{z \mid U_\nu(z) < 0\}$, $U_\nu(z)$ plurisubharmonisch in G. Es sei

$$U_\nu^*(z,w) = \sup\{U_\nu(z), \; \log|w| + V(z)\} ,$$

dann ist $U_\nu^*(z,w)$ für jedes ν plurisubharmonisch in $G \times \{w\text{-Ebene}\}$ (als obere Einhüllende zweier plurisubharmonischer Funktionen). Das Gebiet H läßt sich schreiben

$$H = \lim_{\nu \to \infty} \{(z,w) \mid U_\nu^*(z,w) < 0\} ,$$

und damit ist H pseudokonvex (nach Definition 2.3) und damit auf Grund des Okaschen Satzes (2.6) ein Holomorphiegebiet.

3.6. *Hilfssatz 4. G sei ein Holomorphiegebiet, und es sei $V(z)$ in G plurisubharmonisch und stetig. Dann gibt es zu jedem G', $G' \subset G$, und zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele in G holomorphe Funktionen $f_1, \ldots f_k$ und rationale Konstante $c_1, \ldots c_k$, so daß in G' gilt:*

$$V(z) \leq \sup\{c_1 \cdot \log|f_1(z)| , \ldots c_k \cdot \log|f_k(z)|\} \leq V(z) + \varepsilon .$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen ist auf Grund von Hilfssatz 3

$$H = \{(z,w) \mid z \in G , \; |w| < e^{-V(z)}\}$$

ein Holomorphiegebiet. Es gibt also eine in H holomorphe Funktion, die sich nicht über H hinaus fortsetzen läßt. Entwickelt man diese Funktion in eine

Hartogssche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z)\, w^\nu ,$$

so muß der Radius der gleichmäßigen Konvergenz dieser Reihe, $R(z)$, mit $e^{-V(z)}$ übereinstimmen.

Nach HARTOGS [19] (vgl. auch BREMERMANN [7]) gilt für den Radius $R(z)$ einer solchen Reihe, und damit für $V(z)$, die Formel

$$V(z) = -\log R(z) = \limsup_{z'\to z} \left\{ \limsup_{\nu\to\infty} \left(\frac{\log |a_\nu(z)|}{\nu} \right) \right\},$$

und zugleich sind die Funktionen $\frac{\log |a_\nu(z)|}{\nu}$ lokal gleichmäßig beschränkt.

Es gilt nun folgender Satz, der ebenfalls auf HARTOGS zurückgeht (HARTOGS [19], vgl. auch BREMERMANN [7]): *Falls $\{a_\nu(z)\}$ eine Folge von im Gebiet G holomorphen Funktionen ist und falls*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \left(\frac{\log |a_\nu(z)|}{\nu} \right) \leq A \quad \textit{in } G ,$$

und falls für jedes G'', $G'' \subset G$, ein M existiert, so daß $\frac{\log |a_\nu(z)|}{\nu} < M$ in G'' für alle ν, dann gibt es zu jedem G', $G' \subset G$, und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ν_0, so daß für alle $\nu < \nu_0$

$$\frac{\log |a_\nu(z)|}{\nu} < A + \varepsilon \quad \textit{in } G' .$$

Ist nun $V(z)$ stetig, so folgt aus diesem Satz und aus der Formel

$$V(z) = \limsup_{z'\to z} \left\{ \limsup_{\nu\to\infty} \left(\frac{\log |a_\nu(z)|}{\nu} \right) \right\}$$

offenbar, daß sich aus der Folge der $a_\nu(z)$ endlich viele Funktionen $a_{\nu_1}(z), \ldots a_{\nu_k}(z)$ auswählen lassen, so daß

$$V(z) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sup \left\{ \frac{1}{\nu_1} \log |a_{\nu_1}(z)|, \ldots \frac{1}{\nu_k} \log |a_{\nu_k}(z)| \right\} \leq V(z) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ in } G' .$$

Bezeichnen wir noch: $f_1(z) = a_{\nu_1}(z) \cdot e^{\frac{\nu_1 \varepsilon}{2}}, \ldots f_k(z) = a_{\nu_k}(z) \cdot e^{\frac{\nu_k \varepsilon}{2}}$ und $c_1 = \frac{1}{\nu_1}, \ldots,$ $c_k = \frac{1}{\nu_k}$, so ergibt sich Hilfssatz 4.

3.7. Beweis von Hilfssatz 2. Es ist $S \cup T \subset G$ vorausgesetzt. Nehmen wir nun zunächst $V(z)$ als stetig an, so können wir $V(z)$, wie in Hilfssatz 4 angegeben, durch $\sup\{c_1 \cdot \log |f_1(z)|, \ldots c_k \cdot \log |f_k(z)|\}$ approximieren. Für jede der Funktionen $f_1, \ldots f_k$ gilt nach Voraussetzung:

$$\max_{z\in S} |f_1(z)| \leq \max_{z\in T} |f_k(z)| ,$$

und damit gilt auch

$$\max_{z\in S} \sup\{c_1 \cdot \log |f_1(z)|, \ldots, c_k \cdot \log |f_k(z)|\} \leq$$
$$\leq \max_{z\in T} \sup\{c_1 \cdot \log |f_1(z)|, \ldots, c_k \cdot \log |f_k(z)|\} ,$$

und daher auch
$$\max_{z\in S} V(z) \leq \max_{z\in T} V(z) + \varepsilon$$
für jedes $\varepsilon > 0$. Es folgt unser Hilfssatz 2 für stetiges $V(z)$.

Der Hilfssatz 2 ergibt sich für beliebige plurisubharmonische Funktionen daraus, daß sich eine beliebige in G plurisubharmonische Funktion $V(z)$ in jedem relativ kompakten Teilgebiet $G' \subset G$ durch in G stetige (sogar beliebig oft differenzierbare) plurisubharmonische Funktionen $V_\nu(z)$ so approximieren läßt, daß $V_\nu(z) \geq V_{\nu+1}(z) \geq V(z)$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} V_\nu(z) = V(z)$ in G'.

Damit ist unser Hauptsatz bewiesen.

4. Folgerungen aus dem Hauptsatz. Zusammenhang mit der holomorphen Ausdehnbarkeit eines Gebietes

4.1. *Corollar 1. Es sei D ein Holomorphiegebiet. Ist dann $V(z)$ eine in D plurisubharmonische Funktion, dann sind für jede Konstante M alle Komponenten des Bereichs*
$$D_M = \{z \mid V(z) < M\ ,\ z \in D\}$$
Rungesch relativ zu D.

Corollar 1a. Es sei $d_D(z)$ der euklidische Abstand des Punktes z vom Rande von D und $\chi(z)$ eine in D holomorphe und nicht verschwindende Funktion. Ist dann D ein Holomorphiegebiet, so ist jeder Bereich
$$D_\varrho = \{z \mid d_D(z) \cdot |\chi(z)| > \varrho\}$$
Rungesch relativ zu D.

Wenn D ein Holomorphiegebiet ist, dann ist (vgl. 2.3) $-\log d_D(z)$ eine in D plurisubharmonische Funktion und damit auch $-\log d_D(z) - \log|\chi(z)|$. Es ist
$$D_\varrho = \{z \mid -\log d_D(z) - \log|\chi(z)| < -\log \varrho\}\,,$$
und damit ist D Rungesch relativ zu D nach Corrolar 1.

Es ist zu bemerken: Während Corollar 1 von dem tiefliegenden Satz von Oka (2.6) Gebrauch macht, und damit auch der gerade angegebene Beweis von Corollar 1a, kann letzteres ohne Benutzung des Satzes von Oka auf einem direkteren Wege bewiesen werden, was in Bremermann [9] und [10] geschehen ist.

Corollar 1a gilt auch, falls der euklidische Abstand $d_D(z)$ durch einen beliebigen auf einer Norm beruhenden Abstand ersetzt wird (z. B. die „Randdistanz"), vgl. Bremermann [10].

4.2. **Satz 2.** Stetige Ausdehnung. *Es sei D Rungesch relativ zu D^*, dann gibt es zu jedem $D' \subset D$ eine in D^* stetige plurisubharmonische Funktion $V(z)$, so daß die Bereiche $D_t = \{z \mid V(z) < t\}$ folgende Eigenschaften haben:*

1) *Für jedes $t \geq 0$ ist $D_t \mathfrak{R} D^*$.*
2) *Für $t = 0$ ist $D' \subset D_0 \subset D$.*
3) *Für $t_1 < t_2$ ist $D_{t_1} \subset D_{t_2} \subset D$.*
4) $\lim\limits_{t\to\infty} D_t = D^*$.
5) *Die D_t bilden eine „stetige Schar".*

Unter „stetiger Schar" verstehen wir, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß

$$\int\limits_{D_{t_2}-D_{t_1}} d\,\omega < \varepsilon \text{ für } t_2 - t_1 < \delta\,,$$

wobei $d\,\omega$ das euklidische Volumelement des C^n ist.

Beweis. $D \mathfrak{R} D^*$ impliziert, daß D^* ein Holomorphiegebiet ist. Dann existiert eine in D^* stetige plurisubharmonische Funktion $V(z)$, die überall am Rande von D^* gegen unendlich geht, d. h. daß für jedes noch so große t gilt: $\{z \mid V(z) < t\} \subset D^*$. Ist D^* beschränkt, so genügt es, $V(z) = -\log d_{D^*}(z)$ zu nehmen, andernfalls nimmt man $\sup\{-\log d_{D^*}(z), |z_1|, \ldots |z_n|\}$ (vgl. 2.3).

$D \mathfrak{R} D^*$ impliziert, auf Grund des Hauptsatzes, daß zu jedem $D' \subset D$ eine in D^* stetige plurisubharmonische Funktion $U(z)$ existiert, so daß

$$D' \subset \{z \mid U(z) < 0\,,\ z \in D^*\} \subset D\,.$$

Wir wählen ferner t_0 so, daß

$$D \subset \{z \mid V(z) < t_0\}\,,$$

und bilden

$$V^*(z) = \sup\{U(z)\,,\ V(z) - t_0\}\,,$$

dann ist $V^*(z)$ plurisubharmonisch und stetig in D^*. Es ist

$$D' \subset \{z \mid U(z) < 0\,,\ z \in D^*\} = \{z \mid V^*(z) < 0\} \subset D\,,$$

und die Schar von Bereichen

$$D_t = \{z \mid V^*(z) < t\}$$

hat offenbar die gewünschten Eigenschaften.

4.3. Zusammenhang mit der holomorphen Ausdehnbarkeit von Behnke-Stein. Nach Behnke-Stein gilt $D \mathfrak{R} D^*$ genau dann, wenn D holomorph auf D^* ausdehnbar ist. Das heißt, es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Zahl von Holomorphiegebieten $D^{(1)}, \ldots D^{(k)}$, $D^{(1)} \subset \cdots \subset D^{(k)}$, $D^{(1)} = D$, $D^{(k)} = D^*$, so daß, wenn $D^{(j)}_\varepsilon = \{z \mid d_{D^{(j)}}(z) > \varepsilon\}$ ist, $D^{(j+1)}_\varepsilon \subset D^{(j)}$ gilt für $j = 1, \ldots k-1$.

Es ist nun offenbar, daß man bei der vorgehend beschriebenen stetigen Ausdehnung zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Parameterwerte $t_1 \ldots t_k$ wählen kann, so daß $D_{t_1} \ldots D_{t_k}$ eine holomorphe Ausdehnung darstellen. Ist umgekehrt D holomorph auf D^* ausdehnbar, so läßt sich mit unseren Mitteln ebenfalls leicht zeigen, daß $D \mathfrak{R} D^*$ gilt.

Aus der Definition von „relativ Rungesch" folgt unmittelbar folgender

Hilfssatz 5. Falls $D \mathfrak{R} D_1$ und $D_2 \mathfrak{R} D_3$ und $D \subset D_2 \subset D_1$, dann gilt $D \mathfrak{R} D_3$.

Es ist nun nach Corollar 1a: $D^{(j)}_\varepsilon \mathfrak{R} D^{(j)}$, und damit folgt nach Hilfssatz 5: $D^{(1)}_\varepsilon \mathfrak{R} D^*$. Mit $\varepsilon \to 0$ geht $D^{(1)}_\varepsilon \to D$, und damit ist nach Hilfssatz 1: $D \mathfrak{R} D^*$.

Es sei noch bemerkt, daß für eine Veränderliche unsere stetige Ausdehnung insbesondere eine halbstetige Ausdehnung im Sinne von Behnke-Stein [4] ist. *Ferner kann man die stetige Ausdehnung dadurch modifizieren, daß man bei der Definition der Funktion* $V^*(z)$ (im Beweis von 4.2) *den euklidischen Abstand* $d_{D^*}(z)$ *durch einen beliebigen anderen Abstand* (im Sinne von Bremermann [10]) *ersetzt* (z. B. durch die „Randdistanz"). Auch kann man $V^*(z)$ durch beliebig

oft differenzierbare plurisubharmonische Funktionen approximieren und kann so *Ausdehnungen von D auf D^* über Gebiete D_t mit „beliebig glattem" Rande* erhalten.

4.4. **Satz 3.** *Es sei D Rungesch relativ zu D^*, dann ist der Durchschnitt $D \cap E$ von D mit jeder beliebigen analytischen Ebene $E = \{z \mid z = z_0 + \lambda a\}$ relativ einfach zusammenhängend in bezug auf $D^* \cap E$.*

Beweis. Nach dem Hauptsatz existiert eine Folge von in D^* plurisubharmonischen Funktionen $V_\nu(z)$, so daß $D = \lim_{\nu \to \infty} D_\nu$, $D_\nu = \{z \mid V_\nu(z) < 0\}$. Die Beschränkung von $V_\nu(z)$ auf die analytische Ebene E ist eine in $D^* \cap E$ subharmonische Funktion, und es ist $D \cap E = \lim_{\nu \to \infty} \{\lambda \mid V_\nu(z_0 + \lambda a) < 0\}$, und damit ist, ebenfalls nach dem Hauptsatz, $E \cap D$ Rungesch relativ zu $E \cap D^*$. Das impliziert aber (vgl. § 2), da es sich um komplexe Dimension 1 handelt, daß $E \cap D$ relativ einfach zusammenhängend ist in bezug auf $E \cap D^*$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Was die Umkehrung dieses Satzes betrifft, so ist es bisher weder gelungen, sie zu beweisen, noch ein Gegenbeispiel anzugeben. Es bleibt daher folgendes

Problem: *Es sei $D \subset D^*$ und D und D^* seien pseudokonvex. Es sei der Durchschnitt von D mit jeder beliebigen analytischen Ebene E relativ einfach zusammenhängend in bezug auf $E \cap D^*$.*

Ist unter diesen Voraussetzungen D Rungesch relativ zu D^*?

4.5. **Satz 4.** *Jedes konvexe Gebiet des C^n ist ein Rungesches Gebiet.* Unter einem „konvexen Gebiet" verstehen wir, wie üblich, ein Gebiet, in dem mit je zwei Punkten das verbindende Geradenstück zum Gebiet gehört. Ein Gebiet D ist genau dann konvex, wenn $-\log d_D(z)$ eine konvexe Funktion in D ist ($d_D(z)$ der euklidische Abstand des Punktes z vom Rande von D) (BREMERMANN [10]).

In einem konvexen Gebiet D läßt sich nun offenbar jede konvexe Funktion $V(z)$ in jedem kompakten Teilgebiet $D' \Subset D$ durch im ganzen Raum C^n konvexe Funktionen $V_\nu(z)$ approximieren. Jede konvexe Funktion im C^n ist offenbar eine plurisubharmonische Funktion. Es gilt also:

$$D = \lim_{\nu \to \infty} \{z \mid V_\nu(z) - M_\nu < 0\},$$

wobei die M_ν geeignete Konstante sind, und damit ist D nach unserem Hauptsatz ein Rungesches Gebiet.

4.6. *Corollar. Jedes Tubengebiet, das ein Holomorphiegebiet ist, ist ein Rungesches Gebiet.*

Ein Gebiet T_B ist ein Tubengebiet, falls es die folgende Gestalt hat:

$$T_B = \{z \mid x \in B,\ y \text{ beliebig}\},$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z_j = x_j + y_j$ und B (die „Basis" von T_B) ein Gebiet im $x_1, \ldots, x_n$-Raum. Bekanntlich (vgl. BOCHNER-MARTIN [6], BREMERMANN [8]) ist T_B pseudokonvex (ein Holomorphiegebiet) genau dann, wenn B konvex ist, und T_B ist konvex genau dann, wenn B konvex ist.

Während wir bei Rungeschen Gebieten immer voraussetzen, daß das Gebiet ein Holomorphiegebiet ist, können wir für Tubengebiete sogar folgende Aussage machen:

4.7. **Satz 5.** *Jede in einem (beliebigen) Tubengebiet T_B holomorphe Funktion ist im Innern von T_B gleichmäßig durch Polynome approximierbar.*

Jede in T_B holomorphe Funktion f läßt sich in die Holomorphiehülle $H(T_B)$ von T_B hinein holomorph fortsetzen. $H(T_B)$ ist aber gleich der konvexen Hülle von T_B, das ist das Tubengebiet, das die konvexe Hülle von B als Basis hat (Bremermann [8]). Nach Satz 4 ist $H(T_B)$ als konvexes Gebiet ein Rungesches Gebiet, und damit läßt sich f im Innern von $H(T_B)$ und damit erst recht im Innern von T_B durch Polynome approximieren.

4.8. Wie schon in der Einleitung bemerkt, impliziert $D \mathfrak{R} D^*$, daß die Algebra der in D^* holomorphen Funktionen in der Algebra der in D holomorphen Funktionen dicht ist.

Allgemein ist es beim Studium von Algebren von in einem Gebiet D holomorphen Funktionen hinreichend, D als Holomorphiegebiet zu nehmen, da sonst alle in D holomorphen Funktionen und damit auch die Funktionen der Algebra sich in die Holomorphiehülle $E(D)$ hinein holomorph fortsetzen lassen.

Die Bedeutung des nachfolgenden Satzes 6 beruht auf folgendem: 1) Jedes Holomorphiegebiet läßt sich durch die in Satz 6 behandelte Gebietsklasse approximieren. 2) Während die Algebra aller in einem Gebiet holomorphen Funktionen keine Banach Algebra ist, bekommt man eine solche, wenn man die Teilalgebra der im abgeschlossenen Gebiet noch stetigen Funktionen nimmt. (Zum Studium dieser Banach Algebren siehe: Loomis [22], Šilov [29], Wermer [26] u. a.)

Satz 6. *Es sei $D = \{z \mid V(z) < 0\}$, wobei $V(z)$ in einer Umgebung von D plurisubharmonisch sei. Dann ist die Banach Algebra der in D holomorphen und in $\bar{D}$ stetigen Funktionen dicht in der Algebra aller in D holomorphen Funktionen in bezug auf die von der gleichmäßigen Konvergenz erzeugte Topologie.*

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar daraus, daß die Klasse der in einer Umgebung von D holomorphen Funktionen eine Teilklasse der in D holomorphen und in $\bar{D}$ stetigen ist, und die erstere Klasse ist nach unserem Hauptsatz bereits dicht in der Algebra der in D holomorphen Funktionen.

4.9. In der Theorie der Banach Algebren hat in letzter Zeit der Begriff des „Šilov Randes" besonderes Interesse gefunden (vgl. auch Bremermann [13]).

Definition: Es sei D ein Gebiet und $\mathfrak{C}$ eine Klasse von in $\bar{D}$ nach oben halbstetigen Funktionen. Existiert dann eine Punktmenge $S_{\mathfrak{C}}(D)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) *$\varphi \in \mathfrak{C}$ und $\varphi \leq M$ auf $S_{\mathfrak{C}}(D)$ impliziert $\varphi \leq M$ in ganz $\bar{D}$,*

2) *jede andere Teilmenge von $\bar{D}$ mit der Eigenschaft 1) enthält $S_{\mathfrak{C}}(D)$, dann heißt $S_{\mathfrak{C}}(D)$ der „Šilov Rand von D in bezug auf $\mathfrak{C}$".*

$S_{\mathfrak{C}}(D)$ existiert, falls $\mathfrak{C}$ eine Algebra von im abgeschlossenen Gebiet $\bar{D}$ stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen ist (LOOMIS [22], S. 80).

Satz 7. *Es sei $D \Re D^*$ und $D \subset D^*$. Es sei $\mathfrak{C}_{\bar{D}}$ die Klasse der Absolutbeträge der in D holomorphen und in $\bar{D}$ noch stetigen Funktionen und $\mathfrak{C}_{D^*}$ die Klasse der Absolutbeträge der in D^* holomorphen Funktionen. Dann gilt*

$$S_{\mathfrak{C}_{\bar{D}}}(D) = S_{\mathfrak{C}_{D^*}}(D) .$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist $\mathfrak{C}_{D^*}$ dicht in $\mathfrak{C}_{\bar{D}}$, was offenbar die Übereinstimmung der Šilov-Ränder zur Folge hat.

4.10. Für gewisse Anwendungen in der Funktionentheorie (BREMERMANN [13]) ist folgender Satz von Interesse:

Satz 8. *Es sei $D = \{z \mid V(z) < 0\}$, $V(z)$ in einer Umgebung $U(D)$ von D plurisubharmonisch und stetig. Dann existiert für die Klasse der in $U(D)$ plurisubharmonischen Funktionen ein „Šilov Rand" $S(D)$, welcher gleich dem Šilov Rand $S_{\mathfrak{C}_{\bar{D}}}(D)$ von D in bezug auf die Banach Algebra $\mathfrak{C}_{\bar{D}}$ der in D holomorphen und in $\bar{D}$ stetigen Funktionen ist.*

Für gewisse Gebiete, die keine Holomorphiegebiete sind, ist diese Aussage falsch.

Anmerkung: Die Klasse der plurisubharmonischen Funktionen enthält die Klasse der Absolutbeträge holomorpher Funktionen, ist aber gegenüber dieser keine Algebra, geschweige denn eine Banach-Algebra, sondern nur ein „konvexer Konus" (mit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{C}$ ist $\varphi_1 + \varphi_2$ in $\mathfrak{C}$, und mit $\varphi \in \mathfrak{C}$ und $c > 0$ gehört $c\varphi$ zu $\mathfrak{C}$).

Beweis. Es sei $\mathfrak{C}_{U(D)}$ die Klasse der Absolutbeträge der in einer Umgebung $U(D)$ von D holomorphen Funktionen. Dann folgt aus der Definition des Šilov Randes:

Falls $|f| \in \mathfrak{C}_{U(D)}$ und $|f| \leqq M$ auf $S_{\mathfrak{C}_{U(D)}}(D)$, so ist $|f| \leqq M$ in $\bar{D}$. Dann gilt das entsprechende aber auch für $\log |f|$ und damit auch für $c \cdot \log |f|$ falls $c > 0$, und damit auch für

$$\sup\{c_1 \cdot \log |f_1|, \ldots, c_k \cdot \log |f_k|\} ,$$

und damit auf Grund von Hilfssatz 4 auch für jede in $U(D)$ plurisubharmonische Funktion $V(z)$. Jede beliebige plurisubharmonische Funktion läßt sich monoton von oben durch stetige plurisubharmonische Funktionen approximieren. Folglich gilt die Aussage auch für beliebige plurisubharmonische Funktionen, d. h.:

Falls $V(z)$ in $U(D)$ plurisubharmonisch ist, so gilt:

Falls $V(z) \leqq M$ für $S_{\mathfrak{C}_{U(D)}}(D)$, so ist auch $V(z) \leqq M$ in $\bar{D}$.

Andererseits ist $S_{\mathfrak{C}_{U(D)}}(D)$ die kleinste Teilmenge von $\bar{D}$ mit dieser Eigenschaft, weil die in $U(D)$ plurisubharmonischen Funktionen als Teilklasse die Absolutbeträge der in $U(D)$ holomorphen Funktionen enthalten, und bereits für diese ist $S_{\mathfrak{C}_{U(D)}}(D)$ minimal.

Ferner ist nach dem vorangehenden Satz 7:

$$S_{\mathfrak{C}_{U(D)}}(D) = S_{\mathfrak{C}_{\bar{D}}}(D) .$$

Es folgt unser Satz. Das Falschwerden für gewisse Nichtholomorphiegebiete folgt aus dem Beispiel, das in BREMERMANN [11], S. 80—81 angegeben ist.

5. Ausdehnung auf Steinsche Mannigfaltigkeiten

Die meisten Folgerungen lassen sich auch für Steinsche Mannigfaltigkeiten ziehen, falls der Hauptsatz für diese gültig ist. Der Beweis des Hauptsatzes beruht:

1) Auf dem Behnke-Stein-Weilschen Satz (2.5). Dieser Satz ist kürzlich von H. Grauert [18] auf holomorph vollständige komplexe Räume und damit auch auf holomorph vollständige komplexe Mannigfaltigkeiten, und das sind Steinsche Mannigfaltigkeiten, ausgedehnt worden.

2) Auf dem Begriff der Pseudokonvexität und der relativen Pseudokonvexität. Beide Begriffe lassen sich, wie in dieser Arbeit geschehen, mit Hilfe der plurisubharmonischen Funktionen definieren. Letztere lassen sich aber unmittelbar auch auf komplexen Mannigfaltigkeiten definieren, da die Eigenschaft, eine plurisubharmonische Funktion zu sein, eine lokale Eigenschaft ist, die invariant ist unter holomorphen Transformationen. Es bleibt nur der Nachweis, daß die so eingeführte Pseudokonvexität mit der üblichen äquivalent ist. Das ist schwieriger als bei schlichten Gebieten. Ein Beweis ist in Bremermann [12] angedeutet, ein anderer ergibt sich aus der Grauertschen Einbettungsmethode (H. Grauert, unveröffentlichte mündliche Mitteilung).

3) Auf dem Okaschen Satz über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete (2.6). Ein Beweis ist von Bremermann in [12] skizziert worden, und ein anderer Beweis ist von H. Grauert (unveröffentlicht) angegeben worden.

4) Auf Hilfssatz 4. Dieser Satz beruht auf dem Okaschen Satz und auf einem Satz von Hartogs (vgl. 3.6), dessen Beweis im wesentlichen lokalen Charakter hat und der sich daher ohne Schwierigkeiten übertragen läßt.

Wir können daher ankündigen: Der Hauptsatz gilt auch für Steinsche Mannigfaltigkeiten. Es ist zu erwarten, daß darüber hinaus die Methoden und Resultate sich ebenfalls auf holomorph vollständige komplexe Räume ausdehnen lassen.

Literatur

[1] Behnke, H.: Généralisation du théorème de Runge pour des fonctions multiformes de variables complexes. Coll. sur les fonct. d. plus. var. Brüssel 1953. — [2] Behnke, H., u. K. Stein: Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität. Math. Ann. **116**, 204—216 (1938). — [3] Behnke, H., u. K. Stein: Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Gebieten des Raumes von n komplexen Veränderlichen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1**, 15 (1939). — [4] Behnke, H., u. K. Stein: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. **120**, 430—461 (1948). — [5] Behnke, H., u. P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Erg. Math. **3**, 3 (1934). — [6] Bochner, S., and W. T Martin: Several Complex Variables, Princeton 1948. — [7] Bremermann, H. J.: Die Charakterisierung von Regularitätsgebieten durch pseudokonvexe Funktionen. Schriftenr. Math. Inst. Münster **5** (1951). — [8] Bremermann, H. J.: Die Holomorphiehüllen der Tuben- und Halbtubengebiete. Math. Ann. **127**, 406—423 (1954). — [9] Bremermann, H. J.: Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **128**, 63—91 (1954). — [10] Bremermann, H. J.:

Complex Convexity. Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 17—51 (1956). — [11] Bremermann, H. J.: On the conjecture of the equivalence of the plurisubharmonic functions and the Hartogs functions. Math. Ann. **131**, 76—86 (1956). — [12] Bremermann, H. J.: On Oka's theorem for Stein manifolds. Conference on functions of complex variables, Princeton 1957. — [13] Bremermann, H. J.: On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains. Characterization of Šilov boundaries. Air Force Report Princeton 1957. Erscheint in Trans. Amer. Math. Soc. — [14] Cartan, H.: Sur une classe remarquable de domaines. C. R. Acad. Sci. (Paris) 1077 (1931). — [15] Cartan, H., u. P. Thullen: Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. **106**, 617—647 (1932). — [16] Ehrenpreis, L.: Vortrag a. d. Conference on functions of complex variables, Princeton 1957. — [17] Florak, H.: Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen. Schriftenr. Math. Inst. Münster **1** (1948). — [18] Grauert, H.: Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Räumen. Math. Ann. **133**, 139—159 (1957). — [19] Hartogs, F.: Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Math. Ann. **62**, 1—88 (1906). — [20] Lelong, P.: Les fonctions plurisousharmoniques. Ann. scient. École norm. sup. **62**, 301—345 (1945). — [21] Lelong, P.: Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques. J. Analyse Math. **2**, 178—208 (1952—1953). — [22] Loomis, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953. — [23] Norguet, F.: Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieur variables complexes. (Passage du local au global.) Bull. Soc. Math. France **82**, 137—159 (1954). — [24] Oka, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieur variables, IX, Domaines finis sans point critique interieur. Jap. J. Math. **23**, 97—155 (1953). — [25] Weil, A.: L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieur variables. Math. Ann. **111**, 178—182 (1935). — [26] Wermer, J.: Polynomial approximation on an arc in C^3. Annals Math. **62**, 269—270 (1955,). — [27] Stein, K.: Rungesche Paare komplexer Räume. Nachr. österr. math. Ges. **46/47** 47 (1957). — [28] Serre, J. P.: Une propriété topologique des domaines de Runge. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 133—134 (1955). — [29] Gelfand, I, D. Raikov and G. Šilov: Commutative normed rings. Uspehi Mat. Nauk. N.S. **2**, 48—146 (1946). (Russisch, übersetzt in: Amer. math. Soc. Translations, ser. 2, **5**, 115—220 (1957).

(Eingegangen am 10. April 1958)

KNOBLOCH, H.-W., und RÖHRL, H.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 187—200 (1958)

Zum Begriff der analytischen Fortsetzung in algebraischen Funktionenkörpern einer Veränderlichen

Von

HANS-WILHELM KNOBLOCH in Würzburg und HELMUT RÖHRL in München

Herrn Professor HEINRICH BEHNKE zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Mit einem algebraischen Funktionenkörper K einer Veränderlichen über dem Körper C der komplexen Zahlen ist in bekannter Weise eine Riemannsche Fläche und für die auf ihr existierenden meromorphen Funktionskeime ein Fortsetzungsbegriff gegeben. Es lassen sich einige Eigenschaften dieses Fortsetzungsprinzips bereits formulieren, wenn man nur von der Menge der Primstellen und nicht von der Fläche und ihrer topologischen Struktur, wenn man nur von den Entwicklungen in den Primstellen und nicht von den Funktionskeimen sprechen will. Die uns am wichtigsten erscheinenden Eigenschaften dieser Art sind die folgenden:

a) Die analytische Fortsetzung induziert Isomorphismen zwischen Unterkörpern der perfekten Hüllen von K, welche K identisch abbilden. (Man betrachte nämlich zwei Stellen von K und eine sie verbindende Kurve sowie alle meromorphen Funktionskeime in der einen Stelle, welche sich längs dieser Kurve meromorph zur zweiten Stelle hin fortsetzen lassen; sie werden offenbar isomorph in den dortigen Potenzreihenkörper abgebildet.)

b) Analytische Fortsetzung und Differentiation sind vertauschbar.

c) Ist eine Potenzreihe überall hin, und zwar eindeutig fortsetzbar, so induziert sie ein Element aus K.

Die folgenden Ausführungen handeln von einem schwächeren Fortsetzungsbegriff, den wir Fortsetzungsschema nennen wollen und für den im wesentlichen nur die Eigenschaften a) bis c) gefordert werden, der sich aber dafür bei beliebigem Konstantenkörper definieren läßt. Die beiden Daten — Körper K und Fortsetzungsschema — werden wir der Kürze halber als eine Riemannsche Fläche zu K bezeichnen. Dies entspricht in etwa dem in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen bekannten Begriff des „geringten Raumes" [1]. Mit „Fläche" hat natürlich unsere Begriffsbildung insofern wenig zu tun, als mit einem Fortsetzungsschema — zunächst jedenfalls — noch keine Topologie in der Menge der Primstellen von K verbunden ist. Doch können wir über einer Riemannschen Fläche Garben und damit Vektorraumbündel erklären und eine Cohomologietheorie betreiben. Dadurch können bereits gewisse

Teile einer Integrationstheorie für Differentiale des Funktionenkörpers entwickelt werden, jedenfalls soweit sie die Definition von Integralperioden und gewisse Aussagen der klassischen Funktionentheorie betreffen. Dazu muß allerdings das Fortsetzungsschema umfassend genug sein, nämlich so umfassend, daß es auf „lokale" Integrale von K-Differentialen angewandt werden kann. Auf die Existenz derartiger Fortsetzungsschemata im Falle der Charakteristik Null gehen wir kurz ein. Stellt man keine zusätzlichen Forderungen, so stellt sich heraus, daß man die Perioden für ein Fortsetzungsschema weitgehend willkürlich vorschreiben kann; sie stellen also von vorne herein keine charakteristischen Bestimmungsstücke des Körpers K/Ω dar. Wie und in welchen Fällen man durch zusätzliche Forderungen an das Fortsetzungsschema diese Willkür einschränken kann, hoffen wir bei späterer Gelegenheit berichten zu können.

Bei den unten benützten Bezeichnungen und Voraussetzungen werden wir uns durchweg an folgende Verabredung halten. K sei der zugrunde liegende Funktionenkörper, Ω sein (genauer) Konstantenkörper, und K/Ω sei separabel. $\tilde{\Omega}$ sei eine algebraisch abgeschlossene, algebraische Erweiterung von Ω. Die Primstellen von K bezeichnen wir mit $x, y, z, \ldots$, ihre Gesamtheit mit X und die zu einem x aus X gehörende perfekte Hülle mit K_x. Ferner ist bei uns Ω_x das Ω enthaltende gleichungstreue Vertretersystem für K_x und ${}_xt$ eine in K enthaltene lokale Uniformisierende zur Stelle x. K_x kann bekanntlich als Potenzreihenkörper $\Omega_x({}_xt)$ aufgefaßt werden [5]. Wir denken ihn uns stets in geeigneter Weise eingebettet in den Potenzreihenkörper $\tilde{K}_x = \tilde{\Omega}({}_xt)$. Für die Elemente aus K verwenden wir die Buchstaben $f, g, h, \ldots$; $a_x, b_x, \ldots$ behalten wir uns für Elemente aus K_x vor. Wird ein Element f aus K als Element aus K_x aufgefaßt, so schreiben wir der Deutlichkeit halber auch f_x.

2. Fortsetzungsschema und Riemannsche Fläche

Wir erklären wie üblich für ein Element $a_x = \Sigma\{\alpha_\nu({}_xt)^\nu : \nu \gg -\infty\} \in \tilde{\Omega}({}_xt)$ Ableitung, Differential und Residuum durch

$$\frac{da_x}{d_xt} = \Sigma\{\nu\,\alpha_\nu({}_xt)^{\nu-1} : \nu \gg -\infty\}\,,\quad da_x = (\Sigma\{\nu\,\alpha_\nu({}_xt)^{\nu-1} : \nu \gg -\infty\})\,d_xt$$
$$\mathrm{res}_x(a_x d_x t) = \alpha_{-1}\,.$$

Unter einem *Fortsetzungsschema* F verstehen wir die Vorgabe einer Teilmenge $A \subset X \times X$ und einer Zuordnung, welche jedem $(x, y) \in A$ eine Kollektion von Paaren (M_x^y, i_y^x) derart zuweist, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

F0) *Zu jedem $(x, y) \in X \times X$ und jeder endlichen Teilmenge $\overline{X}$ von X, welche x und y nicht enthält, existieren endlich viele nicht in $\overline{X}$ liegende Stellen $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_n = y$ mit $(x_i, x_{i+1}) \in A$ bzw. $(x_{i+1}, x_i) \in A$.*

F1) *M_x^y ist ein K (genauer dessen kanonisches Bild in $\tilde{K}_x$) enthaltender Unterkörper von $\tilde{K}_x$, i_y^x ein Monomorphismus von M_x^y in $\tilde{K}_y$, welcher K und $M_x^y \cap \tilde{\Omega}$ identisch auf sich (genauer auf dessen kanonisches Bild in $\tilde{K}_x$) abbildet.*

F2) *Es ist* $\dfrac{dM_x^y}{d_x t} \subset M_x^y$, *und für jedes* $a_x \in M_x^y$ *gilt die Formel*

$$i_y^x\left(\frac{da_x}{d_x t}\right) = \frac{d\,i_y^x(a_x)}{d_y t} \cdot \left(\frac{d_y t}{d_x t}\right)_y ;$$ *ferner ist* $M_x = \bigcup\{M_x^y : y \in X\}$ *ein Körper.*

F3) *Ist jeder Primstelle* $x \in X$ *ein Element* $a_x \in \widetilde{K}_x$ *derart zugeordnet, daß*

a) $i_y^x(a_x) = a_y$, *falls nur* $a_x \in M_x^y$,

b) zu jedem $(x, y) \in X \times X$ *endlich viele Stellen* $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ *existieren und zu jedem Paar* x_j, x_{j+1} *sich entweder ein* $M_{x_j}^{x_{j+1}}$ *oder ein* $M_{x_{j+1}}^{x_j}$ *finden läßt mit* $a_{x_j} \in M_{x_j}^{x_{j+1}}$ *bzw.* $a_{x_{j+1}} \in M_{x_{j+1}}^{x_j}$,

so ist $a_x = f_x$ *für alle* $x \in X$ *und ein geeignetes* f *aus* K.

F4) *Ist fast allen (d. h. bis auf endlich viele Ausnahmen) Primstellen* $x \in X$ *ein* $a_x \in \widetilde{K}_x$ *derart zugewiesen, daß*

a) *ein Differential* $f dh$ *von* K *existiert, für welches* $da_x = f_x dh_x$ *gilt, insofern* a_x *definiert ist,*

b) *die Forderungen* F3) a) *und* F3) b) *erfüllt sind, insofern* a_x *und* a_y *definiert sind,*

so ist $f dh$ *ein exaktes Differential.*

Bei den Postulaten F1) — F3) handelt es sich offenbar um abstrakte Formulierungen der Feststellungen a) — c) aus der Einleitung. F4) besagt im klassischen Fall, daß jedes Integral 3. Gattung, dessen sämtliche Perioden verschwinden, bereits ein Element des Funktionenkörpers K ist. Wie wir später sehen werden, ist F4) unabhängig von F1) — F3). F4) gestattet eine Topologisierung der Menge X. F0) ist eine den vorliegenden Verhältnissen angepaßte Formulierung für die Forderung des Zusammenhanges einer Riemannschen Fläche.

Wir sagen von nun an, mit der Angabe eines Fortsetzungsschemas zu einem Körper K/Ω sei eine *Riemannsche Fläche* gegeben. Die Menge $M_x = \bigcup\{M_x^y : y \in X\}$ nennen wir die Menge der in x meromorphen Funktionskeime unserer Riemannschen Fläche. Schließlich wollen wir das Fortsetzungsschema noch auf die Differentiale bzw. Differentialkeime ausdehnen. Unter $M_x^y d$ verstehen wir die Menge aller Differentiale der Form $a_x d_x t$, $a_x \in M_x^y$, wobei $a'_x d_x t'$ und $a_x d_x t$ identifiziert werden, falls $a'_x = a_x \dfrac{d_x t}{d_x t'}$, gilt; ferner setzen wir $i_y^x(a_x d_x t) = i_y^x(a_x) \cdot \left(\dfrac{d_x t}{d_y t}\right)_y d_y t$. Aus F1) und F2) folgt unmittelbar, daß die Definition von i_y^x konsistent ist. Die Menge $M_x d = \bigcup\{M_x^y d : y \in X\}$ heißt die Menge der in x meromorphen Differentialkeime der Riemannschen Fläche.

Bevor wir zu einigen naheliegenden Folgerungen aus den Axiomen F0) bis F4) kommen, sei noch der Begriff der holomorphen Abbildung einer Riemannschen Fläche in eine andere erklärt. Unter einer *holomorphen Abbildung* verstehen wir die Vorgabe einer Abbildung $p : X \to X'$ und einer Zuordnung, die jedem $x \in X$ eine Abbildung $p_x : M'_{p(x)} \to M_x$ derart zuweist, daß

a) die Beschränkung von p_x auf $M'^{y'}_{p(x)}$ einen Monomorphismus der Körperstruktur darstellt, welcher Elemente der Form $\Sigma\{\alpha_\nu({}_x t)^\nu : \nu \geqq 0\}$ in ebensolche überführt,

b) zu jedem (M_x^y, i_y^x) aus F ein $(M'^{p(y)}_{p(x)}, i'^{p(x)}_{p(y)})$ aus F' existiert mit

$$p_x(M'^{p(y)}_{p(x)}) \subset M_x^y \quad \text{und} \quad i_y^x \circ p_x = p_y \circ i'^{p(x)}_{p(y)}.$$

Es gilt dann

Lemma 1: Ist f' ein Element des zur Riemannschen Fläche X' gehörenden algebraischen Funktionenkörpers und ist $p: X \to X'$ eine holomorphe Abbildung, dann existiert ein Element f des zu X gehörenden algebraischen Funktionenkörpers mit $f_x = p_x(f'_{p(x)})$ für alle $x \in X$.

Beweis: Setzt man $a_x = p_x(f'_{p(x)})$ für $x \in X$, so ist wegen $K' \subset M'^{y'}_{x'}$, auch $a_x \in M_x^y$ für alle $y \in X$. Da $i_y^x(a_x) = i_y^x(p_x(f'_{p(x)})) = p_y(i'^{p(x)}_{p(y)}(f'_{p(x)})) = p_y(f'_{p(y)})$, kann man auf die Kollektion der a_x das Postulat F2) anwenden.

Wie Lemma 1 zeigt, wird durch eine holomorphe Abbildung $p: X \to X'$ eine Abbildung $p^*: K' \to K$ induziert; p^* stellt ersichtlich einen Monomorphismus dar.

Nun wollen wir einige leicht beweisbare, nützliche Aussagen zusammenstellen.

Lemma 2: $i_y^x \circ d = d \circ i_y^x$.

Lemma 3: Ist $f dh$ ein Differential des Körpers K, so ist stets $f_x dh_x \in M_x^y d$, und es gilt $i_y^x(f_x dh_x) = f_y dh_y$.

Lemma 4: Ist jedem $x \in X$ ein Element ζ_x aus $\tilde{K}_x d$ derart zugeordnet, daß die Bedingungen F3) a) und F3) b) in sinngemäßer Übertragung zutreffen, dann gibt es ein Differential $f dh$ des Körpers K mit $\zeta_x = f_x dh_x$ für alle $x \in X$.

Beweis: Es sei $\zeta_x = a_x d_x t$, $x \in X$. Dann bedeutet $i_y^x(\zeta_x) = \zeta_y$ nach Definition $i_y^x(a_x)\dfrac{d_x t}{d_y t} = a_y$; ist also h ein separierendes Element von K/Ω, so gilt $i_y^x(a_x)\dfrac{d_x t}{dh} = a_y \dfrac{d_y t}{dh} = i_y^x\left(a_x \dfrac{d_x t}{dh}\right)$. Somit gibt es nach F3) ein Element f aus K mit $a_x \dfrac{d_x t}{dh} = f_x$ für alle $x \in X$. Es ist also $\zeta_x = a_x d_x t = f_x dh_x$ für alle $x \in X$.

3. Garben über einer Riemannschen Fläche[1])

Die Struktur einer Riemannschen Fläche wird bestimmt durch die Kollektion der (M_x^y, i_y^x). Da wir keine Topologie zur Verfügung haben, werden wir bei der Definition einer Garbe diese Struktur wesentlich benützen müssen.

Unter einer *Garbe* $\mathfrak{G}$ von abelschen Gruppen über einer Riemannschen Fläche X verstehen wir die Vorgabe einer Menge G, einer surjektiven Abbildung $p: G \to X$ und einer Zuordnung, welche jedem Paar (M_x^y, i_y^x) aus F ein Paar (G_x^y, γ_y^x) zuweist, wobei

a) $p^{-1}(x)$ eine abelsche Gruppe, G_x^y Untergruppe von $p^{-1}(x)$ und $p^{-1}(x) = \bigcup\{G_x^y : y \in X\}$ ist,

b) γ_y^x ein Monomorphismus von G_x^y in $p^{-1}(y)$ ist, für welchen gilt: sind sich vermöge der obigen Zuordnung (M_x^y, i_y^x) bzw. (M_y^z, i_z^y) bzw. (M_x^z, i_z^x) bzw.

---

[1]) Wir wollen hier – ohne die Allgemeinheit einzuschränken — voraussetzen, daß mit $(M_x^y, i_y^x) \in F$ auch $(i_y^x(M_x^y), (i_y^x)^{-1})$ in F liegt.

(M_y^x, i_x^y) und (G_x^y, γ_y^x) bzw. (G_y^z, γ_z^y) bzw. (G_x^z, γ_z^x) bzw. (G_y^x, γ_x^y) einander zugeordnet und gilt $i_z^x = i_z^y \circ i_y^x$ bzw. $i_x^y = (i_y^x)^{-1}$, so gilt auch $\gamma_z^x = \gamma_z^y \circ \gamma_y^x$ bzw. $\gamma_x^y = (\gamma_y^x)^{-1}$.

Eine Garbe heißt konstant, wenn $G = X \times G_0$ mit G_0 als abelscher Gruppe ist, p die natürliche Projektion von G auf X darstellt, G_x^y stets gleich G_0 ist und γ_y^x immer die identische Abbildung ist. In naheliegender Weise läßt sich jetzt auch der Begriff einer Garbe von Moduln über einer Garbe von Ringen definieren. Jede Garbe von abelschen Gruppen läßt sich in kanonischer Weise als eine Garbe von Moduln über der konstanten Garbe der ganzrationalen Zahlen interpretieren.

Wir geben nun einige für das Folgende wichtige Beispiele an.

1. Die Garbe $\mathfrak{M}$ der auf X meromorphen Funktionskeime. Hier ist G_x^y bzw. γ_y^x gleich M_x^y bzw. i_y^x.

2. Die Garbe $\mathfrak{H}$ der auf X holomorphen Funktionskeime. Hier ist G_x^y bzw. γ_y^x gleich der Menge aller $a_x = \Sigma\{\alpha_\nu ({}_x t)^\nu : \nu \geqq 0\}$ aus M_x^y bzw. i_y^x.

3. Die Garbe $\mathfrak{K}$ der auf X konstanten Funktionskeime. Hier ist G_x^y bzw. γ_y^x gleich $M_x^y \cap \widetilde{\Omega}$ bzw. i_y^x.

4. Falls die Charakteristik q von Ω nicht Null ist, dürfte der Garbe $\overline{\mathfrak{K}}$ der auf X inseparablen meromorphen Funktionskeime einige Bedeutung zukommen. Hier ist G_x^y bzw. γ_y^x gleich der Menge aller $a_x = \Sigma\{\alpha_\nu ({}_x t)^{\nu q} : \nu \gg -\infty\}$ aus M_x^y bzw. i_y^x.

5. Die Garbe $\mathfrak{M}d$ der auf X meromorphen Differentialkeime. Hier ist G_x^y bzw. γ_y^x gleich $M_x^y d$ bzw. i_y^x.

6. Die Garbe $\mathfrak{M}_2 d$ der auf X meromorphen Differentialkeime zweiter Gattung. Hier ist G_x^y bzw. γ_y^x die Menge der $a_x d_x t = (\Sigma\{\alpha_\nu ({}_x t)^\nu : \nu \gg -\infty\})\, d_x t$ aus $M_x^y d$ mit $\alpha_{\nu q - 1} = 0$ bzw. i_y^x.

7. Die Garbe $\mathfrak{H}d$ der auf X holomorphen Differentialkeime.

Es liegt auf der Hand, daß man ähnlich wie in der üblichen Garbentheorie Operationen zwischen Garben (z. B. direkte Summe oder Tensorprodukt) einführen kann und wie man die entsprechenden Definitionen zu treffen hat.

Unter einem *Homomorphismus* $\varphi : \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ einer Garbe in eine andere verstehen wir eine Abbildung $\varphi : G' \to G$, für welche die Bedingungen

a) $p' = p \circ \varphi$ b) $\varphi(G_x'^y) \subset G_x^y$ c) $\varphi \circ \gamma_y'^x = \gamma_y^x \circ \varphi$

d) die Beschränkung von φ auf $p'^{-1}(x)$ ist ein Homomorphismus

erfüllt sind. Wir sprechen von einem *Monomorphismus*, wenn φ injektiv ist und darüber hinaus gilt: ist $\varphi(g_x') \in G_x^y$ und sind (G'^y_x, γ'^x_y) und (G_x^y, γ_y^x) beide dem Paar (M_x^y, i_y^x) zugeordnet, so ist $g_x' \in G'^y_x$. Der Homomorphismus φ wird ein *Epimorphismus* genannt, wenn φ surjektiv ist und — mit den eben getroffenen Bezeichnungen — $\varphi(G'^y_x) \supset G_x^y$ gilt. Unter einer *Untergarbe* $\mathfrak{G}'$ einer Garbe $\mathfrak{G}$ verstehen wir eine Garbe mit $G'^y_x \subset G_x^y$, für welche γ'^x_y stets gleich der Beschränkung von γ_y^x auf G'^y_x ist; man überzeugt sich leicht, daß die kanonische Injektion einer Untergarbe in die Garbe ein Monomorphismus ist. Unter der *Quotientengarbe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ der Garbe $\mathfrak{G}$ nach der Untergarbe $\mathfrak{G}'$ verstehen wir die Vorgabe der Paare $(\overline{G}_x^y, \bar{\gamma}_y^x)$, welche wie folgt erklärt sind:

es sei $\bar{p}^{-1}(x)$ die Quotientengruppe $p^{-1}(x)/p'^{-1}(x)$, $\bar{G}_x^y$ gleich $G_x^y + p'^{-1}(x)/p'^{-1}(x)$ und $\bar{\gamma}_y^x(g + p'^{-1}(x)) = \gamma_y^x(g) + p'^{-1}(y)$. Die Abbildung $\bar{\gamma}_y^x$ ist ersichtlich ein Monomorphismus, und für die Kollektion der $\bar{\gamma}_y^x$ gelten die für eine Garbe geforderten Bedingungen. Der Garbenraum $\bar{G}$ und die Projektion $\bar{p}$ der Quotientengarbe werden in naheliegender Weise erklärt. Die natürliche Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ ist, wie man leicht sieht, ein Epimorphismus. Für einen Homomorphismus sind Kern, Bild, Cokern und Cobild wieder wohldefinierte Garben. Da bei einer Quotientengarbe $\bar{G}_x^y$ nach dem ersten Isomorphiesatz der Gruppentheorie isomorph zu $G_x^y/p'^{-1}(x) \cap G_x^y$ ist, stimmt $\mathfrak{G}'$ mit dem Kern des natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ überein.

Weiter wollen wir eine Sequenz $0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'' \to 0$ exakt nennen, wenn $\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ ein Monomorphismus, $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}''$ ein Epimorphismus ist und im $(\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}) = \ker(\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'')$ gilt. Entsprechend wird eine Sequenz

$$\cdots \to \mathfrak{G}_{n-1} \to \mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_{n+1} \to \cdots$$

exakt genannt, wenn für jedes n die Sequenz

$$0 \to \ker(\mathfrak{G}_{n-1} \to \mathfrak{G}_n) \to \mathfrak{G}_{n-1} \to \ker(\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_{n+1}) \to 0$$

exakt ist.

Es sei nun in Kürze der übliche Apparat der Garbentheorie auf die hier definierten Garben übertragen, auch wenn wir für die Zwecke unserer Arbeit schon mit wesentlich geringeren Mitteln auskommen würden. Unter einer ***zusammenhängenden Teilmenge*** einer Garbe $\mathfrak{G}$ verstehen wir eine Teilmenge $B \subset G$, für welche es zu je zwei Elementen g, g' aus B endlich viele Elemente $g_0 = g, g_1, \ldots, g_n = g'$ aus B und zu jedem Paar g_j, g_{j+1} ein $(G_{p(g_j)}^{p(g_{j+1})}, \gamma_{p(g_{j+1})}^{p(g_j)})$ mit $g_j \in G_{p(g_j)}^{p(g_{j+1})}$, $\gamma_{p(g_{j+1})}^{p(g_j)}(g_j) = g_{j+1}$ gibt. Eine maximale zusammenhängende Teilmenge einer Garbe heißt eine ***zusammenhängende Komponente*** dieser Garbe.

Das Fortsetzungsschema besteht aus einer gewissen Kollektion von Paaren (M_x^y, i_y^x). U sei eine Teilmenge dieser Kollektion. Mit $p(U)$ bezeichnen wir die Menge aller $x \in X$, zu denen es ein z gibt, für welches entweder (M_z^x, i_x^z) oder (M_x^z, i_z^x) in U enthalten ist. Unter einem *Schnitt in der Garbe $\mathfrak{G}$ über U* verstehen wir eine Abbildung $s : p(U) \to G$ mit den Eigenschaften

a) $s(x) \in p^{-1}(x)$ für jedes $x \in p(U)$

b) sind x, y aus $p(U)$, so gibt es endlich viele Elemente $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y$ und Paare $(M_{x_j}^{x_{j+1}}, i_{x_{j+1}}^{x_j})$ aus U so, daß für die zugeordneten $(G_{x_j}^{x_{j+1}}, \gamma_{x_{j+1}}^{x_j})$ $s(x_j) \in G_{x_j}^{x_{j+1}}$ und $\gamma_{x_{j+1}}^{x_j}(s(x_j)) = s(x_{j+1})$ gilt

c) ist $(M_x^y, i_y^x) \in U$ und ist diesem Paar (G_x^y, γ_y^x) zugeordnet, so ist $s(x) \in G_x^y$ und $\gamma_y^x(s(x)) = s(y)$.

Die Menge aller Schnitte in der Garbe $\mathfrak{G}$ über der Menge U werde wie üblich mit $H^\circ(U, \mathfrak{G})$ bezeichnet. Ein globaler Schnitt ist per definitionem ein Schnitt über F. Trivialerweise ist ein globaler Schnitt stets eine zusammenhängende Komponente in $\mathfrak{G}$, welche durch p bijektiv auf X abgebildet wird. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nur für spezielle Garben, z. B. für die als Beispiele angeführten (vgl. F3)). Ist B eine zusammenhängende Komponente der Garbe $\mathfrak{G}$ und s ein globaler Schnitt in $\mathfrak{G}$, so läßt sich die Summe

$B + s$ als die Menge aller $g \in \mathfrak{G}$ erklären, für welche ein $g' \in B$ existiert, für welches $p(g') = p(g)$ und $g = g' + s(p(g))$ gilt. Wie man sich leicht überzeugt, ist $B + s$ wieder eine zusammenhängende Komponente von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}$ eine Garbe von Ringen, so definiert man $B \cdot s$ entsprechend.

Lemma 5: Ist $\mathfrak{G}$ eine Garbe von Moduln über einer Garbe $\mathfrak{A}$ von Ringen, so ist $H^\circ(F, \mathfrak{G})$ in natürlicher Weise mit der Struktur eines Moduls über dem Ring $H^\circ(F, \mathfrak{A})$ versehen.

Der Beweis verläuft nach bekanntem Muster.

Satz 1: *Es bestehen die folgenden natürlichen Isomorphismen:*
$H^\circ(F, \mathfrak{K}) \cong \Omega$, $H^\circ(F, \mathfrak{H}) \cong \Omega$, $H^\circ(F, \mathfrak{M}) \cong K$
$H^\circ(F, \mathfrak{H}d) \cong$ *Gruppe der Differentiale 1. Gattung von* K, $H^\circ(F, \mathfrak{M}_2 d) \cong$
$\cong$ *Gruppe der Differentiale 2. Gattung von* K.

Beweis: Klar wegen Lemma 3, Lemma 4 und F3).

Lemma 6: $\varphi : \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ sei ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{G}$. Ist $B \subset G$ eine zusammenhängende Komponente von $\mathfrak{G}$, so zerfällt $\varphi^{-1}(B)$ in $\mathfrak{G}'$ in maximale zusammenhängende Teilmengen, deren jede zusammenhängende Komponente von $\mathfrak{G}'$ ist.

Beweis: Es sei B' eine maximale zusammenhängende Teilmenge von $\varphi^{-1}(B)$. Dann ist zu zeigen, daß B' in $\mathfrak{G}'$ maximal ist. Ist $g' \in B' \cap G'^y_x$, so gilt $\gamma^x_y \circ \varphi(g') = \varphi \circ \gamma'^x_y(g') \in B$, d. h. aber $\gamma'^x_y(g') \in B'$.

Nun wollen wir uns der Erklärung der Cohomologiemoduln zuwenden. Ist $\varphi : \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ ein Homomorphismus und s' ein Element aus $H^\circ(U, \mathfrak{G}')$, so setzen wir für $x \in p(U)$ $s(x) = \varphi(s'(x))$. Da φ ein Homomorphismus ist, folgt wegen der Bedingung a) für Homomorphismen $s(x) \in p^{-1}(x)$ für alle $x \in p(U)$. Ist weiter $s'(x) \in G'^y_x$ und (G'^y_x, γ'^x_y) dem Element $(M^y_x, i^x_y) \in U$ zugeordnet, so hat man wegen der Bedingung c) für Homomorphismen $\gamma^x_y(s(x)) = \gamma^x_y \circ \varphi(s'(x)) = \varphi \circ \gamma'^x_y(s'(x)) = \varphi(s'(y)) = s(y)$; d. h. die Abbildung s erfüllt auch die Bedingung b) eines Schnittes. Wie man sich leicht überzeugt, ist auch die Bedingung c) für einen Schnitt erfüllt. Damit haben wir jedem Element $s' \in H^\circ(U, \mathfrak{G}')$ ein wohl bestimmtes Element $s = \varphi(s')$ aus $H^\circ(U, \mathfrak{G})$ zugeordnet. Wie man aus der Bedingung d) für Homomorphismen sofort entnimmt, stellt die Abbildung $\varphi : H^\circ(U, \mathfrak{G}') \to H^\circ(U, \mathfrak{G})$ wieder einen Homomorphismus dar. Es gilt nun

Lemma 7: $(H^\circ(U, \mathfrak{G}), \varphi)$ ist ein covarianter, additiver und linksexakter Funktor. (Zur Bezeichnungsweise vgl. [2].)

Beweis: Wir zeigen, daß aus der Exaktheit der Garbensequenz $0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'' \to 0$ die Exaktheit der Sequenz $0 \to H^\circ(U, \mathfrak{G}') \to H^\circ(U, \mathfrak{G}) \to H^\circ(U, \mathfrak{G}'')$ folgt. Dazu benötigt man nur noch: ist s im Kern von $H^\circ(U, \mathfrak{G}) \to H^\circ(U, \mathfrak{G}'')$ gelegen, so gehört s zum Bild von $H^\circ(U, \mathfrak{G}') \to H^\circ(U, \mathfrak{G})$. Dazu bildet man das Urbild von s vermöge des Homomorphismus $\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$. Für diese Menge hat man zu zeigen, daß sie einen Schnitt in $\mathfrak{G}'$ über U bildet. Dies ist klar, wenn man für sie die Forderung c) für einen Schnitt kontrolliert hat. Daß *c*) erfüllt ist, ergibt sich aber unmittelbar aus der Tatsache, daß $\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ ein Monomorphismus ist. Covarianz und Additivität des Funktors sind trivial.

Wegen eines Resultats von Grothendieck [4] ist es adäquat, die Cohomologietheorie über die Theorie der Satelliten zu entwickeln. An Hand von [2] überlegt man sich, daß die gesamte Theorie der Satelliten auch in unserem Falle funktioniert, wenn man nur weiß: zu jeder Garbe $\mathfrak{G}$ gibt es eine exakte Sequenz $0 \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{Q} \to \mathfrak{N} \to 0$ mit $\mathfrak{Q}$ als injektiver Garbe. Wenn dies getan ist, haben wir für unsere Garben eine Cohomologietheorie, in der auch alle üblichen Sätze der („topologischen") Garbentheorie gelten.

Beim Beweis der Existenz einer exakten Sequenz $0 \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{Q} \to \mathfrak{N} \to 0$ gehen wir analog vor wie Cartan-Eilenberg [2] S. 8. Wie dort zeigt man zuerst: Die Garbe $\mathfrak{Q}$ von Moduln über der Garbe $\mathfrak{A}$ von Ringen ist genau dann injektiv, wenn es zu jeder Ideal(unter)garbe $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{A}$ und jedem Homomorphismus φ: $\mathfrak{J} \to \mathfrak{Q}$ einen Schnitt s in $\mathfrak{Q}$ mit $\varphi(\lambda) = \lambda s$ für alle $\lambda \in \mathfrak{J}$ gibt.

Der Beweis verläuft nahezu wörtlich wie in [2]. Die eine Richtung der Aussage ist klar. Nun betrachten wir das Diagramm $0 \to \mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}$ mit
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{G} \\ & \mathfrak{Q} & \end{tikzcd}$$
exakt. Es ist zu zeigen, daß ein Homomorphismus $\psi: \mathfrak{G} \to \mathfrak{Q}$ existiert, für welchen
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{G} \arrow[dl, "\psi"] \\ \mathfrak{Q} & \end{tikzcd}$$
kommutiert. Dazu sei mit P die Menge der Paare $(\mathfrak{G}_i, \psi_i)$ betrachtet, für welche $\mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{G}$, im $(\mathfrak{G}' \to \mathfrak{G}) \subset \mathfrak{G}_i$ gilt und
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{G}_i \arrow[dl, "\psi_i"] \\ \mathfrak{Q} & \end{tikzcd}$$
kommutiert.

Erklärt man in P eine Ordnungsstruktur durch

$(\mathfrak{G}_1, \psi_1) < (\mathfrak{G}_2, \psi_2)$ genau wenn $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2$ und ψ_2 Fortsetzung von ψ_1 ist,

dann ist P induktiv geordnet, und es gibt somit nach Zorn ein maximales Element $(\mathfrak{G}_0, \psi_0)$. Ist $\mathfrak{G}_0 \neq \mathfrak{G}$, so gibt es ein α in G_x^y, das nicht in G_{0x}^y enthalten ist. Es sei dann J_x^y gleich der Menge aller $a_x \in A_x^y$ — die Garbe $\mathfrak{A}$ werde durch die Kollektion von Ringen A_x^y und Homorphismen a_y^x definiert —, für welche $a_x \alpha$ in G_{0x}^y liegt. Als den zu J_x^y gehörenden Homomorphismus wählen wir a_y^x. Schließlich setzen wir noch $J_y^x = a_y^x(J_x^y)$ und nehmen als den zu J_y^x gehörenden Homomorphismus $(a_y^x)^{-1}$. Alle anderen $J_z^{z'}$ setzen wir gleich dem Nullideal. Ersichtlich erhält man so eine Ideal(unter)garbe von $\mathfrak{A}$. Durch die Festsetzung $\psi(a_x) = \psi_0(a_x \alpha)$ für $a_x \in J_x^y$ bzw. $\psi(a_y) = q_y^x \circ \psi_0(a_x^y(a_y)\alpha)$ für $a_y \in J_y^x$ erhält man, wie sofort ersichtlich, einen Homomorphismus von $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{Q}$. Nun gelangt man ebenso wie in [2] zu einem Widerspruch zur Maximalität von $(\mathfrak{G}_0, \psi_0)$.

Der Beweis des oben angegebenen Existenzsatzes wird hier ebenfalls nur skizziert, da er sich sehr eng an [2] anschließt. Man konstruiert wie dort eine Garbe $D(\mathfrak{G})$ wie folgt: Φ sei die Menge aller Paare $(\mathfrak{J}, \varphi)$ mit $\mathfrak{J}$ als Idealgarbe in $\mathfrak{A}$ und φ als Homomorphismus dieses $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}_\Phi$ sei dann die durch Φ erzeugte freie $\mathfrak{A}$-Garbe, d. h. $\mathfrak{F}_{\Phi x}^{\,y}$ sei der durch Φ erzeugte freie A_x^y-Modul, für den der zugehörige Homomorphismus in kanonischer Weise erklärt wird; mit $D(\mathfrak{G})$ wird dann die Quotientengarbe der direkten Summe $\mathfrak{G} + \mathfrak{F}_\Phi$ nach

der durch die Elemente $(\varphi(a), -a(\mathfrak{J}, \varphi))$, $(\mathfrak{J}, \varphi) \in \Phi$, $a \in \mathfrak{J}$, erzeugten Untergarbe bezeichnet. Wie man unschwer nachrechnet, hat $D(\mathfrak{S})$ die im zitierten Beweis [2] entscheidende Eigenschaft (*), weshalb der Existenzbeweis wie dort zu Ende geführt werden kann.

4. Abelsche Integrale

Wir setzen von nun an voraus, daß die Charakteristik von Ω Null ist. Der Übergang von den Funktionskeimen $a_x \in M_x$ zu den Differentialkeimen da_x stellt offenbar einen Homomorphismus d der Garbe $\mathfrak{M}$ in die Garbe $\mathfrak{M}_2 d$ der meromorphen Differentialkeime 2. Gattung dar. Dieser einfache Sachverhalt ergibt zusammen mit den eben gewonnenen Aussagen über Schnitte und ihr Verhalten bei Homomorphismen einen Ausgangspunkt für unsere Integraldefinition. Wir benötigen allerdings noch eine Voraussetzung über das Fortsetzungsschema, die wir nun formulieren wollen:

F5) *Zu jedem Differential 2. Gattung ω von K und jedem $x \in X$ gibt es ein $a_x \in \bigcap \{M_x^y : y \in X\}$ mit $da_x = \omega_x$; jedes $a_x \in M_x$ mit $da_x = \omega_x$ ist in $\bigcap \{M_x^y : y \in X\}$ enthalten. Ist ω' ein Differential 3. Gattung von K, das nur über der endlichen Menge $\overline{X}$ von Null verschiedene Residuen besitzt, und ist $x \in X - \overline{X}$, so gibt es ein Element $b_x \in M_x$ mit $db_x = \omega'_x$, welches zu jeder Stelle $y \in X - \overline{X}$ fortsetzbar ist; ist $b'_x \in M_x$ mit $db'_x = \omega'_x$ und $b_x \in M_x^y$, so auch $b'_x \in M_x^y$.*

Wir wollen uns jetzt auf Fortsetzungsschemata beschränken, für welche F5) erfüllt ist. Nun zur Definition eines abelschen Integrals eines Differentials 2. Gattung ω von K.

Wir interpretieren ω als Element aus $H^\circ(F, \mathfrak{M}_2 d)$. Dann ist $\omega(X)$, das Bild von X unter der Abbildung ω, eine zusammenhängende Komponente von $\mathfrak{M}_2 d$. Nach Lemma 6 zerfällt $d^{-1}(\omega(X))$ in zusammenhängende Teilmengen, deren jede zusammenhängende Komponente von $\mathfrak{M}$ ist. Eine derartige zusammenhängende Komponente nennen wir ein abelsches *Integral von ω* und bezeichnen sie mit $\int \omega$. Wir wollen jetzt zeigen, daß der Körper Ω in einem noch zu präzisierenden Sinn der Körper der Integrationskonstanten für die Integrale 2. Gattung ist. Die Zuordnung $X \ni x \to c \in \Omega$ stellt ersichtlich einen Schnitt in $\mathfrak{M}$ dar. Weil aber $d(\int \omega + c) = \omega(X)$ gilt und $\int \omega + c$ wieder eine zusammenhängende Komponente in $\mathfrak{M}$ ist, besitzt ω auch $\int \omega + c$ als Integral. Hat man umgekehrt zwei verschiedene Integrale von ω, so betrachte man für ein gewisses $x \in X$ je ein Element von M_x, welches zu einem der Integrale gehört. Die Differenz dieser beiden Elemente hat die Ableitung Null und gehört somit zu $M_x \cap \tilde{\Omega}$. Wegen F5) kann man diese Differenz überall hin fortsetzen, und die Fortsetzung ist nach F1) eindeutig, also nach F3) ein Element aus Ω.

Lemma 8: Ist $\int \omega$ ein Integral des Differentials 2. Gattung ω von K, so erhält man die Menge aller Integrale von ω in der Form $\int \omega + c$ mit $c \in \Omega$.

Bei gegebenem Integral $\int \omega$ kann für gewisse $c \in \Omega$ sehr wohl die Gleichung $\int \omega = \int \omega + c$ bestehen. Die Menge aller dieser $c \in \Omega$ bildet eine Untergruppe der additiven Struktur von Ω; man wird sie als die Gruppe der Integralperioden

von ω bezeichnen. Sie ist offenbar unabhängig vo der Auswahl des Integrals von ω.

Zu den Integralperioden von ω wollen wir nun noch auf eine andere Weise gelangen, welche der klassischen Auffassung näher steht. Unter einem elementaren *Zyklus* $\mathfrak{z}$ auf der Riemannschen Fläche verstehen wir die Angabe endlich vieler Paare $(M_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}, i_{x_{\nu+1}}^{x_\nu})$, $\nu = 0, \ldots, n-1$, mit $x_0 = x_n$. Wenn wir das Differential 2. Gattung ω längs des elementaren Zyklus $\mathfrak{z}$ integrieren wollen, bestimmen wir uns ein Element $m_{x_0} \in M_{x_0}$ mit $dm_{x_0} = \omega(x_0)$ und definieren als Integralperiode $\int_{\mathfrak{z}} \omega$ von ω längs $\mathfrak{z}$ das Element $i_{x_n}^{x_{n-1}} \circ \cdots \circ i_{x_1}^{x_0}(m_{x_0}) - m_{x_0}$. Wegen F5) ist dieser Ausdruck definiert und liegt in $M_x \cap \tilde{\Omega}$, d. h. in Wirklichkeit sogar in Ω. Offensichtlich ist $\int_{\mathfrak{z}} \omega$ unabhängig von der Wahl von m_{x_0}. Es ist einleuchtend, daß die Menge der hier definierten Integralperioden von ω mit der oben definierten übereinstimmt. Nach F5) ist ein Differential 2. Gattung ω längs aller elementaren Zyklen integrierbar. Was bedeutet es, wenn sämtliche Integralperioden von ω verschwinden? Wählt man ein $m_x \in M_x$ mit $dm_x = \omega(x)$, so ist wegen F5) m_x überall hin fortsetzbar; und da sämtliche Perioden von ω verschwinden, ist m_x sogar eindeutig fortsetzbar, d. h. m_x gibt Anlaß zu einem Schnitt in $\mathfrak{M}$, d. h. einer Funktion $f \in K$; für sie gilt dann $df = \omega$. Entsprechend überlegt man sich: ist $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}$ (mit g als dem Geschlecht von K/Ω) eine Basis der Differentiale 2. Gattung von K modulo Ableitungen (vgl. [3]), d. h. eine Basis von $K_2 d/dK$, dann gibt es $2g$ elementare Zyklen $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_{2g}$ derart, daß die Matrix $\left(\left(\int_{\mathfrak{z}_\lambda} \omega_\mu\right)\right)_{\lambda, \mu = 1, \ldots, 2g}$ über Ω invertierbar ist. Nun bilden wir den durch die Menge der elementaren Zyklen erzeugten, über Ω freien Modul $\mathfrak{Z}(X, \Omega)$. Ist $\mathfrak{z} = \Sigma \alpha_\mu \mathfrak{z}_\mu \in \mathfrak{Z}$, so erklären wir für $\omega \in K_2 d$ das Integral $\int_{\mathfrak{z}} \omega$ als die Summe $\Sigma \alpha_\mu \int_{\mathfrak{z}_\mu} \omega$. $\int_{\mathfrak{z}} \omega$ definiert dann eine Bilinearform auf $\mathfrak{Z}(X, \Omega) \times K_2 d/dK$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(X, \Omega)$ die Menge derjenigen Elemente $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}(X, \Omega)$, für welche $\int_{\mathfrak{z}} \omega$ für jedes Differential 2. Gattung von K verschwindet, dann ist durch $\int_{\mathfrak{z}} \omega$ auch noch auf $\mathfrak{Z}(X, \Omega)/\mathfrak{B}(X, \Omega) \times K_2 d/dK$ eine Bilinearform definiert, welche wir wieder mit dem Integralzeichen bezeichnen wollen. Es gilt dann

Satz 2: *Die Abbildung* $\mathfrak{Z}(X, \Omega)/\mathfrak{B}(X, \Omega) \times K_2 d/dK \ni (\mathfrak{z}, \omega) \to \int_{\mathfrak{z}} \omega$ *ist eine Gruppenpaarung von* $K_2 d/dK$ *und* $\mathfrak{Z}(X, \Omega)/\mathfrak{B}(X, \Omega)$ *mit Werten in* Ω. *Bei dieser Paarung ist jeweils nur das Nullelement des einen Raumes auf dem anderen Raum orthogonal.*

Die Quotientengruppe $\mathfrak{Z}(X, \Omega)/\mathfrak{B}(X, \Omega)$ ist in kanonischer Weise mit der Struktur eines Ω-Vektorraumes versehen. Dieser Vektorraum entspricht im klassischen Fall der 1. Homologiegruppe von X mit Werten in Ω, interpretiert als Ω-Vektorraum. Wir bezeichnen deshalb $\mathfrak{Z}(X, \Omega)/\mathfrak{B}(X, \Omega)$ mit $H_1(X, \Omega)$. Entsprechend läßt sich die 1. Homologiegruppe $H_1(X)$ von X mit Werten in der Gruppe der ganzen Zahlen definieren.

Man könnte jetzt daran denken, mit Hilfe der in Satz 2 angegebenen Gruppenpaarung Periodenrelationen zu beweisen. Dies soll aber einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben, da für den Beweis der Periodenrelationen eine Reihe arithmetischer Aussagen bereitgestellt werden müssen.

Die oben gegebene Definition eines Integral zu einem Differential 2. Gattung von K kann man entsprechend auch auf Differentiale 3. Gattung von K übertragen. Ist ω ein derartiges Differential, welches nur in den Stellen der endlichen Punktmenge $\overline{X}$ von Null verschiedene Residuen besitzt, so beschränkt man die Garben $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_2 d$ auf das Komplement von $\overline{X}$ und führt die nämlichen Überlegungen wie oben durch. Man überlegt sich dann wieder, daß ein Integral 3. Gattung, dessen sämtliche Perioden verschwinden, bereits ein Element des Körpers K ist. In diesem Zusammenhang entsteht die Frage, inwieweit sich Integrale 2. und 3. Gattung hinsichtlich ihrer Perioden unterscheiden. Hier gilt

Satz 3: *Ist ω ein Differential des Körpers K, dessen sämtliche Perioden längs Zyklen aus $\mathfrak{B}(X, \Omega)$ — soweit sie überhaupt definiert sind — verschwinden, so ist ω ein Differential 2. Gattung.*

Beweis: $\mathfrak{D}$ sei der Unterraum derjenigen Zyklen $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}(X, \Omega)$, für welche $\int_{\mathfrak{z}} \omega$ definiert ist. Dann ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{B}(X, \Omega) \cap \mathfrak{D} \cong \mathfrak{D} + \mathfrak{B}(X, \Omega)/\mathfrak{B}(X, \Omega)$, d. h. es ist $\dim \mathfrak{D}/\mathfrak{B}(X, \Omega) \cap \mathfrak{D} \leq \dim \mathfrak{Z}(X, \Omega)/\mathfrak{B}(X, \Omega)$. Deshalb und wegen Satz 2 kann man ein Differential 2. Gattung ω' so bestimmen, daß $\omega - \omega'$ auf gegebenen Repräsentanten der Elemente einer Basis von $\mathfrak{D}/\mathfrak{B}(X, \Omega) \cap \mathfrak{D}$ die Perioden Null hat. Verschwinden darüber hinaus noch die Perioden von ω auf den Elementen von $\mathfrak{B}(X, \Omega) \cap \mathfrak{D}$, so sind die Perioden längs aller Zyklen aus $\mathfrak{D}$ gleich Null. Daraus schließt man aber zusammen mit F5) und F4), daß $\omega - \omega'$ in dK enthalten ist.

5. Existenz eines Fortsetzungsschemas

Bei unserer Konstruktion setzen wir voraus, daß Ω die Charakteristik Null hat. Wir wollen uns jetzt damit beschäftigen, alle M_x^y und i_y^x zu beschreiben, die den Postulaten F1) und F2) genügen und — was die M_x^y betrifft — in gewissem Sinne minimal sind, nämlich die kleinstmöglichen Körper darstellen, die lokale Integrale zu den Differentialen des Funktionenkörpers K enthalten, soweit dies überhaupt möglich ist. Schließlich werden wir zeigen, daß es immer möglich ist — sogar auf recht triviale Weise — Kollektionen aus den M_x^y und i_y^x zusammenzustellen, die sämtlichen Postulaten F0)—F5) genügen.

Zunächst einige einfache Bemerkungen und Hilfssätze.

Lemma 9: Es sei i ein K-Isomorphismus von $M \subset \widetilde{K}_x$ in $\widetilde{K}_y$. Wenn dann die Beziehung $i\left(\frac{d\,a_x}{d_x t}\right) = \frac{d\,i(a_x)}{d_y t} \cdot \left(\frac{d_y t}{d_x t}\right)_y$ für zwei Elemente $a_x \in M$ gilt, so auch für ihre Summe, Differenz, Produkt und ihren Quotienten.

Lemma 10: M sei ein bezüglich der Differentiation nach $t = {}_x t$ abgeschlossener Unterkörper von $\widetilde{K}_x$, und $a' \in M$. Hat dann a' ein Integral in $\widetilde{K}_x$, d. h.

gibt es ein $a \in \tilde{K}_x$ mit $\frac{d\,a}{d\,t} = a'$, und ist dieses Integral algebraisch über M, so gibt es bereits in M ein Integral von a'.

Beweis: Es sei $P(u)$ das irreduzible, normierte Polynom in u, welchem das nach Voraussetzung existierende Integral a von a' genügt. Das Polynom $Q(u) = a' \frac{\partial}{\partial u} P(u) + \frac{\partial}{\partial t} P(u)$ hat dann ebenfalls Koeffizienten in M und verschwindet für $u = a$. Da sein Grad in u aber kleiner ist als der von P, muß es identisch verschwinden. Ist $b \in M$ der zweithöchste Koeffizient von P, so wird $a'k + \frac{d\,b}{d\,t}$ der höchste Koeffizient von Q sein, falls k der Grad von P ist. Da wir k als positiv annehmen können, folgt $a' = -\frac{d}{d\,t}\left(\frac{b}{k}\right)$.

Ist g wieder das Geschlecht von K/Ω, dann gibt es nach [3] $2g$ modulo dK linear unabhängige Differentiale 2. Gattung von K, die wir mit $\omega_1, \ldots, \omega_{2g}$ bezeichnen wollen.

Lemma 11: Genügen die Elemente $a_{1x}, \ldots, a_{2gx} \in \tilde{K}_x$ der Bedingung $\omega_j(x) = d a_{jx}, j = 1, \ldots, 2g$, so sind sie über K algebraisch unabhängig.

Beweis: Wir schreiben kurz a_j statt a_{jx}. Es sei $a_1, \ldots, a_s$ ein maximales über K algebraisch unabhängiges Teilsystem unter den a_j. Nach Lemma 10 gilt dann $a_j + \gamma_j \in K(a_1, \ldots, a_s)$ mit geeigneten $\gamma_j \in \tilde{\Omega}, j = 1, \ldots, 2g$. Betrachten wir nun die durch $\sigma_i(a_j) = a_j + \delta_{ij}, i, j = 1, \ldots, s$, definierten K-Automorphismen σ_i von $K(a_1, \ldots, a_s)$. Ihr gemeinsamer Invariantenkörper ist, wie man sofort sieht, K selber. Außerdem genügen diese Automorphismen der Bedingung $\sigma\left(\frac{da}{d_x t}\right) = \frac{d\sigma(a)}{d_x t}$ für jedes a aus $K(a_1, \ldots, a_s)$. Denn dies gilt nach Konstruktion für die Erzeugenden $a_1, \ldots, a_s$ des Erweiterungskörpers und für K selbst; und damit nach Lemma 9 für alle Elemente aus $K(a_1, \ldots, a_s)$. Die Differenzen $\sigma_i(a_j + \gamma_j) - (a_j + \gamma_j)$ sind Elemente aus $\tilde{\Omega} \cap K(a_1, \ldots, a_s)$, da ihre Ableitungen wegen der Vertauschbarkeit von σ_i mit der Differentiation verschwinden. Weil aber $\tilde{\Omega}$ algebraisch über Ω ist und es andererseits keine echten über K algebraischen Elemente in $K(a_1, \ldots, a_s)$ gibt, liegen die obigen Differenzen bereits in $\tilde{\Omega} \cap K = \Omega$. Nehmen wir nun im Widerspruch zu unserer Behauptung an, daß s kleiner als $2g$ ist. Wir können dann $2g$ Elemente $\lambda_j \in \Omega$ finden, die nicht sämtlich verschwinden und für welche $\sum_{j=1}^{2g} \lambda_j\{\sigma_i(a_j + \gamma_j) - - (a_j + \gamma_j)\} = 0$ ist für $i = 1, \ldots, s$. Dann bleibt $\sum_{j=1}^{2g} \lambda_j(a_j + \gamma_j)$ unter sämtlichen σ_i invariant, ist also ein Element f aus K. Durch Übergang zu den Differentialen folgt daraus $\sum_{j=1}^{2g} \lambda_j \omega_j = df$, was im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit (modulo dK) der ω_j steht.

Für das Weitere setzen wir zur Abkürzung $K'_x = K(a_{1x}, \ldots, a_{2gx}) \subset \tilde{K}_x$. Jede Zuordnung $a_{jx} \to a_{jy} + \gamma_j$ mit beliebigem $\gamma_j \in \tilde{\Omega} \cap K'_y$ liefert einen K-Isomorphismus von K'_x auf K'_y, für den F 2) erfüllt ist. Wir betrachten

nun an einer Stelle x der Gesamtheit der Differentiale 3. Gattung von K, welche dort residuenfrei sind. Bekanntlich [3] kann man sie modulo Differentialen 2. Gattung von K linear aufbauen aus gewissen Differentialen $\omega(z, x_0)$ $z \in X - \{x, x_0\}$, welche jeweils durch den Divisor $-z - x_0$ teilbar sind und in z das Residuum $+1$ besitzen. Es gilt dann das

Lemma 12: Genügen die Elemente $b_x(z) \in \hat{K}_x$ der Bedingung $d b_x(z) = \omega(z, x_0)$, so sind sie für verschiedene z über K'_x algebraisch unabhängig.

Beweis: Nehmen wir an, die Behauptung träfe nicht zu. Dann wählen wir ein x und ein x_0, zu welchen es eine möglichst kleine Anzahl r über K'_x algebraisch abhängiger $b_x(z)$ gibt. Es seien dies etwa die Elemente $b_1, \ldots, b_r$, unter denen $b_1, \ldots, b_{r-1}$ über K'_x algebraisch unabhängig sind (falls $r > 1$). db_r sei gleich $\omega(y, x_0)$; dann sind nach Voraussetzung $db_1, \ldots, db_{r-1}$ in y residuenfrei, besitzen also in $\hat{K}_y$ lokale Integrale c_j, welche infolge der Minimaleigenschaft von r über K'_y algebraisch unabhängig sind. Wir können daher einen geeigneten Isomorphismus i_y^x von K'_x auf $K'_y \subset \hat{K}_y$, welcher F2) genügt, vermöge der Zuordnung $b_j \to c_j$ auf den Körper $K'_x(b_1, \ldots, b_{r-1})$ fortsetzen. Dieser Körper ist abgeschlossen gegenüber Differentiation. Da nach Voraussetzung b_r über ihm algebraisch ist, enthält er nach Lemma 10 $b_r + \gamma_r$ mit geeignetem $\gamma_r \in \tilde{\Omega}$. Daraus folgt

$$\frac{d}{d_y t}\left(i_y^x(b_r + \gamma_r)\right) d_y t = i_y^x\left(\frac{d(b_r + \gamma_r)}{d_x t}\right)\left(\frac{d_x t}{d_y t}\right)_y d_y t = \omega(y, x_0)_y$$

im Widerspruch zur Tatsache, daß $\omega(y, x_0)$ an der Stelle y ein von Null verschiedenes Residuum besitzt.

Adjungieren wir zu einem K'_x sämtliche $b_x(z)$ mit $z \neq x_0, z \neq y$ (es sei $y \neq x_0$), so erhalten wir einen Körper M_x^y, welcher lokale Integrale zu allen Differentialen 3. Gattung enthält, die an den Stellen x und y das Residuum Null aufweisen. Durch die Zuordnung $b_x(z) \to b_y(z)$ wird auf Grund von Lemma 12 ein Monomorphismus von M_x^y in $\hat{K}_y$ erklärt, für den F2) erfüllt ist. Man erkennt ebenso wie oben, daß es K-Automorphismen σ von M_x^y gibt, welche jeweils mit der Differentiation vertauschbar sind und als gemeinsamen Invariantenkörper K besitzen. Es gibt also auch so viele Monomorphismen i_y^x von M_x^y in $\hat{K}_y$, daß sie sämtlich auf ein $a_x \in M_x^y$ nur dann die gleiche Wirkung haben können, falls a_x in K liegt. Dies besagt, daß sich a_x nur dann eindeutig nach y hin fortsetzen läßt, wenn a_x in K enthalten ist.

Um nun endlich ein Fortsetzungsschema zu konstruieren, wählen wir in X abzählbar unendlich viele x_ν — bekanntlich ist dies möglich [3] — und in $X^* = X - \bigcup\{x_\nu : \nu = 1,2, \ldots,\}$ ebenfalls abzählbar unendlich viele y_ν und setzen $A = (X^* \times X^*) \cup \bigcup\{(x_\mu, y_\nu) : \mu, \nu = 1,2, \ldots\}$. Für jedes Paar $(x, y) \in X^* \times X^*$ wählen wir dann nach dem obigen Muster mindestens ein (M_x^y, i_y^x), für ein Paar (x_μ, y_ν) aber so viele Paare $(M_{x_\mu}^{y_\nu}, i_{y_\nu}^{x_\mu})$ — die $M_{x_\mu}^{y_\nu}$ sind nur von (x_μ, y_ν) abhängig —, daß nur die Elemente aus K eindeutig von x_μ nach y_ν fortgesetzt werden können. Dann gilt F3) sogar in der schärferen Form: „Ist jeder Primstelle bis auf endlich viele ...". Somit gilt auch F4).

Daß F 5) erfüllt ist, folgt einerseits aus der Tatsache, daß $K'_x \subset M^y_x$, zum anderen daraus, daß Ω der genaue Konstantenkörper von M^y_x ist, da letzteres ja rein transzendent über K ist.

Satz 4: *Ist die Charakteristik von Ω gleich Null, dann gibt es stets ein Fortsetzungsschema, welches* F 5) *erfüllt.*

Literatur

[1] CARTAN, H.: Sem. Bourbaki (Mai 1955). — [2] CARTAN, H., u. S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton 1956. — [3] CHEVALLEY, C.: Introduction to the theory of algebraic functions. New York 1951. — [4] GROTHENDIECK, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku math. J. 9, 119—183 (1957). — [5] HASSE, H.: Zahlentheorie. Berlin 1949.

(Eingegangen am 27. April 1958)

STOLL, W.
Math. Annalen. Bd. 136, S. 201—239 (1958)

Über meromorphe Abbildungen komplexer Räume. I

Von

WILHELM STOLL in Princeton

Herrn Professor Dr. HEINRICH BEHNKE zum 60. Geburtstag gewidmet

Ist f in einem Gebiet G des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen, oder allgemeiner in einem komplexen Raum G meromorph und ist M die Menge der Unbestimmtheitsstellen, so definiert die Funktion f eine holomorphe Abbildung von $A = G - M$ in die Zahlenkugel P^1. Endlich viele meromorphe Funktionen f_μ definieren ebenso eine „meromorphe Abbildung" in den Osgoodschen Raum $\overline{C^m} = \prod_{\mu=1}^{m} P^1$, die holomorph abgesehen von den Unbestimmtheitsstellen der f_μ ist. Ein weiteres Beispiel einer solchen „meromorphen Abbildung" ist jede birationale Transformation einer algebraischen Mannigfaltigkeit.

Für einen beliebigen Bildraum H verliert der Begriff „*meromorphe Abbildung*" jedoch seine Bedeutung. Will man ihn übertragen, so wird man verlangen, daß die Singularitätenmenge M in G nicht zu dick ist. Man nennt eine Menge M *dünn* (von der Dimension p, bzw. Codimension q), wenn jeder Punkt von M eine Umgebung U hat mit einer in U analytischen und $U \cap M$ enthaltenden Menge, die in U nirgends dicht (bzw. von der Dimension p, bzw. Codimension q) ist. Eine abzählbare Vereinigung von (der Dimension p, bzw. der Codimension q) dünnen Mengen heiße *fastdünn* (von der Dimension p bzw. Codimension q). Eine holomorphe Abbildung $\tau : A \to H$ einer offenen Teilmenge A eines komplexen Raumes G in einen komplexen Raum H heiße eine *Abbildung mit dünnen Singularitäten*, wenn $M = G - A$ dünn ist. Die Abbildung heiße lückenlos, wenn jede Folge $\tau(P^\nu)$ mit $P^\nu \in A$ und $\lim_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0 \in M$ eine konvergente Teilfolge hat.

In der Literatur*) finden sich nun zwei verschiedene Definitionen von meromorph. Die eine stammt von REMMERT [13]: Eine Abbildung heiße *R-meromorph*, wenn die abgeschlossene Hülle $\overline{T}$ des Graphen $T = \{(P, \tau(P)) \mid P \in A\}$ in $G \times H$ analytisch ist. Ist τ sogar noch lückenlos, so heiße τ *SR-meromorph*[1]). Die andere Definition stammt von STOLL [17]: Eine Abbildung τ heiße *schwach meromorph (lückenfrei)*, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in M$ und jeder eindimensionalen komplexen Teilmannigfaltigkeit L von G mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ höchstens (mindestens) einen Punkt $Q_0 \in H$ gibt, der Häu-

*) Das Literaturverzeichnis zu dieser Arbeit findet sich am Schluß des II. Teiles. (Math. Ann. 136)

[1]) Die ursprüngliche Definition von REMMERT lautet ein wenig anders und stimmt mit dem hiesigen Begriff „SR-meromorph" überein.

fungspunkt einer Folge $\tau(P^\nu)$ mit $P^\nu \in L \cap A$ und $\lim_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0$ ist[2]). Wenn sogar

$$\tau(P) \to Q_0 \text{ für } P \to P_0 \text{ mit } P \in L \cap A$$

strebt, so heiße τ *meromorph*. Eine Abbildung ist genau dann meromorph, wenn sie lückenfrei und schwach meromorph ist.

In dieser Arbeit, die in zwei Teilen erscheint, sollen (schwach) meromorphe und R-meromorphe Abbildungen und ihre gegenseitigen Beziehungen untersucht werden. Jede R-meromorphe Abbildung ist schwach meromorph. Ob auch die Umkehrung gilt, ist unbekannt; ebenso ist unbekannt, ob jede meromorphe Abbildung auch R-meromorph ist. Eine Hauptaufgabe dieser Arbeit besteht darin, dies für gewisse Fälle sicherzustellen.

In § 1 werden die Begriffe dünn, fastdünn und Abbildung mit dünnen Singularitäten eingeführt. Ein Kriterium für die Hebbarkeit einer Singularität $P_0 \in M$ wird gegeben (Satz 1.6) und die Struktur der Streumenge von τ ein wenig untersucht (Satz 1.4).

Ist in einem Gebiet A eine analytische Menge N gegeben, die in jedem Randpunkt regulär ist, so braucht sich N in kein $\overline{A} - A$ enthaltendes Gebiet fortsetzen zu lassen, selbst wenn $\overline{A} - A = M$ dünn ist. Diese Schwierigkeiten im Begriff der Fortsetzung analytischer Mengen werden in § 2 geklärt.

In § 3 werden die verschiedenen Meromorphiedefinitionen gegeben. Von Wichtigkeit ist insbesondere Satz 3.6, der besagt, daß die Menge S der nicht hebbaren singulären Stellen einer meromorphen Abbildung τ fastdünn von der Codimension 2 ist. Der Satz wird falsch für schwach meromorphe und R-meromorphe Abbildungen. Wie schon von Remmert [13] bewiesen wurde, ist S analytisch und höchstens von der Codimension 2, wenn τ SR-meromorph ist.

Ein komplexer Raum H heiße M-vollständig, wenn es zu jedem $Q_0 \in H$ endlich viele in H meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gibt, die in einer Umgebung U von Q_0 holomorph sind und für die das Gleichungssystem $f_\mu(Q) = f_\mu(Q_0)$ in U nur die Lösung $Q = Q_0$ hat. In § 4 wird gezeigt, daß eine lückenfreie Abbildung τ in einen M-vollständigen Raum H dann und nur dann meromorph (R-meromorph) ist, wenn die Abbildung τ jede meromorphe Funktion von H meromorph auf G überträgt, deren Pol- und Unbestimmtheitsstellen nicht das Bild $\tau(A_\nu)$ einer Zusammenhangskomponente A_ν von A enthält. Für lückenfreie Abbildungen in M-vollständige Räume stimmen die Begriffe „meromorph" und „R-meromorph" überein (Satz 4.5). Eine Abbildung in einen kompakten Raum ist immer lückenlos, also auch lückenfrei. Die Begriffe meromorph, schwach meromorph, R-meromorph und SR-meromorph stimmen also überein, wenn der Bildraum ein komplexprojektiver Raum P^m oder ein Produkt von solchen Räumen ist. Eine Abbildung in P^m ist dann und nur dann meromorph, wenn sie durch meromorphe Funktionen gegeben wird. Die Ergebnisse der Paragraphen 3 und 4 rechtfertigen also die Begriffe „meromorph" und „R-meromorph" als sachgemäß.

[2]) Die ursprüngliche Definition von Stoll stimmt mit dem hiesigen Begriff „schwach meromorph" überein.

In § 5 werden meromorphe Abbildungen analytischer Mengen eingeführt und auf meromorphe Abbildungen komplexer Räume zurückgeführt.

In § 6 werden einige später benötigte Hilfssätze bewiesen, wovon die Hilfssätze 6.1, 6.7 und 6.8 die Fortsetzung analytischer Mengen über höherdimensionale analytische Mengen betreffen, also einen Problemkreis, über den noch fast gar nichts bekannt ist, und der recht schwierig zu sein scheint.

In § 7 wird in den Sätzen 7.5 und 7.6 eine hinreichende Bedingung für die R-Meromorphie gewonnen. Der Beweis ist kompliziert und beruht auf Hilfssatz 6.1. Dieses Kriterium ermöglicht es, in einigen weiteren Fällen die Übereinstimmung der Meromorphiebegriffe zu zeigen; z. B. stimmen für eine lückenfreie Abbildung die Begriffe „meromorph" und „R-meromorph" überein, wenn der Bildraum zweidimensional ist und es eine nirgendskonstante meromorphe Funktion gibt (Satz 7.13) oder wenn die Abbildung sogar lückenlos ist und der Bildraum keine kompakte Zusammenhangskomponente hat. Außerdem werden Abbildungen mit höchstens abzählbar vielen wesentlichen Singularitäten untersucht. Solche gibt es: Sei $G = C^n$ der Raum von n komplexen Veränderlichen, M der Ursprung von C^n und $A = G - M$. Sei $S_{\mathfrak{z}} = \{2^m \mathfrak{z} \mid m = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ für $\mathfrak{z} \in A$. Die Mengen $S_{\mathfrak{z}}$ sind die Punkte einer komplexen Mannigfaltigkeit H der Dimension n[3]). Die Abbildung $\tau : A \to H$ mit $\tau(\mathfrak{z}) = S_{\mathfrak{z}}$ ist holomorph und wesentlich singulär im Ursprung M bezüglich beider Meromorphiebegriffe.

In § 8 wird die Gleichheit der Meromorphiebegriffe für Modifikationen zwischen n-dimensionalen komplexen Räumen in den Fällen $n = 1, 2, 3$ bewiesen. Im Falle $n = 2$ erhält man damit leicht eine Verbesserung des „Hauptsatzes über meromorphe Modifikationen" (Stoll [18]). Ein Beispiel einer lückenfreien, ja sogar meromorphen und R-meromorphen aber nicht lückenlosen Abbildung τ, die sogar eine holomorphe Modifikation definiert, wird gegeben.

Diese Arbeit ist während eines Aufenthaltes am *Institute for Advanced Study in Princeton* entstanden. Ich möchte dem Institut für diesen Studienaufenthalt und anregende Arbeitsmöglichkeit aufs wärmste danken.

§ 1. Abbildungen mit dünnen Singularitäten

Der Begriff des *komplexen Raumes* und der damit unmittelbar verbundenen Begriffe wie *„analytisch verzeigte Überlagerung"*, *holomorphe Abbildung"*, *„komplexer Atlas"* usw. werden wie bei Grauert und Remmert [6] eingeführt. Neuerdings wurde von Grauert und Remmert [7] bewiesen, daß die so definierten Räume mit den nach H. Cartan definierten übereinstimmen. Man kann daher auch die Begriffsbildung von Remmert [13] übernehmen. *Ein komplexer Raum habe immer eine abzählbare Basis der offenen Mengen.*

Ein komplexer Raum L heiße *komplexer Unterraum* des komplexen Raumes G, wenn $L \subseteq G$ und wenn die identische Abbildung $\iota : L \to G$ holomorph und topologisch ist. Wenn dabei L sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, so heiße L eine *komplexe Teilmannigfaltigkeit*.

[3]) Vgl. H. Hopf [9].

Ist U eine offene Teilmenge des komplexen Raumes G und M in G enthalten, so heiße der Durchschnitt $M_a(U)$ aller in U analytischen Mengen, die $M \cap U$ umfassen, die *analytische Hülle* von M in U. Es ist $M_a(U)$ eine in U analytische Menge. Sei $M_a = M_a(G)$. Sei $\dim_U^a M = \dim M_a(U)$ die analytische Dimension[4]) von M.

Definition 1.1. *Eine Teilmenge M eines komplexen Raumes G heiße dünn von der Dimension p (bzw. der Codimension[4]) $n - p$), wenn jeder Punkt $P \in M$ eine offene, zusammenhängende Umgebung $U \subseteq G$ mit $\dim_U^a M \leqq p$ und $\dim U = n$ hat. Eine von der Codimension dünne Menge heiße dünn schlechthin. Ist M Vereinigung höchstens abzählbar vieler dünner Mengen der Dimension p (bzw. der Codimension $n - p$), so heiße M fastdünn von der Dimension p (bzw. der Codimension $n - p$). Ist M fastdünn von der Codimension 1, so heiße M fastdünn schlechthin.*

Eine abgeschlossenene dünne Menge der Dimension Null ist analytisch, höchstens abzählbar und hat keinen Häufungspunkt. Eine fastdünne Menge der Dimension Null ist höchstens abzählbar. Die Vereinigung abzählbar vieler fastdünner Mengen der Dimension p ist wieder fastdünn von der Dimension p. Eine dünne oder fastdünne Menge der Dimension p hat höchstens die topologische Dimension $2p$.

In der ganzen Arbeit wird unter τ eine holomorphe Abbildung einer offenen Teilmenge A eines komplexen Raumes G in einen komplexen Raum H verstanden, wobei die Ausnahmemenge $M = G - A$ dünn ist. Eine solche Abbildung heiße eine Abbildung mit dünnen Singularitäten.

Definition 1.2. *Die Streumenge $\Sigma_\tau(R, L)$ in R entlang L der Abbildung τ ist die Menge aller $Q = \lim\limits_{\nu \to \infty} \tau(P^\nu)$, wobei der Grenzpunkt $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu \in R$ existiert und $P^\nu \in L \cap A$ ist. Seien*

$$\begin{aligned}
\Sigma_\tau(P, L) &= \Sigma_\tau(\{P\}, L) && \text{für } P \in G\,, \\
\Sigma_\tau(R) &= \Sigma_\tau(R, G) && \text{für } R \subseteq G\,, \\
\Sigma_\tau(P) &= \Sigma_\tau(\{P\}) && \text{für } P \in G\,.
\end{aligned}$$

Definition 1.3. *Die Menge $T = \{(P, \tau(P)) \mid P \in A\}$ heiße der Graph von τ über A. Die abgeschlossenen Hülle $\bar{T}$ von T in $G \times H$ heiße der Graph von τ. Ist $N \subseteq G$, so heiße $\bar{T} \cap (N \times H)$ der Graph von τ über N. Ist $L \subseteq G$, so sei $T_L = \{(P, \tau(P)) \mid P \in A \cap L\}$ der Graph der auf L beschränkten Abbildung $\tau_L = \tau \mid L$ über A.*

Satz 1.1. *Ist $\varphi : \bar{T} \to H$ die durch $\varphi(P, Q) = Q$ gegebene Projektion und $\psi : \bar{T} \to G$ die durch $\psi(P, Q) = P$ gegebene Projektion, so ist*

$$\Sigma_\tau(R, L) = \varphi(\bar{T}_L \cap (R \times H)) = \varphi(\bar{T}_L \cap \psi^{-1}(R))\,.$$

Speziell

$$\begin{aligned}
\Sigma_\tau(R) &= \varphi\, \psi^{-1}(R)\,, \\
\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0, L) &= \bar{T}_L \cap (\{P_0\} \times H) = \bar{T}_L \cap \psi^{-1}(P_0)\,, \\
\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0) &= \psi^{-1}(P_0)\,.
\end{aligned}$$

[4]) Unter der Dimension einer analytischen Menge, einer lokalanalytischen Menge, einer fastdünnen oder dünnen Menge, eines komplexen Raumes oder einer komplexen Mannigfaltigkeit wird immer die komplexe Dimension verstanden. Die Codimension einer solchen Teilmenge M eines komplexen Raumes G in einem Punkt P ist

$$\operatorname{Codim}_P M = \dim_P G - \dim_P M\,.$$

Insbesondere sind $\Sigma_\tau(P_0)$ und $\Sigma_\tau(P_0, L)$ abgeschlossen. Darüber hinaus ist $\Sigma_\tau(R, L)$ abgeschlossen, wenn R kompakt ist.

Beweis. Zu jedem $Q_0 \in \Sigma_\tau(R, L)$ gibt es eine konvergente Folge $P^\nu \in L \cap A$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} (P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$, wobei $P_0 \in R$ ist. Wegen $(P^\nu, \tau(P^\nu)) \in T_L$ ist $(P_0, Q_0) \in T_L \cap (R \times H)$ also $Q_0 \in \varphi(T_L \cap (R \times H))$.

Ist umgekehrt $Q_0 \in \varphi(T_L \cap (R \times H))$, so gibt es einen Punkt (P_0, Q_0) in $T_L \cap (R \times H)$ und eine Folge $(P^\nu, Q^\nu) \in T_L$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} (P^\nu, Q^\nu) = (P_0, Q_0)$. Also ist $Q^\nu = \tau(P^\nu)$ und $P^\nu \in L \cap A$. Daraus folgt $Q_0 \in \Sigma_\tau(R, L)$. Zusammen ergibt sich

$$\Sigma_\tau(R, L) = \varphi(T_L \cap (R \times H)) = \varphi(T_L \cap \psi^{-1}(R)).$$

Wegen $T \cap \psi^{-1}(R) = \psi^{-1}(R)$ folgt daraus $\Sigma_\tau(R) = \varphi\, \psi^{-1}(R)$. Es ist

$$\begin{aligned}\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0, L) = \{P_0\} \times \varphi(T_L \cap (\{P_0\} \times H)) &= T_L \cap (\{P_0\} \times H)\\ &= T_L \cap \psi^{-1}(P_0),\end{aligned}$$

woraus $\psi^{-1}(P_0) = \{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0)$ folgt.

Ist nun R kompakt, so werde eine offene, relativ kompakte Umgebung U von R gewählt. Sei $Q^\nu \in \Sigma_\tau(R, L)$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} Q^\nu = Q_0$. Seien ϱ eine Metrik auf G und σ eine Metrik auf H. Folgen $P^\nu_\mu \in L \cap A$ mit $\lim\limits_{\mu \to \infty}(P^\nu_\mu, \tau(P^\nu_\mu)) = (P^\nu, Q^\nu)$ und mit $P^\nu \in R$ existieren. Da R kompakt ist, kann man zu einer wieder mit P^ν bezeichneten konvergenten Teilfolge von P^ν übergehen mit $P_0 = \lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu \in R$. Sei $P^\nu_{\mu_\nu}$ so gewählt, daß $\varrho(P^\nu, P^\nu_{\mu_\nu}) < \frac{1}{\nu}$ und $\sigma(Q^\nu, \tau(P^\nu_{\mu_\nu})) < \frac{1}{\nu}$ ist. Wegen

$$\varrho(P_0, P^\nu_{\mu_\nu}) < \frac{1}{\nu} + \varrho(P_0, P^\nu) \text{ und } \sigma(Q_0, \tau(P^\nu_{\mu_\nu})) < \frac{1}{\nu} + \sigma(Q^\nu, Q_0)$$

strebt $(P^\nu_{\mu_\nu}, \tau(P^\nu_{\mu_\nu})) \to (P_0, Q_0)$ für $\nu \to \infty$ mit $P_0 \in R$ und $P^\nu_{\mu_\nu} \in L \cap A$. Daher ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(R, L)$. Die Menge $\Sigma_\tau(R, L)$ ist abgeschlossen, w.z.b.w.

Ein besonderer Fall der Singularität ist die Lücke:

Definition 1.4. *Ist $\Sigma_\tau(P_0, L) = \emptyset$, so ist P_0 eine Lücke von τ entlang L. Die Abbildung τ heiße in $R \subseteq M$ lückenlos entlang L, wenn es zu jedem $P_0 \in R$ und jeder Folge $P^\nu \in A \cap L$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0$ eine Teilfolge P^{ν_μ} gibt, für die $\tau(P^{\nu_\mu})$ konvergiert. Ist $L = G$, so heiße τ lückenlos in R. Ist $L = G$ und $R = M$, so heiße τ lückenlos. Die Abbildung τ heiße in $R \subseteq M$ lückenfrei, wenn für jede eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit $L \subseteq G$ mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$ mit $P_0 \in R$ die Streumenge $\Sigma_\tau(P_0, L)$ nicht leer ist. Die Abbildung τ heiße lückenfrei, wenn sie in M lückenfrei ist.*

Die Begriffe „τ hat keine Lücke“ und „τ ist lückenlos“ stimmen nicht überein. Die Lückenlosigkeit kann auch noch anders charakterisiert werden:

Satz 1.2. Voraussetzung. *Sei L eine lokalzusammenhängende Teilmenge von G mit $L \cap M = \overline{L \cap A} \cap M$. Die Menge L werde durch $M \cap L$ nirgends zerlegt. Die Teilmenge R von M sei kompakt.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist τ lückenlos in R entlang L, wenn $\Sigma_\tau(R, L)$ kompakt und $\Sigma_\tau(P_0, L) \neq \theta$ für jedes $P_0 \in R \cap L$ ist.*

Beweis. *a) Sei $\Sigma_\tau(R, L)$ kompakt und $\Sigma_\tau(P_0, L) \neq \theta$ für jedes $P_0 \in R \cap L$.* Eine offene Umgebung U von $\Sigma_\tau(R, L)$ werde gewählt, deren abgeschlossene Hülle $\overline{U}$ kompakt ist. In A ist $V = \tau^{-1}(U)$ enthalten und offen. Sei $P_0 \in R$. Angenommen, P_0 wäre Häufungspunkt von $(\overline{V} - V) \cap A \cap L$. Dann gäbe es eine Folge $P^\nu \in (\overline{V} - V) \cap A \cap L$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0$. Die Bildfolge $\tau(P^\nu)$ liegt in dem kompakten Rand $\overline{U} - U$ von U. Also gibt es eine konvergente Teilfolge $\tau(P^{\nu_\mu})$. Es ist $\lim\limits_{\mu \to \infty} \tau(P^{\nu_\mu}) \in \Sigma_\tau(R, L) \cap (\overline{U} - U) = \theta$. Widerspruch!

Ist $P_0 \in R \cap L$, so gibt es eine offene Umgebung W von $P_0 \in L$ mit $A \cap \overline{V} \cap W \cap L = W \cap L \cap V$, für die $W \cap L$ zusammenhängend ist. Nach Voraussetzung ist auch $W \cap L - M \cap L = W \cap A \cap L$ zusammenhängend. Die beiden disjunkten Mengen $(W - V) \cap L \cap A = (W - \overline{V}) \cap L \cap A$ und $W \cap V \cap L \cap A$ sind offen auf L und ihre Vereinigung ist

$$W \cap A \cap L = (W \cap V \cap A \cap L) \cup [(W - V) \cap L \cap A].$$

Da $W \cap A \cap L$ zusammenhängend ist, ist eine dieser beiden Mengen leer. Eine Folge $P^\nu \in L \cap A$ existiert mit $\lim\limits_{\nu \to \infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$, da $\Sigma_\tau(P_0, L)$ nicht leer ist. Es ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(R, L) \subseteq U$ und folglich $\tau(P^\nu) \in U \subseteq \overline{U}$ für $\nu \geqq \nu_0$, d. h., $P^\nu \in V \cap A \cap L$ für $\nu \geqq \nu_0$. Weil $P_0 = \lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu \in W$ und W offen ist, gibt es eine Nummer $\nu_1 \geqq \nu_0$ mit $P^\nu \in W \cap V \cap A \cap L$ für alle $\nu \geqq \nu_1$. Also ist $W \cap V \cap A \cap L \neq \theta$, also $(W - V) \cap A \cap L = \theta$, was $W \cap A \cap L = W \cap V \cap A \cap L$ nach sich zieht. Sei nun irgendeine Folge $P^\nu \in L \cap A$, die gegen $P_0 \in R \cap L$ konvergiert, gegeben. Für eine Nummer ν_2 ist $P^\nu \in W \cap A \cap L \subseteq V$ für alle $\nu \geqq \nu_2$. Somit ist $\tau(P^\nu) \in U \subseteq \overline{U}$. Da $\overline{U}$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge $\tau(P^{\nu_\mu})$. Folglich ist τ in P_0 entlang L lückenlos. Ist $P_0 \in R - L = R - \overline{L \cap A}$, so ist τ in P_0 entlang L lückenlos nach Definition.

b) *Die Abbildung τ sei in R lückenlos entlang L.* Sei ϱ eine Metrik auf G und σ eine Metrik auf H. Sei $Q_\nu \in \Sigma_\tau(R, L)$. Dann gibt es Folgen $P^\mu_\nu \in L \cap A$ mit $\lim\limits_{\mu \to \infty} P^\mu_\nu = P_\nu \in R$ und $\lim\limits_{\mu \to \infty} \tau(P^\mu_\nu) = Q_\nu$. Da R kompakt ist, kann man eine konvergente Teilfolge von P_ν finden, die wieder mit P_ν bezeichnet sei. Es ist $P = \lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu \in R$. Die Folge μ_ν werde so gewählt, daß

$$\varrho(P^{\mu_\nu}_\nu, P_\nu) < \frac{1}{\nu} \text{ und } \sigma(\tau(P^{\mu_\nu}_\nu), Q_\nu) < \frac{1}{\nu}$$

ist. Wegen

$$\varrho(P^{\mu_\nu}_\nu, P) < \frac{1}{\nu} + \varrho(P_\nu, P)$$

strebt $S_\nu = P^{\mu_\nu}_\nu \to P$ für $\nu \to \infty$. Da τ lückenlos ist, gibt es eine Teilfolge S_{ν_t} mit $\lim\limits_{t \to \infty} \tau(S_{\nu_t}) = Q \in \Sigma_\tau(R, L)$. Wegen $\sigma(Q_{\nu_t}, Q) \leqq \sigma(\tau(S_{\nu_t}), Q) + \frac{1}{\nu_t}$ strebt $Q_{\nu_t} \to Q$ für $t \to \infty$. Also ist $\Sigma_\tau(R, L)$ kompakt. Weil τ lückenlos in R entlang L ist und weil $L \cap R = \overline{L \cap A} \cap R$ gilt, ist $\Sigma_\tau(P_0, L) \neq \theta$ für $P_0 \in L \cap R$. Der Satz ist bewiesen.

Wählt man speziell $L = G$, so ergibt sich: Die Abbildung τ ist in der kompakten Teilmenge R von G genau dann lückenlos, wenn $\Sigma_\tau(R)$ kompakt und $\Sigma_\tau(P_0) \neq \emptyset$ für jedes $P_0 \in R$ ist. Da die Abbildung τ in R genau dann lückenlos ist, wenn sie es in jedem Punkt von R ist, ergibt sich: Die Abbildung τ ist genau dann lückenlos, wenn $\Sigma_\tau(P_0) \neq \emptyset$ und kompakt ist für jeden Punkt P_0 von M. Man kann die Lückenlosigkeit auch in Zusammenhang mit dem Graphen bringen:

Satz 1.3. Voraussetzung. *Sei T der Graph von τ und $\psi : T \to G$ die durch $\psi(P, Q) = P$ gegebene Projektion.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist τ lückenlos, wenn ψ eigentlich*[5]) *ist. Ist τ lückenlos, so ist $\psi(T) = G$.*

Beweis. *a) Sei τ lückenlos.* Dann ist $\psi^{-1}(P) = \{P\} \times \Sigma_\tau(P) \neq \emptyset$ und kompakt für $P \in M$. Also ist $\psi(T) = G$. Sei nun K eine kompakte Teilmenge von G und $K' = \psi^{-1}(K)$. Sei $(P_\nu, Q_\nu) \in K'$. Dann hat die Folge $P_\nu \in K$ eine konvergente Teilfolge, die wieder mit P_ν bezeichnet werde. Sei $\lim\limits_{\nu \to \infty} P_\nu = P$. Gibt es eine Teilfolge $P_{\nu_\mu} \in A$, so kann man wegen der Lückenlosigkeit diese so wählen, daß $\tau(P_{\nu_\mu}) = Q_{\nu_\mu}$ konvergiert. Es ist $\lim\limits_{\mu \to \infty}(P_{\nu_\mu}, Q_{\nu_\mu}) \in K'$. Gibt es keine solche Teilfolge, so ist $P_\nu \in M \cap K$ für $\nu \geqq \nu_1$. Da $M \cap K$ kompakt ist, ist $\Sigma_\tau(M \cap K)$ nach Satz 1.2 kompakt. Es ist

$$(P_\nu, Q_\nu) \in \psi^{-1}(P_\nu) = \{P_\nu\} \times \Sigma_\tau(P_\nu),$$

d. h. $Q_\nu \in \Sigma_\tau(P_\nu) \subseteq \Sigma_\tau(M \cap K)$. Also gibt es eine konvergente Teilfolge Q_{ν_μ} mit $\lim\limits_{\mu \to \infty}(P_{\nu_\mu}, Q_{\nu_\mu}) = (P, Q) \in K'$; denn K' ist abgeschlossen. Die Menge K' erweist sich kompakt. Die Abbildung ψ ist eigentlich.

b) Sei ψ eigentlich. Sei $P_0 \in M$ und $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0$. Die Menge K, die aus allen P^ν und dem Grenzpunkt P_0 besteht, ist kompakt. Also ist $\psi^{-1}(K)$ kompakt. Also hat $(P^\nu, \tau(P^\nu)) \in \psi^{-1}(K)$ eine konvergente Teilfolge. Die Abbildung τ ist lückenlos, w.z.b.w.

Die Streumenge $\Sigma_\tau(P_0)$ kann nicht eine beliebige Gestalt haben, wie der folgende Satz zeigt. Eine Menge L heiße *linear zusammenhängend*, wenn je zwei Punkte von L sich innerhalb L durch eine stetige Kurve verbinden lassen. Die Menge L heiße lokal linear zusammenhängend, wenn es in jeder Umgebung eines jeden Punktes eine Umgebung U gibt, so daß $U \cap L$ linear zusammenhängend ist. Eine Teilmenge L' von L zerlege L nirgends (linear), wenn für jede offene Menge U, für die $U \cap L$ linear zusammenhängend ist, auch $U \cap (L - L')$ linear zusammenhängend ist.

Satz 1.4. Voraussetzung. *Sei L eine lokal linear zusammenhängende Teilmenge von G mit $P_0 \in L \cap M \subseteq \overline{L \cap A} \cap M$. Die Menge $M \cap L$ zerlege L nirgends linear.*

---

[5]) Eine stetige Abbildung $\tau : A \to H$ heißt eigentlich, wenn $\tau^{-1}(K)$ kompakt für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq H$ ist.

Behauptung. *Entweder ist*

a) $\Sigma_\tau(P_0, L) = \emptyset$; *oder*

b) $\Sigma_\tau(P_0, L)$ *besteht aus genau einem Punkt; oder*

c) $\Sigma_\tau(P_0, L)$ *hat in jedem seiner Punkte eine topologische Dimension größer als Null, insbesondere ist* $\Sigma_\tau(P_0, L)$ *perfekt, also nicht abzählbar.*

Beweis. Angenommen, in $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0, L)$ habe $\Sigma_\tau(P_0, L)$ die topologische Dimension Null und enthalte einen Punkt $Q_1 \neq Q_0$. Dann gibt es offene, relativ kompakte Umgebungen V_ν von Q_ν mit $\bar{V}_0 \cap \bar{V}_1 = \emptyset$ und $(\bar{V}_0 - V_0) \cap \cap \Sigma_\tau(P_0, L) = \emptyset$. Sei ϱ eine Metrik in G und U_μ eine offene Umgebung von P_0 mit $\varrho(P_0, P) < \frac{1}{\mu}$ für $P \in U_\mu$, so daß $U_\mu \cap L$ linear zusammenhängend ist. Nun gibt es zwei Folgen $P_\nu^\lambda \in A \cap L$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty}(P_\nu^\lambda, \tau(P_\nu^\lambda)) = (P_0, Q_\nu)$. Es gibt je eine Teilfolge $P_\nu^{\lambda_\mu} \in U_\mu \cap A \cap L$. Für $\mu \geqq \mu_0$ ist $\tau(P_\nu^{\lambda_\mu}) \in V_\nu$. Da $U_\mu \cap A \cap L = U_\mu \cap L - M \cap L$ linear zusammenhängend ist, gibt es eine stetige Kurve C_μ, die $P_0^{\lambda_\mu}$ mit $P_1^{\lambda_\mu}$ innerhalb $U_\mu \cap A \cap L$ verbindet. Es ist $\tau(C_\mu) \cap V_\nu \neq \emptyset$. Daher gibt es ein $P_2^\mu \in C_\mu \subseteqq U_\mu$ mit $\tau(P_2^\mu) \in \bar{V}_0 - V_0$. Da $\bar{V}_0$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge μ_σ, für die $\tau(P_2^{\mu_\sigma})$ konvergiert. Es ist $Q_3 = \lim\limits_{\sigma \to \infty} \tau(P_2^{\mu_\sigma}) \in \bar{V}_0 - V_0$. Wegen $\varrho(P_0, P_2^{\mu_\sigma}) \leqq \frac{1}{\mu_\sigma}$ strebt $P_2^{\mu_\sigma} \to P_0$ für $\sigma \to \infty$. Es ist $P_2^{\mu_\sigma} \in A \cap L$. Also ist $Q_3 \in \Sigma_\tau(P_0, L) \cap (\bar{V}_0 - V_0) = \emptyset$. Widerspruch! Enthält $\Sigma_\tau(P_0, L)$ mehr als einen Punkt, so hat diese abgeschlossenen Menge in jedem ihrer Punkte eine topologische Dimension größer Null, insbesondere enthält sie keinen isolierten Punkt, ist also perfekt und damit nicht abzählbar.

Die Voraussetzung des Satzes ist speziell für $L = G$ und auch jede eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$ erfüllt. Mittels dieser Streumengen kann man nun das reguläre oder singuläre Verhalten von τ in einem Punkt von M beurteilen.

Definition 1.5. *Die Abbildung* τ *heiße im Punkt* $P \in M$ *regulär und* P *eine hebbare Singularität, wenn es eine offene Umgebung* U *von* P *und eine holomorphe Abbildung* $\tilde{\tau} : A \cup U \to H$ *mit* $\tilde{\tau} \mid A = \tau$ *gibt. Ist* τ *in* P *nicht regulär, so heiße* τ *in* P *singulär.*

Satz 1.5. *Ist* τ *in jedem Punkt* $P \in R \subseteqq M$ *regulär, so gibt es eine offene Umgebung* U *von* R *und eine holomorphe Abbildung* $\tilde{\tau} : U \cup A \to H$ *mit* $\tilde{\tau} \mid A = \tau$. *Die Streumenge* $\Sigma_\tau(P_0)$ *besteht aus genau einem Punkt* Q_{P_0} *für jedes* $P_0 \in U \cap M$. *Es ist* $\tilde{\tau}(P_0) = Q_{P_0}$ *für* $P_0 \in U \cap M$.

Beweis. Eine abzählbare Überdeckung von R durch offene Mengen U_ν und holomorphe Abbildungen $\tau_\nu : U_\nu \cup A \to H$ mit $\tau_\nu \mid A = \tau$ existieren. Es ist $U_\mu \cap U_\nu = \bigcup\limits_{\lambda=1}^{\infty} V_\lambda$, wobei V_λ und $V_\lambda \cap A$ Gebiete sind. Aus $\tau_\nu \mid V_\lambda \cap A = \tau \mid V_\lambda \cap A = \tau_\mu \mid V_\lambda \cap A$ folgt $\tau_\nu \mid V_\lambda = \tau_\mu \mid V_\lambda$ und daraus $\tau_\nu \mid U_\nu \cap U_\mu = \tau_\mu \mid U_\mu \cap U_\nu$. Also wird durch $\tilde{\tau}(P) = \tau_\nu(P)$ für $P \in U_\nu$ eine holomorphe Abbildung $\tilde{\tau} : U \cup A \to H$ definiert, wobei $U = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} U_\nu$ und $\tilde{\tau} \mid A = \tau$ ist. Aus der Definition der Streumenge folgen sofort die übrigen Behauptungen.

Die Abbildung τ ist in einem Punkt P_0 bereits dann regulär, wenn $\Sigma_\tau(P_0)$ keine „zu große“ Menge ist:

Satz 1.6. *Hat die nichtleere Streumenge $\Sigma_\tau(P_0)$ in einem ihrer Punkte die topologische Dimension Null, so ist τ in $P_0 \in M$ regulär.*

Beweis. Nach Satz 1.4 besteht $\Sigma_\tau(P_0)$ aus genau einem Punkt Q_0. Da $\Sigma_\tau(P_0)$ kompakt ist, ist τ lückenlos in P_0. Daher ist die Abbildung

$$\tau_0(P) = \begin{cases} \tau(P) & \text{für } P \in A \\ Q_0 & \text{für } P = P_0 \end{cases}$$

auf $A_0 = A \cup \{P_0\}$ stetig. Zu $Q_0 \in H$ existiert eine offene Umgebung U, die durch eine topologische und holomorphe Abbildung ψ auf einen komplexen Teilraum U' des C^m abgebildet wird. Da τ_0 stetig ist, gibt es eine offene Umgebung V von P_0 mit $\tau_0(V \cap A_0) \subseteq U_1$, wobei U_1 offen, $\overline{U}_1$ kompakt und $Q_0 \in U_1 \subseteq \overline{U}_1 \subset U$ ist. Die Vektorfunktion $\mathfrak{v}(P) = \psi\,\tau(P)$ ist holomorph und beschränkt in $V \cap A$, läßt sich also analytisch zu $\tilde{\mathfrak{v}}(P)$ in V fortsetzen. Ist nun $Q_1 \in \Sigma_\tau(P_1)$ für ein $P_1 \in M \cap V$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in A \cap V$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_1, Q_1)$. Also ist $\tilde{\mathfrak{v}}(P_1) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \mathfrak{v}(P^\nu) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \psi\tau(P^\nu) = \psi(Q_1)$, wobei Q_1 als Grenzpunkt von $\tau(P^\nu) \in U_1$ zu $\overline{U}_1 \subset U$ gehört. Also ist $\Sigma_\tau(P_1) \subseteq \psi^{-1}\tilde{\mathfrak{v}}(P_1)$. Daher besteht $\Sigma_\tau(P_1)$ höchstens aus einem Punkt. Ist nun $P^\nu \in A \cap V$ irgend eine Folge mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} P^\nu = P_1 \in M \cap V$, so ist $\tilde{\mathfrak{v}}(P_1) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \psi\,\tau(P^\nu)$ ein Punkt von $\psi(U_1) = \psi(\overline{U}_1)$. Daher ist $\psi^{-1}\tilde{\mathfrak{v}}(P_1) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \tau(P^\nu)$. Also besteht $\Sigma_\tau(P_1)$ aus genau einem Punkt $Q_{P_1} = \psi\,\tilde{\mathfrak{v}}(P_1)$. Die Abbildung

$$\tilde{\tau}(P) = \begin{cases} \tau(P) & \text{für } P \in A \\ Q_P & \text{für } P \in M \cap V \end{cases}$$

ist in jedem Punkt von $V \cup A$ stetig, in A holomorph und auf V auch holomorph wegen $\tilde{\tau}(P) = \psi^{-1}\tilde{\mathfrak{v}}(P)$ für $P \in V$. Daher ist τ in P_0 regulär, w.z.b.w.

§ 2. Fortsetzung analytischer Mengen

Die Fortsetzung analytischer Mengen stößt begrifflich auf etwas mehr Schwierigkeiten als die holomorpher Funktionen. Daher sollen hier einige Sätze zum Begriff der Fortsetzung analytischer Mengen ohne Anspruch auf Neuheit zusammengestellt und bewiesen werden.

Definition 2.1. *Die offene Teilmenge A des komplexen Raumes G enthalte die irreduzible analytische Menge N. Dann heiße N in G fortsetzbar, wenn es eine in G analytische Menge $N' \supseteq N$ mit $\dim N' = \dim N$ gibt.*

Satz 2.1. *Ist im Falle der Definition 2.1 die analytische Menge N fortsetzbar, so gibt es eine und nur eine irreduzibele analytische Menge $N^* \supseteq N$ in G mit $\dim N = \dim N^*$. Diese analytische Menge N^* heiße die Fortsetzung von N in G.*

Beweis. Eine analytische Menge $N' \supseteq N$ mit $\dim N' = \dim N$ existiert. Die irreduziblen Teile von N' seien N'_ν. In A ist $N'_\nu \cap A$ analytisch. Seien N^λ_ν die irreduzibeln Teile von $N'_\nu \cap A$. Dann ist $N \subseteq N' \cap A = \bigcup\limits_\nu \bigcup\limits_\lambda N^\lambda_\nu$

mit $\dim N \geqq \dim N^{\lambda}_{\nu}$. Die irreduzibele analytische Menge N stimmt also mit einem N^{ν}_{λ} überein. Es ist $N \subseteqq N_{\nu}$ für genau ein ν. Sind $N_1^* \supseteqq N$ und $N_2^* \supseteqq N$ in G irreduzibel und haben beide dieselbe Dimension wie N, so ist $N_1^* \cap N_2^*$ analytisch und hat im Falle $N_1^* \neq N_2^*$ eine Dimension kleiner als die von N. Wegen $N \subseteqq N_1^* \cap N_2^*$ ist das aber nicht der Fall. Also ist $N_1^* = N_2^*$, w.z.b.w.

Nun läßt sich der Begriff der analytischen Fortsetzung einer beliebigen analytischen Menge einführen:

Definition 2.2. *Die offene Menge A des komplexen Raumes G enthalte die analytische Menge N. Dann heiße N in G fortsetzbar, wenn jeder irreduzibele Teil N_λ von N in G eine Fortsetzung N_λ^* hat und wenn $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda^* = N^*$ in G analytisch ist, wobei Λ die Indexmenge der irreduzibeln Teile N_λ von N ist. Die analytische Menge N^* heiße die Fortsetzung von N.*

Es sei vermerkt, daß $N^* \cap A$ größer als N sein kann. Außerdem braucht ein N_λ^* nicht irreduzibeler Teil von N^* zu sein, und auch wenn dies der Fall ist, kann $N_\lambda^* = N_\varrho^*$ für $\lambda \neq \varrho$ sein.

Definition 2.3. *Ist N in der offenen Menge A des komplexen Raumes G analytisch, ist N in G fortsetzbar, und ist die Fortsetzung eines jeden irreduzibeln Teiles von N ein irreduzibeler Teil der Fortsetzung N^* von N, so heiße N zerlegungstreu fortsetzbar. Werden bei einer zerlegungstreuen Fortsetzung N^* verschiedene irreduzibele Teile von N in verschiedene irreduzibele Teile von N^* fortgesetzt, so heiße die Fortsetzung zerlegungserhaltend. Gilt für die Fortsetzung N^* die Beziehung $N^* \cap A = N$, so heiße die Fortsetzung eindeutig.*

Eine zerlegungstreue Fortsetzung braucht nicht zerlegungserhaltend zu sein. Nun gilt

Satz 2.2. *Ist N analytisch in der offenen Menge A des komplexen Raumes G und gibt es eine analytische Menge N' in G mit $N' \supseteqq N$ und $N' \cap A = N$, so ist N eindeutig und zerlegungstreu fortsetzbar. Insbesondere ist jede eindeutige Fortsetzung zerlegungstreu ($N' = N^*$).*

Beweis. Seien $N_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ die irreduziblen Teile von N in A und $N'_\varrho (\varrho \in P)$ die irreduzibeln Teile von N' in G. Die irreduzibeln Teile von $N'_\varrho \cap A$ in A seien $N_\varrho^\mu (\mu \in M_\varrho)$. Dann ist $N_\lambda \subseteqq \bigcup\limits_{\varrho \in P} \bigcup\limits_{\mu \in M_\varrho} N_\varrho^\mu$. Also ist $N_\lambda \subseteqq N_\varrho^\mu$ für ein Indexpaar μ, ϱ, woraus $N_\lambda \subseteqq N'_\varrho = N'_{\varrho\lambda}$ folgt. Es gibt eine offene Teilmenge U von A mit $N \cap U = N_\lambda \cap U \neq \emptyset$, und es ist

$$N_\lambda \cap U = N \cap U = N' \cap U \supseteqq N'_{\varrho\lambda} \cap U .$$

Daher ist $\dim N_\lambda \geqq \dim N'_{\varrho\lambda}$, also $\dim N_\lambda = \dim N'_{\varrho\lambda}$. Der irreduzibele Teil $N'_{\varrho\lambda}$ ist die Fortsetzung von N_λ nach Satz 2.1. Die Vereinigung von irreduzibeln Teilen einer analytischen Menge ist wieder analytisch. Daher ist $N^* = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} N'_{\varrho\lambda}$ analytisch und die Fortsetzung von N. Jedes $N'_{\varrho\lambda}$ ist irreduzibeler Teil von N^*. Daher ist die Fortsetzung zerlegungstreu. Es ist

$$N \cap A \subseteqq N^* \cap A \subseteqq N' \cap A = N \cap A .$$

Also gilt $N^* \cap A = N \cap A$. Die Fortsetzung ist eindeutig, w.z.b.w.

Satz 2.3. *Ist N eine rein p-dimensionale analytische Menge in der offenen Menge A des komplexen Raumes G und ist N in einer in G analytischen, p-dimensionalen Menge N' enthalten, so ist N zerlegungstreu fortsetzbar. Die Fortsetzung eines irreduzibeln Teiles von N, also auch jeder irreduzibele Teil von N^*, ist irreduzibeler Teil von N'.*

Beweis. Seien $N_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ die irreduzibeln Teile von N und $N'_\varrho(\varrho \in P)$ die irreduziblen Teile von N'. Dann ist $N_\lambda \subseteq \bigcup_{\varrho \in P} N'_\varrho \cap A$. Also ist N_λ in einem $N'_{\varrho\lambda}$ enthalten, was sich wie im Beweis zu Satz 2.2 ergibt. Da $\dim N'_{\varrho\lambda} \leq p = \dim N_\lambda$ und $N'_{\varrho\lambda} \supseteq N_\lambda$ gilt, folgt zunächst $\dim N'_{\varrho\lambda} = p = \dim N_\lambda$ und es ist $N'_{\varrho\lambda}$ die Fortsetzung von N_λ. Es ist $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} N'_{\varrho\lambda} = N^*$ analytisch und die analytische Fortsetzung von N. Die $N'_{\varrho\lambda}$ bilden die, vielleicht mehrmals aufgeführten, irreduzibeln Teile von N^*; daher ist die Fortsetzung zerlegungstreu, w.z.b.w.

Von besonderem Interesse ist hier der Fall, in dem $M = G - A$ dünn ist. Auch dann braucht eine etwaige Fortsetzung weder eindeutig noch zerlegungstreu zu sein. Man kann jedoch leicht eine Bedingung dafür angeben:

Definition 2.4. *Ist N analytisch in der offenen Teilmenge A des komplexen Raumes G und ist $M = G - A$ dünn, so heiße N frei (von M), wenn es zu jedem Punkt $P \in M$ eine offene Umgebung U von P und eine in U analytische Menge $M_0 \supseteq M \cap U$ gibt, die keinen irreduziblen Teil von $N \cap U$ (als analytische Menge in $U \cap A$) enthält.*

Wie der folgende Satz zeigt, ist dies eine lokale Eigenschaft:

Satz 2.4. *Ist N analytisch und frei in der offenen Teilmenge A von G, ist $M = G - A$ dünn und B eine offene Teilmenge von G, so ist $B \cap N$ frei von $B \cap M$ in B.*

Beweis. Sei $P \in B \cap M$. Eine offene Umgebung U von P und eine in U analytische Menge $M_0 \supseteq M \cap U$ existieren so, daß kein irreduzibler Teil von $N \cap U$ in M_0 enthalten ist. Sei $U_1 = U \cap B$ und $M_1 = M_0 \cap B = M_0 \cap U_1$. Es ist $M_1 \supseteq M \cap U_1$. Angenommen, M_1 enthält einen irreduziblen Teil N_1 von $N \cap B \cap U_1 = N \cap U_1$. Dann gibt es einen irreduziblen Teil N_2 von $N \cap U$ mit $N_2 \supseteq N_1$. Eine offene Menge V von U_1 mit $N \cap B \cap V = N_1 \cap V \neq \emptyset$ existiert. Für diese gilt $N_1 \cap V \subseteq N_2 \cap V \subseteq N \cap V = N \cap B \cap V = N_1 \cap V$, woraus $N_1 \cap V = N_2 \cap V$ folgt. Also ist $\dim N_2 = \dim N_1$ und N_2 die analytische Fortsetzung von N_1 in $U \cap A$. Es ist $N_1 \subseteq M_1 \cap N_2 \cap A \subseteq M_0 \cap N_2 \cap A$ und $M_0 \cap N_2 \cap A$ analytisch in $U \cap A$ und N_2 analytisch und irreduzibel in $U \cap A$. Außerdem ist $\dim N_2 = \dim N_1 \leq \dim M_0 \cap N_2 \cap A \leq \dim N_2$, woraus wegen der Irreduzibilität von N_2 dann $M_0 \cap N_2 \cap A = N_2 = N_2 \cap A$, also $M_0 \supseteq N_2 \cap A = N_2$ folgt. In M_0 liegt also doch ein irreduzibler Teil von $N \cap U$. Widerspruch! Also ist die Annahme falsch und $N \cap B$ frei in B, w.z.b.w.

Für freie analytische Mengen gilt nun:

Satz 2.5. *Ist N analytisch in der offenen Teilmenge A des komplexen Raumes G und frei von der dünnen Menge $M = G - A$, so ist N dann und nur dann fortsetzbar, wenn die abgeschlossene Hülle $\overline{N}$ von N in G analytisch ist.*

Ist dabei N fortsetzbar, so wird die Fortsetzung eines jeden irreduziblen Teiles N_λ von N durch $\overline{N}_\lambda$ gegeben. Die Fortsetzung von N ist $\overline{N}$.

Beweis. a) *Ist $\overline{N}$ analytisch*, so ist $\overline{N} \cap A = N$, da N in A abgeschlossen ist. Daher ist N eindeutig fortsetzbar.

b) *Sei nun N fortsetzbar und N^* die Fortsetzung.* Seien $N_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ die irreduzibeln Teile von N und N^*_λ die Fortsetzung von N_λ. Es ist $N^* = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N^*_\lambda$ und $N = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. Sei $P_0 \in M$ und U eine offene Umgebung von P, in der es eine analytische Menge $M_0 \supseteq M \cap U$ gibt, die keinen irreduzibeln Teil von $N \cap U$ enthält. Die irreduzibeln Teile von $N_\lambda \cap U$ sind irreduzibele Teile von $N \cap U$. Also liegt kein irreduzibeler Teil von $N_\lambda \cap U$ in $M_0 \cap A$. Daher ist $N_\lambda \cap M_0$ in A analytisch und nirgendsdicht auf N_λ mit $\dim N_\lambda \cap M_0 < \dim N_\lambda$. In $U_0 = U - M_0 = U \cap A - M_0$ ist $N_\lambda \cap U_0 = N_\lambda - M_0$ analytisch und reindimensional. In U ist $U \cap N^*_\lambda$ analytisch, reindimensional mit $U \cap N^*_\lambda \supseteq U_0 \cap N_\lambda$ und hat dieselbe Dimension wie $U_0 \cap N_\lambda$. Daher ist die Fortsetzung $\tilde{N}_\lambda$ von $U_0 \cap N_\lambda$ in U vorhanden und zerlegungstreu. Es ist $\tilde{N}_\lambda$ Vereinigung von Fortsetzungen irreduzibler Teile von $U_0 \cap N_\lambda$, wobei jede solche Fortsetzung selbst irreduzibeler Teil von $\tilde{N}_\lambda$ ist. Jeder irreduzibele Teil von $\tilde{N}_\lambda$ ist daher Fortsetzung eines (oder mehrerer) irreduzibeln Teiles von $U_0 \cap N_\lambda$, kann also nicht in M_0 enthalten sein. Es ist $\tilde{N}_\lambda \cap M_0$ nirgendsdicht auf $\tilde{N}_\lambda$ und $\dim \tilde{N}_\lambda \cap M_0 < \dim \tilde{N}_\lambda = \dim N_\lambda \cap U_0$. Es ist $\overline{N}_\lambda \cap U \subseteq \tilde{N}_\lambda$ und N_λ abgeschlossen in $U \cap A$. Also ist $(\overline{N}_\lambda - N_\lambda) \cap U \subseteq \tilde{N}_\lambda \cap M \cap U \subseteq \tilde{N}_\lambda \cap M_0$. In $U - \tilde{N}_\lambda \cap M_0 = U_1$ ist also $N_\lambda \cap U_1$ lokalanalytisch und abgeschlossen, also analytisch. Weil $N_\lambda \cap U_1$ reindimensional und $\dim N_\lambda \cap U_1 > \dim N_\lambda \cap M_0$ ist, wird $N_\lambda \cap U_1$ durch $\overline{N_\lambda \cap U_1} \cap U$ analytisch in U fortgesetzt. Wegen $\dim \tilde{N}_\lambda > \dim \tilde{N}_\lambda \cap M_0$ ist $\tilde{N}_\lambda \cap M_0$ nirgendsdicht auf N_λ, also gilt

$$\overline{N}_\lambda \cap U = \overline{N_\lambda - \tilde{N}_\lambda \cap M_0} \cap U = \overline{U \cap N_\lambda - \tilde{N}_\lambda \cap M_0} \cap U = \overline{N_\lambda \cap U_1} \cap U.$$

Also ist $\overline{N}_\lambda \cap U$ in U analytisch. Folglich ist $\overline{N}_\lambda$ analytisch in G mit $\overline{N}_\lambda \supseteq N_\lambda$, d. h. $N^*_\lambda \subseteq \overline{N}_\lambda$. Weil $N_\lambda \subseteq N^*_\lambda$ und N^*_λ abgeschlossen ist, folgt $\overline{N}_\lambda = N^*_\lambda$.

Da N^* in G abgeschlossen ist mit $N \subseteq N^*$, folgt $\overline{N} \subseteq N^*$. Andererseits ist $N^* = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N^*_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{N}_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{N} = \overline{N} \subseteq N^*$. Also ist $\overline{N} = N^*$ analytisch, w. z. b. w.

Satz 2.6. *Ist N analytisch in der offenen Menge A des komplexen Raumes G, in G fortsetzbar und wird jeder irreduzible Teil N_λ durch seine abgeschlossene Hülle fortgesetzt, so ist $\overline{N}$ die Fortsetzung von N. Diese ist eindeutig und zerlegungserhaltend.*

Beweis. Wie oben folgt, daß die Fortsetzung durch $N^* = \overline{N}$ gegeben wird und folglich eindeutig ist. Ist $\overline{N}_\lambda = \overline{N}_\varrho$, so ist $N_\lambda = A \cap \overline{N}_\lambda = A \cap \overline{N}_\varrho = N_\varrho$, also $\lambda = \varrho$, d. h. die Fortsetzung ist zerlegungserhaltend, w.z.b.w.

Wie bei Funktionen unterscheidet man reguläre und singuläre Randpunkte.

Definition 2.5. *Sei N analytische Teilmenge der offenen Menge A des komplexen Raumes G. Dann heiße ein Punkt $P \in \overline{A} - A$ regulärer Punkt,*

wenn es eine offene Umgebung U von P gibt so, daß sich $U \cap N \cap A$ in U fortsetzen läßt. Andernfalls heiße $P \in \bar{A} - A$ singulärer Punkt.

Eine analytische Menge kann in allen Randpunkten $\bar{A} - A$ von A regulär sein, ohne damit fortsetzbar (in G) zu sein, selbst dann, wenn M dünn von der Dimension p und N rein p-dimensional ist, z. B.:

$$G = C^2 = \{(z_1, z_2) \mid |z_\nu| < \infty\} \qquad \dim G = 2$$

$$M = \left\{\left(z_1, e^{\frac{1}{z_1}}\right) \mid 1 \leq |z_1| \leq 2\right\} \qquad \text{dünn}$$

$$N = \left\{\left(z_1, e^{\frac{1}{z_1}}\right) \mid 2 \leq |z_1|\right\} \qquad \text{analytisch in } A = G - M.$$

Ist aber N frei, so gilt:

Satz 2.7. *Wenn N in der offenen Menge A des komplexen Raumes G analytisch ist, wenn N frei von der dünnen Menge $M = G - A$ und in jedem Punkt von M regulär ist, dann ist N in G fortsetzbar. Die Fortsetzung ist die abgeschlossene Hülle $\bar{N}$.*

Beweis. Zu jedem Punkt $P_0 \in M$ gibt es eine Umgebung U, so daß sich $N \cap U \cap A$ in U fortsetzen läßt. Nach Satz 2.4 ist $N \cap U$ frei von $M \cap U$. Nach Satz 2.5 ist $\overline{N \cap U} \cap U = \bar{N} \cap U$ die Fortsetzung. Also ist $\bar{N}$ in G analytisch und nach Satz 2.5 auch die Fortsetzung von N, w.z.b.w.

Nach Remmert und Stein [11] ist jede in A rein p-dimensionale Menge N durch $\bar{N}$ fortsetzbar, wenn $M = G - A$ analytisch ist und höchstens die Dimension $p - 1$ hat. Daraus folgt, daß sich N bereits dann durch $\bar{N}$ fortsetzen läßt, wenn M dünn von der Dimension $p - 1$ ist. Dann ist nämlich N frei von M und regulär in jedem Punkt von M. Etwas allgemeiner gilt sogar:

Satz 2.8. *Ist N eine analytische Teilmenge der offenen Menge A des komplexen Raumes G, hat N die reine Dimension p und ist $M = G - A$ dünn von der Dimension p und fastdünn von der Dimension $p - 1$, so ist N eindeutig durch $\bar{N}$ fortsetzbar. (N braucht nicht frei von M zu sein)*[6].

Beweis. Zu jedem $P_0 \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von P_0 mit einer in U analytischen Menge M' der reinen Dimension p, die $M \cap U$ umfaßt und in U nur endlich viele irreduzibele Teile $M_1, \ldots, M_r$ hat. Man kann U so klein wählen, daß U als rein n-dimensionale analytische Menge eines Gebietes U_1 des C^t mit $t \geqq n$ aufgefaßt werden kann. In U_1 ist M_ν analytisch, irreduzibel und von der Dimension p. Sei $U' = U - M'$ und $U_1' = U_1 - M'$ und $N' = N \cap U'$. Es ist U' in U_1' analytisch und N' in U_1' ebenfalls analytisch. Es ist $N' = \emptyset$ oder rein p-dimensional. Die Menge $\hat{M}_\nu$ der gewöhnlichen Punkte von M_ν (als analytische Menge in U_1) ist eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension p und $M \cap \hat{M}_\nu$ ist fastdünn von der Dimension $p - 1$ auf $\hat{M}_\nu$, hat daher höchstens die topologische Dimension $2p-2$. Daher ist $\hat{M}_\nu - M = \hat{M}_\nu \cap A$ zusammenhängend und dicht auf M_ν, d. h. $\overline{M_\nu \cap A} \cap U = M_\nu$ und $M_\nu \cap A$ irreduzibel in $U \cap A$. In jedem Punkt von $A \cap M_\nu$ ist N' regulär für $\nu = 1, \ldots, r$. Daher ist N' regulär auf M' und $\bar{N}' \cap U_1 = \bar{N}' \cap U$ die Fortsetzung von N'. Es sind $(U \cap \bar{N}') \cup M'$ und $N \cap U$ rein p-dimensionale analytische Mengen mit $(\bar{N}' \cap U) \cup M' \supseteq N \cap U$. Also

[6]) Im Falle einer freien Menge N wird dieser Satz durch Hilfssatz 6.8 verbessert.

läßt sich $N \cap U$ in U zerlegungstreu fortsetzen. Die Fortsetzung N^* ist die Vereinigung von irreduzibeln Teilen von $(\overline{N}' \cap U) \cup M'$, wobei jeder solche irreduzibele Teil wenigstens einen irreduzibeln Teil von $N \cap U$ fortsetzt. Es ist $N^* \supseteq N'$, also $N^* \supseteq \overline{N}' \cap U$ und $N^* \subseteq (\overline{N}' \cap U) \cup M'$. Daher ist $N^* = (\overline{N}' \cap U) \cup \cup \bigcup_{\sigma=1}^{s} M_{\varrho_\sigma}$, wobei jedes M_{ϱ_σ} einen irreduzibeln Teil N_{λ_σ} von $N \cap U$ enthält. Nun sind N_{λ_σ} und $M_{\varrho_\sigma} \cap A$ irreduzibel und p-dimensional mit $N_{\lambda_\sigma} \subseteq M_{\varrho_\sigma} \cap A$. Daher ist $N_{\lambda_\sigma} = M_{\varrho_\sigma} \cap A$. Es folgt

$$N^* \supseteq \overline{N} \cap U \supseteq (\overline{N}' \cap U) \cup \left(\bigcup_{\sigma=1}^{s} \overline{N}_{\lambda_\sigma} \cap U\right) = (\overline{N}' \cap U) \cup \left(\bigcup_{\sigma=1}^{s} \overline{M_{\varrho_\sigma} \cap A} \cap U\right)$$
$$= (\overline{N}' \cap U) \cup \bigcup_{\sigma=1}^{s} M_{\varrho_\sigma} = N^* .$$

Also ist $N^* = \overline{N} \cap U$. Es ist $\overline{N}$ analytisch und folglich die Fortsetzung von N. Die Fortsetzung ist eindeutig wegen $\overline{N} \cap A = N$. Der Satz ist bewiesen.

Ist M dünn von der Dimension p und nicht fastdünn von der Dimension $p-1$, so gilt immer noch der Satz von REMMERT und STEIN [11]:

Satz 2.9. *Ist N analytisch in der offenen Teilmenge A des komplexen Raumes G, hat N die reine Dimension p und ist $M = G - A$ dünn von der Dimension p, so ist N entweder regulär in jedem Punkt von N oder die singulären Punkte formen eine rein p-dimensionale analytische Menge S in G.*

Beweis. Zu jedem Punkt $P_0 \in S$ gibt es eine offene Umgebung U mit einer in U analytischen Menge M' der reinen Dimension p, die $M \cap U$ umfaßt. In $U' = U - M'$ ist $N' = N \cap U'$ analytisch. Sei S' die Menge der Singularitäten von N' in U. Es ist $S' \subseteq M'$. Ist $P \in U - S'$, so gibt es eine Umgebung V von P in U so, daß $\overline{N}' \cap V$ in V analytisch ist. Es ist $(\overline{N}' \cup M') \cap V$ analytisch und höchstens p-dimensional und umfaßt $N \cap V$, also ist $N \cap V$ analytisch in V fortsetzbar; d. h. N ist in P regulär. Ist $P \in U - S$, so gibt es eine Umgebung V von P so, daß $N \cap V$ durch eine rein p-dimensionale analytische Menge N^* in V fortsetzbar ist. Also ist $N' \subseteq N \cap V \subseteq N^*$ ebenfalls in V fortsetzbar, d. h. N' ist in P regulär. Folglich ergibt sich $U \cap S = S'$. Wegen $P_0 \in U \cap S$ ist $S' \neq \emptyset$. Daher ist S' analytisch und rein p-dimensional. Also ist S analytisch und rein p-dimensional, w.z.b.w.

Da N nicht frei zu sein braucht, kann es vorkommen, daß sich N nicht fortsetzen läßt, obwohl S leer ist, oder daß sich N zwar fortsetzen läßt, aber die Fortsetzung nicht durch $\overline{N}$ gegeben wird.

Der Graph einer holomorphen Abbildung mit dünnen Singularitäten ist frei:

Satz 2.10. *Sei $\tau: A \to H$ eine holomorphe Abbildung der offenen Teilmenge A des komplexen Raumes G in den komplexen Raum H. Die Ausnahmemenge $M = G - A$ sei dünn. Dann ist der Graph $T = \{(P, \tau(P)) \mid P \in A\}$, der ja in $A \times H$ analytisch ist, frei von der dünnen Menge $M \times H$.*

Beweis. Zu jedem Punkt $(P_0, Q_0) \in M \cap H$ gibt es eine offene Umgebung U von P_0 (in G) mit einer in U analytischen, nirgendsdichten Menge $M_0 \supseteq M \cap U$. Es ist $(M \cap U) \times H \subseteq M_0 \times H$ und $M_0 \times H$ analytisch und nirgendsdicht in $U \times H$. Daher ist $M \times H$ dünn. Darüber hinaus ist $T \cap (M_0 \times H)$

$= \{(P, \tau(P)) \mid P \in M_0 \cap A\}$ nirgendsdicht auf T, enthält also keinen irreduzibeln Teil von $\overline{T} \cap (U \times H)$. Daher ist $\overline{T}$ frei von $M \times H$, w.z.b.w.

Man kann also die vorhergehenden Sätze über die Fortsetzung freier analytischer Mengen auf den Graphen T anwenden. Es gilt:

Satz 2.11. *Sei $\tau: A \to H$ eine holomorphe Abbildung der offenen Teilmenge A des komplexen Raumes G in den komplexen Raum H. Die Ausnahmemenge $M = G - A$ sei dünn. Der Graph $T = \{(P, \tau(P)) \mid P \in A\}$ ist dann und nur dann in $G \times H$ analytisch fortsetzbar, wenn $\overline{T}$ analytisch ist. In diesem Falle gilt:*

1. *Sind $G_\nu (\nu \in N)$ die Zusammenhangskomponenten von G, so sind $A_\nu = A \cap G_\nu$ die Zusammenhangskomponenten von A. Die irreduzibeln Teile von T sind $T_\nu = \{(P, \tau(P)) \mid P \in A_\nu\}$. Die irreduzibeln Teile von $\overline{T}$ sind $\overline{T}_\nu = \overline{T} \cap \cap (G_\nu \times H)$.*

2. *Die Fortsetzung $\overline{T}$ ist eindeutig und zerlegungserhaltend.*

3. *Auf $\overline{T}$ ist $\overline{T} \cap (M \times H)$ dünn, d. h. zu jedem Punkt $(P_0, Q_0) \in \overline{T}$ gibt es eine offene Umgebung W von (P_0, Q_0) und eine in W analytische Menge F mit $W \cap \overline{T} \cap (M \times H) \subseteq F \subsetneq \overline{T} \times W$ und $\dim_{(P,Q)} \overline{T} \cap W > \dim_{(P,Q)} F$ für $(P, Q) \in \overline{T} \cap W$.*

Beweis. a) *Seit T fortsetzbar.* Da T frei ist, wird T durch $\overline{T}$ fortgesetzt und $\overline{T}$ ist also analytisch.

b) *Sei $\overline{T}$ analytisch.* Nach Satz 2.5 ist T fortsetzbar und die Fortsetzung eines jeden irreduzibeln Teiles T' von T wird durch $\overline{T'}$ gegeben. Die Fortsetzung ist eindeutig und zerlegungserhaltend nach Satz 2.6. Da M nirgends zerlegt, sind die A_ν die Zusammenhangskomponenten von A. Also ist T_ν irreduzible analytische Menge in $A_\nu \times H$. Wegen $T_\nu = \overline{T}_\nu \cap (A \times H)$ ist T_ν irreduzibele analytische Menge in $A \times H$ mit $T_\nu \cap T_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$ und $\bigcup_{\nu \in N} T_\nu = T$. Also sind die Mengen $T_\nu (\nu \in N)$ die irreduzibeln Teile von T. Da die Fortsetzung von T eindeutig und zerlegungserhaltend ist, sind $\overline{T}_\nu$ die irreduzibeln Teile von $\overline{T}$, wobei $\overline{T}_\nu$ die Fortsetzung von T_ν ist. Die Aussage 1 und 2 sind bewiesen.

c) *Sei* $(P_0, Q_0) \in \overline{T} \cap (M \times H)$. Eine zusammenhängende offene Umgebung U von P_0 mit einer in U dünnen analytischen Menge $M_0 \supseteq M \cap U$ existiert. Es ist $\overline{T} \cap (M_0 \times H)$ analytisch. Angenommen, $\dim \overline{T} \cap (M_0 \times H) = n = \dim U$. Dann enthält $\overline{T} \cap (M_0 \times H)$ einen irreduzibeln Teil von $(U \times H) \cap \overline{T}$. Da aber $(U \times H) \cap \overline{T}$ die Fortsetzung des Graphen $T \cap (U \times H)$ von $\tau \mid U \cap A$ und $U \cap A$ zusammenhängend ist, ergibt sich aus Aussage 1, daß $\overline{T} \cap (U \times H)$ irreduzibel ist. Daher ist $\overline{T} \cap (U \times H) = \overline{T} \cap (M_0 \times H)$, d. h. $M_0 \supseteq U \cap A$, was falsch ist. Daher ist $\dim \overline{T} \cap (M_0 \times H) < n = \dim_{(P,Q)} \overline{T} \cap (U \times H)$ für jedes $(P, Q) \in \overline{T} \cap (U \times H)$, w.z.b.w.

Der Graph T ist nicht notwendig ein komplexer Teilraum. Selbst nicht im Falle einer meromorphen Funktion. Das folgende Beispiel wurde dafür von H. Grauert angegeben:

$$G = C^2 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < \infty,\ |z_2| < \infty\},$$
$$M = \{(0, 0)\},\ A = G - M$$
$$H = P^1 \text{ (Riemannsche Zahlenkugel)}$$
$$\tau(z_1, z_2) = (z_1^2 : z_2^2).$$

Sind ζ_1, ζ_2 homogene Koordinaten auf P^1, so wird der Graph $\bar{T}$ gegeben durch

$$\bar{T} = \{(z_1, z_2, \zeta_1 : \zeta_2) \mid z_1^2\, \zeta_2 - z_2^2\, \zeta_1 = 0\} \supseteq M \times P^1 .$$

In jedem Punkt $(0, 0, \zeta_1 : \zeta_2)$ mit $(\zeta_1 : \zeta_2) \neq 0, \infty$ ist $\bar{T}$ (lokal) reduzibel wegen

$$z_1^2\, \zeta_2 - z_2^2\, \zeta_1 = (z_1 \sqrt{\zeta_2} - z_2 \sqrt{\zeta_1})\, (z_1 \sqrt{\zeta_2} + z_2 \sqrt{\zeta_1}) ,$$

in $(0, 0, 0)$ und $(0, 0, \infty)$ ist $\bar{T}$ lokalirreduzibel. Wäre aber $\bar{T}$ ein komplexer Teilraum, so wäre er als lokalanalytische Menge lokalirreduzibel[7]).

§ 3. Meromorphe Abbildungen

In der Literatur finden sich zwei Definitionen einer meromorphen Abbildung. Die eine Definition nach REMMERT [13] geht davon aus, daß der Graph einer holomorphen Abbildung eine analytische Menge im Produktraum ist. Dies legt es nahe, eine Abbildung mit dünnen Singularitäten meromorph zu nennen, wenn sich der Graph T zu einer analytischen Menge fortsetzen läßt. Die Fortsetzung ist notwendigerweise $\bar{T}$. Dieser so definierte Begriff der Meromorphie werde R-Meromorphie genannt. Wie in § 1 und den folgenden Paragraphen werden die Standardbezeichnungen gewählt:

A ist eine offene Teilmenge des komplexen Raumes G mit dünner Ausnahmemenge $M = G - A$. Eine holomorphe Abbildung τ von A in einen komplexen Raum H ist gegeben. Dann werde definiert:

Definition 3.1. *Die Abbildung τ habe den Graphen $T = \{(P, \tau(P)) \mid P \in A\}$ über A. Die abgeschlossene Hülle $\bar{T}$ von T in $G \times H$ heiße der Graph von τ. Die Abbildung τ heiße im Punkte $P_0 \in M$ meromorph im Sinne von* REMMERT *(R-meromorph), wenn es eine offene Umgebung U von P_0 gibt, für die $(U \times H) \cap \bar{T}$ eine in $U \times H$ analytische Menge ist. Ist τ in P_0 nicht R-meromorph, so heiße τ dort R-singulär (wesentlich singulär im Sinne von* REMMERT*). Die Abbildung τ heiße in $P_0 \in M$ stark R-meromorph (SR-meromorph), wenn $(\{P_0\} \times H) \cap \bar{T}$ kompakt, nicht leer und τ in P_0 R-meromorph ist. Wenn τ in P_0 nicht SR-meromorph ist, so heiße τ dort SR-singulär. In $N \subseteq M$ heiße τ R-meromorph (bzw. SR-meromorph), wenn τ in jedem Punkt von N R-meromorph (bzw. SR-meromorph) ist. Die Abbildung τ heiße R-meromorph (bzw. SR-meromorph), wenn sie es in G ist. In $N \subseteq M$ heiße τ R-singulär (bzw. SR-singulär), wenn sie es in einem Punkt von N ist.*

Die Abbildung τ ist also in P_0 genau dann R-meromorph, wenn für eine offene Umgebung U von P_0 sich T über $(U \cap M) \times H$ fortsetzen läßt, d. h. wenn T in jedem Punkt von $(M \cap U) \times H$ regulär ist. REMMERT führt in [13] als „meromorph" nur den Begriff „SR-meromorph" ein[8]). Offensichtlich ist τ dann und nur dann SR-meromorph, wenn τ lückenlos und meromorph ist, weil dann $\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0) = (\{P_0\} \times H) \cap \bar{T} \neq \emptyset$ und kompakt für jedes $P_0 \in M$ ist. Dies gilt aber auch lokal:

---

[7]) Dies ist ein Gegenbeispiel zu REMMERT [13] Satz 33. Der Beweis der lokalen Irreduzibilität des Graphen ist dort nicht stichhaltig.

[8]) Bei REMMERT wird noch die lokale Irreduzibilität gefordert, was zu eng ist, wie das Beispiel am Ende von § 2 zeigt.

Satz 3.1. *Die Abbildung τ ist in $P_0 \in M$ dann und nur dann SR-meromorph, wenn es eine Umgebung U von P_0 gibt, so daß die auf $U \cap A$ beschränkte Abbildung $\tau \mid U \cap A$ in U lückenlos und R-meromorph ist.*

Beweis. Ist $\tau \mid U \cap A$ in U lückenlos und R-meromorph, so ist $\bar{T} \cap (U \times H)$ analytisch und $(\{P_0\} \times H) \cap \bar{T} = \{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0) \neq \theta$ kompakt, also ist τ in P_0 SR-meromorph.

Ist τ in P_0 SR-meromorph, so gibt es eine Umgebung U von P_0 so, daß $\bar{T} \cap (U \times H)$ in $U \times H$ analytisch ist und $\Sigma_\tau(P_0)$ nicht leer und kompakt ist. Sei V eine relativ kompakte, offene Umgebung von $\Sigma_\tau(P_0)$. Dann ist $U \times V$ eine Umgebung von $\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0)$. Angenommen, es gibt eine Folge $P^\nu \in U$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0$ und $(P^\nu, Q^\nu) \in \bar{T} - (U \times V)$. Dann gibt es Folgen $P^\nu_\mu \in U \cap A$ mit $\lim\limits_{\mu \to \infty}(P^\nu_\mu, \tau(P^\nu_\mu)) = (P^\nu, Q^\nu)$. Sei ϱ eine Metrik auf G und σ eine auf H. Dann sei μ_ν so gewählt, daß gilt

$$\varrho(P^\nu_{\mu_\nu}, P^\nu) < \frac{1}{\nu} \qquad \sigma(\tau(P^\nu_{\mu_\nu}), Q^\nu) < \frac{1}{\nu}.$$

Es strebt $\tilde{P}_\nu = P^\nu_{\mu_\nu} \to P_0$ für $\nu \to \infty$. Also gibt es eine Teilfolge ν_λ so, daß $\tilde{P}_{\nu_\lambda} \to P_0$ für $\nu \to \infty$ und $\tau(\tilde{P}_{\nu_\lambda}) \to Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$ für $\lambda \to \infty$ strebt, da $\Sigma_\tau(P_0)$ kompakt ist (Satz 1.2). Also strebt $Q^{\nu_\lambda} \to Q_0$ für $\lambda \to \infty$. Das heißt $(P^{\nu_\lambda}, Q^{\nu_\lambda}) \in \in U \times V$ für $\lambda \geqq \lambda_0$. Also war die Annahme falsch. Es gibt eine Umgebung $U_1 \subseteq U$ von P_0 mit $(U_1 \times H) \cap \bar{T} \subseteq \bar{T} \cap (\bar{U} \times \bar{V})$. Weil $\bar{V}$ kompakt ist, ist auch $\{P\} \times \Sigma_\tau(P) = (\{P\} \times H) \cap \bar{T} \subseteq \{P\} \times \bar{V}$ kompakt, d. h. $\tau \mid U \cap V$ ist lückenlos, w. z. b.w.

Eine zweite Definition der Meromorphie geht von der folgenden Überlegung aus. Eine meromorphe Funktion f induziert auf jeder eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit L, die die Unbestimmtheitsstellen von f nur in endlich vielen Punkten schneidet, eine meromorphe Funktion $f \mid L$. Eine meromorphe Funktion auf einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit L definiert aber eine holomorphe Abbildung von L in die Zahlenkugel. Diese Eigenschaft ist auch hinreichend für die Meromorphie einer holomorphen Funktion mit dünnen Singularitäten. Daher definiert man:

Definition 3.2. *Die Abbildung τ heiße in P_0 schwach meromorph, wenn es eine offene Umgebung U von P_0 gibt, so daß $\Sigma_\tau(P, L)$ höchstens aus einem Punkt besteht, für jedes $P \in M \cap U$ und für jede eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit $L \subseteq G$ mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P\}$. Ist dabei $\Sigma_\tau(P, L) \neq \theta$ für jedes solche $P \in M \cap U$ und L, so heiße τ in P_0 meromorph. In $N \subseteq M$ heiße τ meromorph (schwach meromorph), wenn es in jedem Punkt von N ist. Es heiße τ meromorph (bzw. schwach meromorph), wenn es τ in M ist. Ist τ in $P_0 \in M$ nicht meromorph (bzw. schwach meromorph), so heiße τ in P_0 wesentlich singulär (W-singulär) (bzw. schwach W-singulär). Ist τ in einem Punkt von $N \subseteq M$ W-singulär (schwach W-singulär), so heiße τ in N W-singulär (schwach W-singulär).*

Die Abbildung τ ist also meromorph, wenn die Beschränkung auf „jede" eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit holomorph ist.

Satz 3.2. *Die Abbildung τ ist dann und nur dann meromorph, wenn τ lückenfrei und schwach meromorph ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn τ schwach meromorph und entlang jeder eindimensionalen komplexen Teilmannigfaltigkeit L von G mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$ lückenlos ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn für jedes solche L auch $\tau(P) \to Q_0$ für $P \to P_0$ mit $P \in L \cap A$ strebt, d. h. wenn $\tau \mid L \cap A$ in P_0 regulär ist.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition sowie den Sätzen 1.2, 1.4 und 1.6.

Nun wird man nach dem Verhältnis zwischen Meromorphie und R-Meromorphie fragen: Die *Hauptvermutung* ist:

I. *Die Abbildung τ ist (in $P_0 \in M$) dann und nur dann R-meromorph, wenn τ (in P_0) schwach meromorph ist.*

Eine R-meromorphe Abbildung braucht nicht lückenfrei zu sein. Jedoch wird man für lückenfreie Abbildungen vermuten:

II. *Eine lückenfreie Abbildung τ ist (in $P_0 \in M$) dann und nur dann R-meromorph, wenn sie meromorph ist.*

Eine lückenfreie Abbildung braucht nicht lückenlos zu sein, selbst wenn sie R-meromorph ist. Für lückenlose Abbildungen wird man vermuten:

III. *Eine lückenlose Abbildung ist dann und nur dann (in P_0) SR-meromorph, wenn sie meromorph (in P_0) ist.*

Ist der Bildraum H kompakt, so fallen die Begriffe schwach meromorph und meromorph, sowie SR-meromorph und R-meromorph zusammen. Man wird daher vermuten:

IV. *Eine Abbildung in einen kompakten Bildraum H ist dann und nur dann (in $P_0 \in M$) R-meromorph, wenn sie meromorph ist.*

Keine der Vermutungen I bis IV wird bewiesen werden. Nur in einigen Spezialfällen wird es gelingen, einen Teil dieser Vermutungen zu beweisen. Die Hauptschwierigkeit ist, daß man im allgemeinen den Graphen über eine höherdimensionale analytische Menge fortsetzen muß. Dafür gibt es aber keine brauchbaren Kriterien. In dieser Arbeit werden einige „Tricks" angewandt, um das Problem in gewissen Fällen auf die Fortsetzung analytischer Mengen über gleich- oder niederdimensionaler analytischer Mengen zurückzuführen. Das gibt nur Teilergebnisse. Die eine Seite der Vermutungen I bis IV ist trivial:

Satz 3.3. *Ist τ in $P_0 \in M$ R-meromorph, so ist τ in P_0 schwach meromorph.*

Beweis. Sei T der Graph von τ über A und $\bar{T}$ die abgeschlossene Hülle von T. Eine offene Umgebung U von P_0 werde gewählt, für die $(U \times H) \cap \bar{T}$ analytisch in $U \times H$ ist. Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_1\}$ und $P_1 \in U$. In der offenen Menge $U_1 = U - (\bar{L} - L)$ ist P_1 enthalten. Es ist $U_1 \cap M = U \cap M$ und $\Sigma_\tau(P_1, L) = \Sigma_\tau(P_1, U_1 \cap L)$. Sei $T_1 = T \cap (U_1 \times H)$. Es ist $\bar{T}_1 \cap (U_1 \times H) = \bar{T} \cap (U_1 \times H)$ analytisch in $U_1 \times H$. Sei $\psi : \bar{T}_1 \to U_1$ die Projektion $\psi(P, Q) = P$. Dann ist $\tilde{L} = \psi^{-1}(L)$ analytisch in $U_1 \times H$ und in $\bar{T}_1 \cap (U_1 \times H)$ enthalten. Die Menge

$$L' = [(U_1 \cap A) \times H] \cap \tilde{L} = \{(P, \tau(P)) \mid P \in L \cap A \cap U_1\}$$

ist rein eindimensional und analytisch in $(U_1 \cap A) \times H$, läßt sich also durch eine rein eindimensionale analytische Menge L^* über die dünne Menge $(U_1 \cap M) \times H$ in $U_1 \times H$ fortsetzen. Die irreduzibeln Teile von L^* entstehen durch Fortsetzung irreduzibeler Teile von L', also ist kein irreduzibeler Teil von L^* in $\psi^{-1}(P_1)$ enthalten. Daher ist $L^* \cap \psi^{-1}(P_1)$ eine höchstens nulldimensionale analytische Menge. Ist $Q_1 \in \Sigma_\tau(P_1, L)$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in L \cap A$ mit $\lim_{\nu\to\infty} (P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_1, Q_1)$. Es ist $(P^\nu, \tau(P^\nu)) \in L'$, also $(P_1, Q_1) \in \psi^{-1}(P_1) \cap \bar{L}^* = \psi^{-1}(P_1) \cap L^*$. Daher besteht $\Sigma_\tau(P_1, L)$ höchstens aus abzählbar vielen Punkten, also nach Satz 1.4 aus höchstens einem Punkt, w.z.b.w.

Zwei hintereinander ausgeführte meromorphe Abbildungen definieren eine meromorphe Abbildung:

Satz 3.4. *Sei A_ν eine offene Teilmenge des komplexen Raumes G_ν und $M_\nu = G_\nu - A_\nu$ dünn für $\nu = 1,2$. Die Abbildung $\tau_\nu : A_\nu \to G_{\nu+1}$ sei holomorph und meromorph auf G_ν für $\nu = 1,2$. In G_1 sei $M = \tau_1^{-1}(M_2) \cup M_1$ dünn. Dann ist $\tau_3 = \tau_2\tau_1 : A = G_1 - M \to G_3$ holomorph und meromorph in G_1.*

Zusatz. *Ist τ_1 meromorph, aber τ_2 nur schwach meromorph, so ist τ_3 schwach meromorph.*

Beweis. Da M_2 abgeschlossen ist, ist $\tau_1^{-1}(M_2)$ in A_1 abgeschlossen, also M in G_1 abgeschlossen, d. h. A ist offen. Es ist $\tau_1(A) \in G_2 - M_2 = A_2$. Also ist $\tau_3 = \tau_2\tau_1$ auf A definiert und holomorph. Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$. Bei geeigneter Wahl der offenen Umgebung U von P_0 kann man eine eineindeutige holomorphe Abbildung λ des Einheitskreises $E = \{z \mid |z| < 1\}$ auf $U \cap L = U \cap \bar{L}$ mit $\lambda(0) = P_0$ finden. Ist Q_0 das einzige Element von $\Sigma_{\tau_1}(P_0, L)$, so wird eine holomorphe Abbildung $\mu : E \to G_2$ definiert durch

$$\mu(z) = \begin{cases} \tau_1\lambda(z) & \text{für } 0 < |z| < 1 \\ Q_0 & \text{für } z = 0\,. \end{cases}$$

1. Fall. Für $|z| < 1$ ist $\mu(z) = Q_0$. Wegen $Q_0 = \mu\left(\frac{1}{2}\right) = \tau_1\lambda\left(\frac{1}{2}\right) \in \tau_1(A) \subseteq A_2$ ist $\tau_2(Q_0) = \tau_2\tau_1\lambda(z) = \tau_3\lambda(z)$ für $0 < |z| < 1$. Das heißt $\tau_3(P) = \tau_2(Q_0)$ für $P \in U \cap L$. Also ist $\tau_2(Q_0)$ der einzige Punkt von $\Sigma_{\tau_3}(P_0, L)$.

2. Fall. Es ist $\mu(z)$ nicht konstant. Eine offene Umgebung E' des Nullpunktes mit $\bar{E}' \subseteq E$ existiert, für die $\tilde{L} = \mu(E')$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Für $0 < |z| < 1$ ist $\mu(z) \in \tau_1(A) \subseteq A_2$, d. h. $\tilde{L} \cap M_2 = \bar{\tilde{L}} \cap M_2$. Sei nun $R_0 \in \Sigma_{\tau_3}(P_0, L)$. Dann gibt es eine Folge $P^\nu \in L \cap A$ mit $\lim_{\nu\to\infty} (P^\nu, \tau_3(P^\nu)) = (P_0, R_0)$. Für $\nu \geqq \nu_0$ ist $P^\nu \in L \cap A$ und $\tau_1(P^\nu) \in \tilde{L} \cap A_2$. Ist $Q_0 \in A_2$, so ist $R_0 = \lim_{\nu\to\infty} \tau_2\tau_1(P^\nu) = \tau_2(Q_0)$, also besteht $\Sigma_{\tau_3}(P_0, L)$ höchstens aus einem Punkt, nämlich $\tau_2(Q_0)$. Ist $Q_0 \in M_2$, so ist $R_0 = \lim_{\nu\to\infty} \tau_2\tau_1(P^\nu)$ mit $\tau_1(P^\nu) \in L \cap A$ für $\nu \geqq \nu_0$. Also ist $R_0 \in \Sigma_{\tau_2}(Q_0, \tilde{L})$, d. h. $\Sigma_{\tau_3}(P_0, L)$ besteht höchstens aus einem Punkt, nämlich dem Punkt von $\Sigma_{\tau_2}(Q_0, \tilde{L})$. Es folgt, daß τ_3 schwach meromorph ist. Bisher wurde von τ_2 nur die schwache Meromorphie benutzt, also gilt der Zusatz.

Ist τ_2 meromorph, so werde eine Folge $P^\nu \in L \cap A$ mit $\lim_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0$ gewählt. Es strebt $\tau_1(P^\nu) \to Q_0$ für $\nu \to \infty$. Ist $Q_0 \in A_2$, so strebt $\tau_3(P^\nu) = \tau_2\tau_1(P^\nu) \to \to \tau_2(Q_0)$ für $\nu \to \infty$. Also ist $\Sigma_{\tau_3}(P_0, L) \neq 0$. Ist $Q_0 \in M_2$, so strebt $\tau_3(P^\nu) = \tau_2\tau_1(P^\nu) \to R_0$ für $\nu \to \infty$, wobei R_0 der Punkt von $\Sigma_{\tau_2}(Q_0, \tilde{L})$ ist. Daher ist $\Sigma_{\tau_3}(P_0, L) \neq 0$. Die Abbildung τ_3 ist meromorph, w.z.b.w.

Die Aussage wird falsch, wenn τ_1 schwach meromorph ist, ja sogar, wenn dabei τ_2 holomorph auf G_2 ist. Zum Beispiel seien

$$G_1 = G_3 = C^2,\ A_1 = A_2 = A_3 = G_2 = \{(z_1, z_2) \mid z_2 \neq 0\}$$

$$\tau_1(z_1, z_2) = \left(z_1 + e^{\frac{1}{z_1}}, z_2\right) \qquad \tau_1 : A_1 \to A_2 = G_2 \text{ (auf)}$$

$$\tau_2(w_1, w_2) = (w_1, w_2) \qquad \tau_2 : G_2 \to G_3 = G_1 \text{ (in)}$$

$$\tau_3(z_1, z_2) = \tau_1(z_1, z_2) \qquad \tau_3 : A_1 \to G_3 = G_1\,.$$

Die Abbildung τ_3 ist wesentlich singulär und R-singulär in jedem Punkt von $M = G_3 - A_3$, während τ_1 schwach meromorph, ja sogar R-meromorph und τ_2 holomorph ist.

Ein entsprechender Satz gilt für SR-meromorphe Abbildungen:

Satz 3.5. *Sei A_ν eine offene Teilmenge des komplexen Raumes G_ν und $M_\nu = G_\nu - A_\nu$ dünn für $\nu = 1, 2$. Die Abbildung $\tau_\nu : A_\nu \to G_{\nu+1}$ sei holomorph und R-meromorph auf G_ν für $\nu = 1, 2$. Die Abbildung τ_1 sei sogar SR-meromorph (d. h. lückenlos und R-meromorph). In G_1 sei $M = \tau_1^{-1}(M_2) \cup M_1$ dünn. Dann ist $\tau_3 = \tau_2\tau_1 : A = G_1 - M \to G_3$ holomorph und R-meromorph. Ist auch noch τ_2 SR-meromorph, so auch τ_3.*

Beweis. Sei $\bar{T}_\nu$ der Graph von τ_ν. In $G_1 \times G_2 \times G_3$ ist $T = (\bar{T}_1 \times G_3) \cap \cap (G_1 \times \bar{T}_2)$ analytisch. Sei $\chi : T \to G_1 \times G_3$ die natürliche Projektion, definiert durch $\chi(P, Q, R) = (P, R)$, und seien

$$\psi_1 : \bar{T}_1 \to G_1 \quad \text{durch } \psi_1(P, Q) = P$$

$$\psi_3 : G_1 \times G_3 \to G_1 \quad \text{durch } \psi_3(P, R) = P$$

$$\varphi_3 : G_1 \times G_3 \to G_3 \quad \text{durch } \varphi_3(P, R) = R$$

definiert. Sei $K \subseteq G_1 \times G_3$ kompakt; dann sind $\psi_3(K) = K'$ und $\varphi_3(K) = K''$ kompakt mit $K \subseteq K' \times K''$. Da τ_1 lückenlos ist, ist ψ_1 eigentlich, also $\psi_1^{-1}(K') = (K' \times G_2) \cap \bar{T}_1$ kompakt. Daher ist die abgeschlossene Teilmenge $\chi^{-1}(K) = K_0$ von T enthalten in

$$K_0 \subseteq (K' \times G_2 \times K'') \cap (\bar{T}_1 \times G_3) \cap (G_1 \times \bar{T}_2)$$

$$\subseteq [(K' \times G_2) \cap \bar{T}_1] \times K'' = \psi_1^{-1}(K') \times K'' = K'''.$$

Da K''' kompakt und K_0 abgeschlossen ist, folgt die Kompaktheit von K_0. Daher ist die Abbildung $\chi : T \to G_1 \times G_3$ eigentlich und holomorph. Somit ist $\chi(T) = T'$ in $G_1 \times G_3$ analytisch. Nun wird $T' \cap (A \times G_3) = T_3$ behauptet. Ist $(P, R) \in T' \cap (A \times G_3)$, so gibt es ein $Q \in G_2$ mit $(P, Q, R) \in T \cap (A \times \times G_2 \times G_3)$. Nach Definition von T ist $(P, Q) \in \bar{T}_1 \cap (A \times G_2) = T_1 \cap (A \times G_2)$, d. h. $P \in A$ und $Q = \tau_1(P) \in A_2$. Ebenso ist $(Q, R) \in \bar{T}_2 \cap (A_2 \times G_3) = T_2$, also $R = \tau_2(Q) = \tau_2\tau_1(P) = \tau_3(P)$, d. h. $(P, R) \in T_3$. Ist nun umgekehrt $(P, R) \in T_3$, so ist $P \in A$ und $R = \tau_3(P) = \tau_2\tau_1(P)$. Es ist $(P, \tau_1(P), R) = (P, \tau_1(P),$

$\tau_2\tau_1(P)) \in (T_1 \times G_3) \cap (G_1 \times T_2) \subseteq T$, also $(P, R) \in \chi(T) = T'$. Man erhält $T' \cap (A \times G_3) = T_3$. Da T' in $G_1 \times G_3$ analytisch ist, läßt sich T_3 eindeutig fortsetzen. Da T_3 frei von der dünnen Menge $M \times G_3$ ist, wird die Fortsetzung durch $\bar{T}_3$ gegeben. Also ist $\bar{T}_3$ analytisch und folglich τ_3 R-meromorph.

Ist auch noch τ_2 lückenlos und ist $P^\nu \in A$ eine Folge mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0 \in M$, so gibt es eine — wieder mit P^ν bezeichnete — Teilfolge, für die $\tau_1(P^\nu)$ konvergiert. Da $\tau_1(P^\nu) \in A_2$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty}\tau_2(P^\nu) = Q_0$ ist, gibt es im Falle $Q_0 \in M_2$ eine Teilfolge $\tau_2(P^{\nu\mu})$ mit $\lim\limits_{\mu\to\infty} \tau_2\tau_1(P^{\nu\mu}) = R_0$. Ist aber $Q_0 \in A_2$, so strebt $\tau_2\tau_1(P^\nu) \to \tau_2(Q_0)$ für $\nu \to \infty$. Also ist $\tau_3 = \tau_2\tau_1$ lückenlos und somit SR-meromorph, w.z.b.w.

Der Satz wird falsch, wenn τ_1 nicht lückenlos ist. Man kann nun nach der Gestalt der singulären Stellen fragen. Es seien: S die Menge der (nichthebbaren) singulären Stellen von τ, in denen τ also nicht regulär ist, S_{SR} die Menge der SR-singulären Stellen von τ und S_R die Menge der R-Singularitäten. Die Menge der wesentlichen Singularitäten sei S_W und die der schwach wesentlich singulären Stellen sei S_{SW}. Es ist

$$S \supseteq S_{SR} \supseteq S_R \supseteq S_{SW},$$
$$S \supseteq S_W \supseteq S_{SW}.$$

Man kann nun nach der Gestalt dieser Mengen fragen. Treten Lücken auf, so kann S „jede" Gestalt annehmen. Ist nämlich $N \subseteq M$ abgeschlossen, so sei $H = G - N$ und $\tau(P) = P$ die identische Abbildung $\tau: A \to H$. Jeder Punkt von N ist eine Lücke. Also ist $S = N$. Für meromorphe Abbildungen gilt aber:

Satz 3.6. *Die Menge S der singulären Stellen einer meromorphen Abbildung τ ist fastdünn von der Codimension 2.*

Beweis. Fall 1. *Es seien*

$$G = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = (z_1, \ldots, z_n) \text{ mit } |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$$
$$A = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \in G,\ z_n \neq 0\}$$
$$M = G - A.$$

Zur Abkürzung werde $\mathfrak{x} = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ und $y = z_n$ gesetzt. Zu jedem Punkt $Q \in H$ gibt es eine Umgebung U mit einer umkehrbar holomorphen Abbildung $\psi: U \to U'$ auf einen komplexen Teilraum U' des C^t. Sei V eine offene, relative kompakte Umgebung von $Q \in H$ mit $\bar{V} \subseteq U$. Dann ist $\psi(V) = V'$ offen auf U' und $\bar{V}' = \psi(\bar{V}) \subseteq U'$ kompakt. Man kann eine abzählbare Überdeckung U_i solcher Umgebungen so wählen, daß $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i = H$ ist. Die zugehörigen U', t, V, V', ψ werden mit $U'_i, t_i, V_i, V'_i, \psi_i$ bezeichnet. Seien $X_i = \tau^{-1}(U_i)$ und $Y_i = \tau^{-1}(V_i)$. Es ist $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Y_i = \tau^{-1}(H) = A$. Nun seien

$$L_r(\mathfrak{x}) = \{(\mathfrak{x}, y) \mid |y| < r\} \text{ für } 0 < r < 1,$$
$$\{Q_{\mathfrak{x}}\} = \Sigma_\tau((\mathfrak{x}, 0), L_1(\mathfrak{x})) = \Sigma_\tau((\mathfrak{x}, 0), L_r(\mathfrak{x})) \text{ für } 0 < r < 1,$$
$$S_i = \{(\mathfrak{x}, 0) \mid Q_{\mathfrak{x}} \in V_i \text{ und } (\mathfrak{x}, 0) \in S\}.$$

Angenommen, $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ ist nicht fastdünn von der Codimension 2. Dann ist wenigstens ein S_i nicht fastdünn von der Codimension 2. Ein solches S_i werde mit S' bezeichnet. Sei

$$S'_\nu = \{(\mathfrak{x}, 0) \mid (\mathfrak{x}, 0) \in S' \text{ und } L_{\frac{1}{\nu}}(\mathfrak{x}) \cap A \subseteq Y_i\} .$$

Da $Q_\mathfrak{x} = \lim\limits_{y \to 0} \tau(\mathfrak{x}, y) \in V_i$ für $\mathfrak{x} \in S_i = S'$ ist, gilt $S' = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} S'_\nu$. Für ein ν ist S'_ν nicht fastdünn von der Codimension 2.

Sei $(\mathfrak{x}_0, 0) \in \bar{S}'_\nu \cap M$. Dann gibt es eine Folge $(\mathfrak{x}^\mu, 0) \in S'_\nu$ mit $\lim\limits_{\mu \to \infty} \mathfrak{x}^\mu = \mathfrak{x}_0$. Für $0 < |y| < \frac{1}{\nu}$ ist $\tau(\mathfrak{x}^\mu, y) \in V_i$. Also ist $\tau(\mathfrak{x}_0, y) = \lim\limits_{\mu \to \infty} \tau(\mathfrak{x}^\mu, y) \in \bar{V}_i \subset U_i$ für $0 < |y| < \frac{1}{\nu}$. Strebt $y \to 0$, so ergibt sich $Q_{\mathfrak{x}_0} \in \bar{V}_i$. Speziell ist $\tau(\mathfrak{x}_0, y) \in U_i$ für $\frac{1}{3\nu} \leq |y| \leq \frac{1}{2\nu}$. Also gibt es eine hinreichend kleine Kugel $K(\mathfrak{x}_0) = \{(\mathfrak{x}, 0) \mid |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| < \delta_{\mathfrak{x}_0}\}$ in M, so daß $\tau(\mathfrak{x}, y) \in U_i$ für $(\mathfrak{x}, 0) \in K(\mathfrak{x}_0)$ und $\frac{1}{3\nu} \leq |y| \leq \frac{1}{2\nu}$ gilt. Abzählbar viele $K(\mathfrak{x}_0^\varrho)$ überdecken $\bar{S}'_\nu \cap M$. Wegen $S'_\nu = \bigcup\limits_{\varrho=1}^{\infty} K(\mathfrak{x}_0^\varrho) \cap S'_\nu$ ist einer der Mengen $K(\mathfrak{x}_0^\varrho) \cap S'_\nu$ nicht dünn von der Codimension 2 in G, also nicht dünn von der Codimension 1 im Raume M. Ein solches $\mathfrak{x}_0^\varrho$ werde mit $\mathfrak{x}_1$ bezeichnet. Es ist $\mathfrak{x}_1 \in \bar{S}'_\nu \cap M$. Auf X_i ist $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y) = \psi_i \tau(\mathfrak{x}, y)$ als holomorphe Vektorfunktion erklärt. Da $K(\mathfrak{x}_1) \times \left\{y \,\middle|\, \frac{1}{3\nu} \leq |y| \leq \frac{1}{2\nu}\right\}$ in X_i enthalten ist, kann man $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y)$ in eine Laurentreihe entwickeln:

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{x})\, y^\lambda \quad \mathfrak{x} \in K(\mathfrak{x}_1) \quad \frac{1}{3\nu} \leq |y| \leq \frac{1}{2\nu},$$

wobei $\mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{x})$ in $K(\mathfrak{x}_1)$ holomorph ist. Ist $(\mathfrak{x}, 0) \in S'_\nu \cap K(\mathfrak{x}_1)$, so ist $(\mathfrak{x}, y) \in X_i$ für alle y mit $0 < |y| < \frac{1}{\nu}$, d. h. $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y)$ ist für $0 < |y| < \frac{1}{\nu}$ erklärt und die Laurententwicklung gilt für alle diese y. Es strebt

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y) = \psi_i \tau(\mathfrak{x}, y) \to \psi_i(Q_\mathfrak{x}) \text{ für } y \to 0 .$$

Also ist $\mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{x}) = 0$ für alle $\lambda < 0$, wenn $(\mathfrak{x}, 0) \in K(\mathfrak{x}_1) \cap S'_\nu$ ist. Da aber $K(\mathfrak{x}_1) \cap S'_\nu$ nicht dünn in M, also auch nicht dünn in $K(\mathfrak{x}_1)$ ist, verschwinden die holomorphen Vektorfunktionen $\mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{x})$ für $\lambda < 0$ identisch.

Sei $\tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}, y) = \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{v}_\lambda(\mathfrak{x})\, y^\lambda$ für $\mathfrak{x} \in K(\mathfrak{x}_1)$ und $|y| \leq \frac{1}{2\nu}$. Ein $\mathfrak{x}_2 \in S'_\nu \cap K(\mathfrak{x}_1)$ werde gewählt. Es ist $(\mathfrak{x}_2, y) \in Y_i$ für $0 < |y| < \frac{1}{\nu}$, und wegen $S'_\nu \subseteq S_i$ ist $Q_{\mathfrak{x}_2} \in V_i$. Es ist $\tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}_2, y) = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}_2, y)$ für $0 < |y| \leq \frac{1}{2\nu}$. Daher ist $\tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}_2, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \mathfrak{v}(\mathfrak{x}_2, y) = \lim\limits_{y \to 0} \psi_i \tau(\mathfrak{x}_2, y) = \psi_i(Q_{\mathfrak{x}_2}) \in V'_i$. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so,

daß $\tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}, y) \in V'_i$ für $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2| \leq \delta$ und $|y| \leq \varepsilon$. Dabei sei $\varepsilon < \frac{1}{2\nu}$ gewählt. Die kompakte Menge $\left\{(\mathfrak{x}_2, y) \mid \varepsilon \leq |y| \leq \frac{1}{2\nu}\right\}$ liegt in der offenen Menge Y_i. Also gibt es ein positives $\delta_1 < \delta$ mit $(\mathfrak{x}, y) \in Y_i$ für alle $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2| < \delta_1$ und $\varepsilon \leq |y| \leq \frac{1}{2\nu}$. Sei $W = \{(\mathfrak{x}, y) \mid |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2| < \delta_1$ und $|y| < \varepsilon\}$. Es ist $\tilde{\mathfrak{v}}(\overline{W}) \subseteq V'_i$. Sei nun $\mathfrak{x}$ in der Kugel $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2| < \delta_1$ beliebig gewählt. Angenommen, es gibt ein $\eta > 0$ so, daß $(\mathfrak{x}, y) \in Y_i$ für $\eta < |y| < \frac{1}{2\nu}$ und $(\mathfrak{x}, y_0) \notin Y_i$ für ein y_0 mit $|y_0| = \eta$ ist. Es ist $\eta < \varepsilon$ und $\tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}, y) = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y)$ für $\eta < |y| < \frac{1}{2\nu}$. Für $0 < \lambda < \frac{1}{2\nu\eta} - 1$ ist $\tau(\mathfrak{x}, y_0(1 + \lambda)) \in V_i \subseteq \overline{V}_i$. Also ist $\tau(\mathfrak{x}, y_0) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \tau(\mathfrak{x}, y_0(1 + \lambda)) \in \overline{V}_i \subset U_i$, d. h. es ist $(\mathfrak{x}, y_0) \in X_i$. Also ist $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y_0) = \psi_i \tau(\mathfrak{x}, y_0) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}, y_0(1 + \lambda)) = \tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}, y_0)$ erklärt. Weil $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_2| < \delta_1$ und $|y_0| = \eta < \varepsilon$ ist, ergibt sich $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y_0) = \tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}, y_0) \in$ $\in V'_i$. Die Abbildung $\psi_i : U_i \to U'_i$ ist umkehrbar holomorph. Also ist $\tau(\mathfrak{x}, y_0)$ $= \psi_i^{-1} \mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y_0) \in \psi_i^{-1}(V'_i) = V_i$, d. h. $(\mathfrak{x}, y_0) \in \tau^{-1}(V_i) = Y_i$, was falsch ist. Daher ist $A \cap W \subseteq Y_i$ und $\tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}, y) = \mathfrak{v}(\mathfrak{x}, y)$ für $(\mathfrak{x}, y) \in W \cap A$. Weil $Q_{\mathfrak{x}_2}$ $= \lim\limits_{y \to 0} \tau(\mathfrak{x}_2, y)$ ist, gehört $Q_{\mathfrak{x}_2}$ zu $\Sigma_\tau((\mathfrak{x}_2, 0))$. Weil $\mathfrak{x}_2 \in S'_\nu \subseteq S_i$ ist, gehört $Q_{\mathfrak{x}_2}$ auch zu V_i. Sei nun $Q \in \Sigma_\tau((\mathfrak{x}_2, 0)) \cap V_i$ beliebig gewählt. Es gibt eine Folge $(\mathfrak{x}^\mu, y^\mu) \in A$ mit $\lim\limits_{\mu \to \infty} \tau(\mathfrak{x}^\mu, y^\mu) = Q$ und $\lim\limits_{\mu \to \infty} (\mathfrak{x}^\mu, y^\mu) = (\mathfrak{x}_2, 0)$. Daher ist $(\mathfrak{x}^\mu, y^\mu) \in$ $\in W \cap A \subseteq Y_i$ für $\mu \geq \mu_0$. Also strebt $\mathfrak{v}(\mathfrak{x}^\mu, y^\mu) = \tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}^\mu, y^\mu) \to \tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}_2, 0)$ für $\mu \to \infty$. Wie oben gezeigt wurde, gilt $\tilde{\mathfrak{v}}(\mathfrak{x}_2, 0) = \psi_i(Q_{\mathfrak{x}_2}) \in V'_i$. Also ist

$$Q = \lim_{\mu \to \infty} \tau(\mathfrak{x}^\mu, y^\mu) = \lim_{\mu \to \infty} \psi_i^{-1} \mathfrak{v}(\mathfrak{x}^\mu, y^\mu) = \psi_i^{-1} \psi_i(Q_{\mathfrak{x}_2}) = Q_{\mathfrak{x}_2}.$$

Daher hat $\Sigma_\tau((\mathfrak{x}_2, 0))$ einen isolierten Punkt, nämlich $Q_{\mathfrak{x}_2}$. Also ist τ in $(\mathfrak{x}_2, 0) \in$ $\in S'_\nu \subseteq S_i \subseteq S$ regulär, was falsch ist. Die Annahme, daß S nicht fastdünn von der Codimension 2 ist, wurde damit im Falle 1 widerlegt.

Fall 2. *Sei G eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und M eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in G.* Dann bilden die nichtgewöhnlichen Punkte von M eine analytische Menge M' mit $\dim M' \leq n - 2$ in G. Die gewöhnlichen Punkte bilden eine komplexe Mannigfaltigkeit $\hat{M}$ der Dimension $n - 1$ mit nur gewöhnlichen Punkten. Zu jedem Punkt $P \in \hat{M}$ gibt es eine offene Umgebung U, so daß $M \cap U = \hat{M} \cap U$ und $S \cap U$ fastdünn von der Codimension 2 in U ist, wie ja gerade im Falle 1 bewiesen wurde. Daher ist $S \cap U$ auch fastdünn von der Codimension 2 in G. Weil sich $S \cap \hat{M}$ durch abzählbar viele solcher U überdecken läßt und weil M' dünn von der Codimension 2 ist, erweist sich $S \subseteq (S \cap \hat{M}) \cup M'$ als fastdünn von der Codimension 2.

Fall 3. *Sei G eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und M dünn in G.* Zu jedem Punkt $P \in M$ gibt es eine offene Umgebung U mit einer rein $(n-1)$-dimensionalen, in U analytischen Menge $M_0 \supseteq M \cap U$. Die Singularitäten der meromorphen Abbildung $\tau \mid U - M_0$ erfüllen gerade die Menge $S \cap U$. Also ist $S \cap U$ fastdünn von der Codimension 2. Da abzählbar viele offene Mengen U die Menge S überdecken, ist S fastdünn von der Codimension 2.

Fall 4. *Sei G ein rein n-dimensionaler komplexer Raum.* Die Menge F der nichtuniformisierbaren Punkte ist dünn von der Codimension 2 und $G - F$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n. Also ist $S = (S \cap F) \cup \cup [S \cap (G - F)]$ fastdünn von der Codimension 2.

Fall 5. *Sei G ein komplexer Raum* und $G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ seine Zusammenhangskomponenten. Da G_λ ein reindimensionaler komplexer Raum ist, ist $G_\lambda \cap S$, also auch $S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \cap S$ fastdünn von der Codimension 2, w.z.b.w.

Für SR-meromorphe Abbildungen wurde von Remmert [13] bewiesen:

Satz 3.7. *Ist τ SR-meromorph, d. h. R-meromorph und lückenlos, so ist die Menge S der Singularitäten von τ analytisch und dünn von der Codimension 2.*

Da in [13] der Beweis nur unter der Annahme geführt wurde, daß $\overline{T}$ ein komplexer Raum, d. h. lokalirreduzibel ist, werde Satz 3.7 hier — mit demselben Beweisgedanken — noch einmal bewiesen.

O. B. d. A. kann man G zusammenhängend und n-dimensional annehmen. Sei $r_\psi(P, Q, \overline{T}) = n - \dim_{(P,Q)} \psi^{-1}(P)$ der Rang der Projektion $\psi: \overline{T} \to G$. Auf T ist $r_\psi(P, Q, \overline{T}) = n$. Für $P \in M$ ist $\psi^{-1}(P) = \{P\} \times \Sigma_\tau(P)$, d. h. $P \in S$ genau dann, wenn $r_\psi(P, Q, \overline{T}) < n$ für jedes Q mit $(P, Q) \in \overline{T}$ ist. Die Menge $\Sigma = \{(P, Q) \mid (P, Q) \in \overline{T} \text{ mit } r_\psi(P, Q, \overline{T}) < n\}$ ist analytisch und in $\overline{T} - T$ enthalten, also $\dim \Sigma \leq n - 1$. Es ist $\psi(\Sigma) = S$ analytisch, weil ψ auf $\overline{T}$ eigentlich ist. Nach Satz 3.6 ist S fastdünn von der Codimension 2. Da aber S analytisch ist, folgt, daß S sogar dünn von der Codimension 2 ist.

Der Satz 3.6 wird sich nutzbringend anwenden lassen. Vermutlich ist S analytisch, wenn τ meromorph und lückenlos ist. Die Meromorphie der Abbildung τ folgt manchmal aus der Meromorphie einiger anderer Abbildungen. Darüber sollen einige Sätze bewiesen werden.

Satz 3.8. *Ist der Bildraum $H = H_1 \times H_2$ ein Produkt zweier komplexer Räume und ist $\psi_\nu: H \to H_\nu$ die durch $\psi_\nu(P_1, P_2) = P_\nu$ gegebene natürliche Projektion, so ist τ dann und nur dann meromorph, wenn es $\tau_\nu = \psi_\nu \tau$ sind. Wenn die Abbildungen τ_ν nur schwach meromorph sind, so ist auch τ schwach meromorph.*

Beweis. a) Nach Satz 3.4 sind die Abbildungen τ_ν meromorph, wenn es τ ist.

b) *Die Abbildungen τ_ν seien schwach meromorph.* Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$. Ist $Q = (Q_1, Q_2) \in \Sigma_\tau(P_0, L)$, so gibt es eine Folge $P^\varrho \in L \cap A$ mit $\lim_{\varrho \to \infty} P^\varrho = P_0$ und $\lim_{\varrho \to \infty} \tau(P^\varrho) = Q$. Wegen

$$\lim_{\varrho \to \infty} \tau_\nu(P^\varrho) = \lim_{\varrho \to \infty} \psi_\nu \tau(P^\varrho) = \psi_\nu(Q) = Q_\nu$$

ist $Q = (Q_1, Q_2) \in \Sigma_{\tau_1}(P_0, L) \times \Sigma_{\tau_2}(P_0, L)$. Daher enthält $\Sigma_\tau(P_0, L)$ höchstens einen Punkt, d. h. τ ist schwach meromorph.

c) Sind die Abbildungen τ_ν meromorph, so gilt

$$\tau(P) = (\tau_1(P), \tau_2(P)) \to (Q_1, Q_2) \text{ für } P \to P_0 \text{ mit } P \in A \cap L\,,$$

wobei $\{Q_\nu\} = \Sigma_{\tau_\nu}(P_0, L)$ ist. Daher ist τ meromorph.

Ein entsprechender Satz gilt für R-meromorphe Abbildungen:

Satz 3.9. *Ist der Bildraum $H = H_1 \times H_2$ ein Produkt zweier komplexer Räume und ist $\psi_\nu : H_1 \times H_2 \to H_\nu$ die durch $\psi_\nu(P_1, P_2) = P_\nu$ gegebene natürliche Projektion, so ist τ dann und nur dann SR-meromorph, wenn es die Abbildungen τ_ν sind. Wenn die Abbildungen τ_ν nur R-meromorph sind, so ist es auch τ.*

Beweis. a) Nach Satz 3.5 sind die Abbildungen τ_ν SR-meromorph, wenn es τ ist.

b) *Die Abbildungen τ_ν seien R-meromorph.* Sei T_ν der Graph von τ_ν über A und $\bar{T}_\nu$ der Graph über G. In $G \times H_\nu$ ist $\bar{T}_\nu$ analytisch. Ebenso sind $C = \bar{T}_1 \times \bar{T}_2$ und $D = \{(P, Q_1, P, Q_2) \mid P \in G,\ Q_1 \in H_1,\ Q_2 \in H_2\}$ in $G \times H_1 \times G \times H_2$ analytisch. Die Abbildung $\chi : D \to G \times H$, die durch $\chi(P, Q_1, P, Q_2) = (P, Q_1, Q_2)$ definiert wird, ist umkehrbar holomorph mit $\chi(D) = G \times H$. Daher ist $F = \chi(C \cap D)$ analytisch in $G \times H$. Nun ist aber

$$\begin{aligned} F \cap (A \times H) &= \{(P, Q) \mid P \in A,\ Q = (Q_1, Q_2),\ (P, Q_\nu) \in T_\nu\} \\ &= \{(P, Q) \mid P \in A,\ Q = (Q_1, Q_2),\ Q_\nu = \tau_\nu(P)\} \\ &= \{(P, \tau(P)) \mid P \in A\} \\ &= T. \end{aligned}$$

Also ist T eindeutig in $G \times H$ fortsetzbar. Da T frei ist, wird T durch $\bar{T}$ fortgesetzt. Die Abbildung τ ist R-meromorph.

c) *Sind die Abbildungen τ_ν sogar SR-meromorph*, so sind sie R-meromorph und lückenlos. Dann ist $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ auch R-meromorph und lückenlos, also SR-meromorph, w.z.b.w.

Der Satz läßt sich sofort auf Produkträume mit endlich vielen Faktoren ausdehnen. Die Abbildungen τ_ν brauchen nicht schwach meromorph (bzw. R-meromorph) zu sein, wenn die Abbildung τ schwach meromorph (bzw. R-meromorph) ist. Zum Beispiel seien

$$\begin{aligned} G &= P^1 = \{(z_1 : z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 > 0\} && \text{(Zahlenkugel)} \\ A &= C^1 = \{(1 : z) \mid |z| < \infty\} && \text{(Zahlenebene)} \\ H &= C^4 = C^1 \times C^1 \times C^1 \times C^1 && \\ \tau(z) &= (e^z, e^{iz}, e^{-iz}, e^{-z}) && \tau : A \to C^4. \end{aligned}$$

Es ist τ schwach meromorph und sogar R-meromorph, da $\Sigma_\tau(0:1) = \emptyset$ ist. Aber $\tau_1(z) = e^z$ ist wesentlich singulär in $(0:1) = \infty$.

Satz 3.10. Voraussetzung. *Zu jedem Punkt $Q_0 \in H$ gebe es eine stetige Abbildung τ_{Q_0} von H in einen komplexen Raum K_{Q_0} so, daß gilt:*

1. *Die Faser $\tau_{Q_0}^{-1}\tau_{Q_0}(Q_0)$ hat in Q_0 die topologische Dimension Null.*
2. *Die stetige Abbildung $\tau_{Q_0}\tau : A \to K_{Q_0}$ ist holomorph und schwach meromorph in G.*

Behauptung. *Die Abbildung τ ist schwach meromorph.*

Beweis. Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$. Sei $Q \in \Sigma_\tau(P_0, L)$. Für eine Folge $P^\varrho \in L \cap A$ ist $\lim_{\varrho \to \infty} P^\varrho = P_0$ und $\lim_{\varrho \to \infty} \tau(P^\varrho) = Q$. Also ist $\lim_{\varrho \to \infty} \tau_{Q_0}\tau(P^\varrho) = \tau_{Q_0}(Q)$ für jedes

$Q_0 \in H$, woraus $\Sigma_\tau(P_0, L) \subseteq \tau_{Q_0}^{-1} \Sigma_{\tau_{Q_0}\tau}(P_0, L)$ folgt. Da $\tau_{Q_0}\tau$ schwach meromorph ist, besteht $\Sigma_{\tau_{Q_0}\tau}(P_0, L)$ höchstens aus einem Punkt R_0. Ist nun $\Sigma_\tau(P_0, L) \neq \theta$, so kann man ein Q_0 aus $\Sigma_\tau(P_0, L)$ wählen. Es ist $\Sigma_\tau(P_0, L) \subseteq \subseteq \tau_{Q_0}^{-1} \Sigma_{\tau_{Q_0}\tau}(P_0, L) = \tau_{Q_0}^{-1}(R_0)$. Weil $Q_0 \in \tau_{Q_0}^{-1}(R_0)$ ist, folgt $R_0 = \tau_{Q_0}(Q_0)$ also, $\tau_{Q_0}^{-1}(R_0) = \tau_{Q_0}^{-1}\tau_{Q_0}(Q_0)$. Diese Menge hat in Q_0 die topologische Dimension Null, was dann auch von der Teilmenge $\Sigma_\tau(P_0, L)$ gilt. Also besteht $\Sigma_\tau(P_0, L)$ aus dem Punkt Q_0 allein, w.z.b.w.

Für R-meromorphe Abbildungen in Überlagerungsräume gilt:

Satz 3.11. Voraussetzung. *Sei $\chi: H \to F$ eine offene und holomorphe Abbildung. Die Faser $\chi^{-1}\chi(Q)$ durch Q bestehe höchstens aus abzählbar vielen Punkten. Sei $\chi\,\tau$ R-meromorph.*

Behauptung. *Die Abbildung τ ist R-meromorph.*

Zusatz. *Ist χ sogar eigentlich, so ist τ dann und nur dann R-meromorph, wenn es $\chi\,\tau$ ist.*

Beweis. Sei $\bar{T}$ der Graph von τ. Sei $\bar{S}$ der Graph von $\chi\,\tau$. Sei $\xi: G \times H \to \to G \times F$ durch $\xi(P, Q) = (P, \chi(Q))$ definiert. Das Urbild $\xi^{-1}(P, R) = (P, \xi^{-1}(R))$ des Punktes (P, R) ist höchstens abzählbar. O. B. d. A. kann man G zusammenhängend annehmen. Dann hängt auch A zusammen und $\tau(A)$ liegt in einer Zusammenhangskomponente von H. Daher kann man H zusammenhängend annehmen. Da $\chi(H)$ in einer Zusammenhangskomponente von F liegt, kann man auch F zusammenhängend annehmen. Sei n die Dimension von G. Dann ist $\dim T = \dim S = \dim \bar{S} = n$. Ist $(P, Q) \in \bar{T}$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim_{\nu\to\infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P, Q)$. Es ist $\xi(P, Q) = \lim_{\nu\to\infty}(P^\nu, \chi\,\tau(P^\nu)) \in \bar{S}$, woraus $\bar{T} \subseteq \xi^{-1}(\bar{S}) = S^*$ folgt. Da $\bar{S}$ analytisch in $G \times F$ ist, ist S^* analytisch in $G \times H$. Da $\xi: \bar{S} \to S^*$ nur nulldimensionale Fasern hat, ist S^* rein n-dimensional und enthält die rein n-dimensionale analytische Teilmenge T von $A \times H$. Daher ist T fortsetzbar. Da T frei ist, wird die Fortsetzung durch $\bar{T}$ gegeben. Die Abbildung τ ist R-meromorph.

Wenn $\chi: H \to F$ eigentlich ist, so ist $\xi: G \times H \to G \times F$ eigentlich. Ist τ R-meromorph, so ist $\bar{T}$ also auch $\xi(\bar{T}) \subseteq \bar{S}$ analytisch. Zu jedem $(P, R) \in \bar{S}$ gibt es eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim_{\nu\to\infty}(P^\nu, \chi\,\tau(P^\nu)) = (P, R)$, wobei $(P^\nu, \chi\,\tau(P^\nu)) = \xi(P^\nu, \tau(P^\nu))$ ist. Sei U eine relativ kompakte, offene Umgebung von R. Dann ist $\chi^{-1}(\bar{U})$ kompakt und $\chi^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von $\chi^{-1}(R)$. Für $\nu \geqq \nu_0$ ist $\chi\,\tau(P^\nu) \in U$ also $\tau(P^\nu) \in \chi^{-1}(\bar{U})$. Eine Teilfolge $\tau(P^{\nu_\mu})$ konvergiert gegen einen Punkt $Q \in H$. Es ist

$$(P, R) = \lim_{\mu\to\infty}(P^{\nu_\mu}, \chi\,\tau(P^{\nu_\mu})) = \xi(P, Q) \in \xi(\bar{T}) .$$

Also ist $\bar{S} = \xi(\bar{T})$ analytisch, d. h. $\chi\,\tau$ ist R-meromorph, w.z.b.w.

Ist der Bildraum in einen komplexen Raum eingebettet, so gilt:

Satz 3.12. a) *Ist H komplexer Teilraum des komplexen Raumes $\tilde{H}$, und ist $\tau: A \to H$ in $G \supseteq A$ meromorph (SR-meromorph), so ist auch $\tilde{\tau} = \tau: A \to \tilde{H}$ in $G \supseteq A$ meromorph (SR-meromorph).*

b) *Ist H abgeschlossener komplexer Teilraum des komplexen Raumes $\tilde{H}$ und ist $\tau : A \to H$ in $G \supseteq A$ schwach meromorph (R-meromorph), so ist auch $\tilde{\tau} = \tau : A \to \tilde{H}$ in $G \supseteq A$ schwach meromorph (R-meromorph).*

Beweis. 1. *$\tau : A \to H$ sei meromorph.* Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$. Dann strebt $\tau(P) \to Q_0$ für $P \to Q_0$ mit $P \in L \cap A$. Dasselbe gilt für $\tilde{\tau} = \tau : A \to \tilde{H}$. Also ist $\Sigma_\tau(P_0, L) = \Sigma_{\tilde{\tau}}(P_0, L)$, d. h. $\tilde{\tau}$ ist meromorph.

2. *$\tau : A \to H$ sei SR-meromorph.* Sei T der Graph von τ und $\tilde{T}$ der Graph von $\tilde{\tau}$ über A. Es ist $T = \tilde{T}$. Die abgeschlossene Hülle werde bezüglich $G \times \tilde{H}$ gebildet. Dann ist $\bar{T} = \bar{\tilde{T}}$ der Graph von $\tilde{\tau}$ und $\bar{T} \cap (G \times H)$ der Graph von τ. Es ist $\bar{T} \cap (G \times H)$ analytisch in $G \times H$ und $G \times H$ lokalanalytisch in $G \times \tilde{H}$, also ist $\bar{T} \cap (G \times H)$ lokalanalytisch in $G \times \tilde{H}$. Sei $(P_0, Q_0) \in \bar{T} = \bar{\tilde{T}}$. Ist $P_0 \in A$, so ist $Q_0 = \tau(P_0) = \tilde{\tau}(P_0) \in H$, also $(P_0, Q_0) \in \bar{T} \cap (G \times H)$. Ist $P_0 \in M$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} (P^\nu, \tilde{\tau}(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$. Eine Teilfolge P^{ν_μ} existiert, für die $\tau(P^{\nu_\mu})$ (in H!!) konvergiert. Natürlich ist $\lim\limits_{\mu \to \infty} (P^{\nu_\mu}, \tau(P^{\nu_\mu})) = (P_0, Q_0)$, d. h. $(P_0, Q_0) \in G \times H$. Man sieht, $\bar{T} = \bar{T} \cap (G \times H)$ ist lokalanalytisch und abgeschlossen in $G \times \tilde{H}$, also analytisch. Folglich ist $\tilde{\tau}$ R-meromorph. Offensichtlich ist $\tilde{\tau}$ lückenlos, also ist $\tilde{\tau}$ SR-meromorph.

3. *$\tau : A \to H$ sei schwach meromorph und H abgeschlossen in $\tilde{H}$.* Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$. Sei $Q_0 \in \Sigma_{\tilde{\tau}}(P_0, L)$. Dann gibt es eine Folge $P^\nu \in A \cap L$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} (P^\nu, \tilde{\tau}(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$. Daher ist $Q_0 = \lim\limits_{\nu \to \infty} \tau(P^\nu)$ in $\bar{H} = H$. Also ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0, L)$. Folglich enthält $\Sigma_{\tilde{\tau}}(P_0, L)$ höchstens einen Punkt, w.z.b.w.

4. *$\tau : A \to H$ sei R-meromorph und H abgeschlossen in $\tilde{H}$.* Sei T der Graph von τ und $\tilde{T}$ der Graph von $\tilde{\tau}$ über A. Es ist $T = \tilde{T}$. Die abgeschlossene Hülle werde bezüglich $G \times \tilde{H}$ gebildet. Dann ist $\bar{T} = \bar{\tilde{T}}$ der Graph von $\tilde{\tau}$ und $\bar{T} \cap (G \times H)$ der Graph von τ. Da $G \times H$ analytisch in $G \times \tilde{H}$ und $\bar{T} \cap (G \times H)$ analytisch in $G \times H$ ist, ist $\bar{T} \cap (G \times H)$ analytisch in $G \times \tilde{H}$ und umfaßt T. Wegen $\bar{T} \cap (G \times H) \cap (A \times \tilde{H}) = T$ ist T fortsetzbar in $G \times \tilde{H}$, also $\bar{T}$ analytisch. Die Abbildung τ ist R-meromorph.

Ist das Bild $\tau(A)$ in einem komplexen Teilraum H' des Bildraumes H enthalten, so gilt:

Satz 3.13. *a) Ist H' komplexer Teilraum des komplexen Raumes H und ist $\tau : A \to H$ in $G \supseteq A$ schwach meromorph (R-meromorph) mit $\tau(A) \subseteq H'$, so ist $\tau' = \tau : A \to H'$ schwach meromorph (R-meromorph) in G.*

b) Ist H' abgeschlossener Teilraum des komplexen Raumes H und ist $\tau : A \to H$ in $G \supseteq A$ meromorph (SR-meromorph) mit $\tau(A) \subseteq H'$, so ist $\tau' = \tau : A \to H'$ meromorph (SR-meromorph) in G.

Beweis. 1. *Für jede Streumenge gilt* $\Sigma_{\tau'}(R, L) = \Sigma_\tau(R, L) \cap H'$. Denn $\Sigma_{\tau'}(R, L) \subseteq H'$ und $\Sigma_{\tau'}(R, L) \subseteq \Sigma_\tau(R, L)$ ist trivial. Ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(R, L)$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in A \cap L$ mit $\lim_{\nu\to\infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_0, Q_0) \in R \times \overline{H}'$. Ist $Q_0 \in H'$, so ist $Q_0 \in \Sigma_{\tau'}(R, L)$, weil $\tau'(P^\nu) = \tau(P^\nu)$ gilt. Außerdem ergibt sich $\Sigma_\tau(R, L) \subseteq \subseteq \overline{H}'$. Daraus folgt sofort: Ist τ schwach meromorph, so auch τ'. Ist H' abgeschlossener Teilraum, so ist

$$\Sigma_{\tau'}(R, L) = \Sigma_\tau(R, L) \cap H' = \Sigma_\tau(R, L) \cap \overline{H}' = \Sigma_\tau(R, L)\,.$$

Daraus folgt sofort: Ist τ meromorph und H' abgeschlossen, so ist τ' meromorph.

2. *Ist τ R-meromorph*, so ist der Graph $\overline{T}$ analytisch in $G \times H$ und $G \times H'$ ist lokalanalytisch. Also ist der Graph $\overline{T} \cap (G \times H')$ von τ' analytisch in $G \times H'$.

3. *Ist τ SR-meromorph und H' abgeschlossen*, so ist τ lückenlos, also $\Sigma_\tau(P_0)$ kompakt. Weil $\Sigma_{\tau'}(P_0) = \Sigma_\tau(P_0)$ kompakt ist, ist auch τ' lückenlos. Da nach 2. τ' außerdem R-meromorph ist, ist τ' SR-meromorph, w.z.b.w.

§ 4. Meromorphe Abbildungen und meromorphe Funktionen

Man kann nun fragen, ob sich meromorphe Funktionen bei meromorphen Abbildungen übertragen und wieweit sich die Meromorphie einer Abbildung dadurch charakterisieren läßt. Eine Abbildung in den C^m oder in den Osgoodschen Raum $\overline{C^m} = P^1 \times \cdots \times P^1$ oder in den komplexprojektiven Raum P^m wurde von Thimm [22] bis [28] als meromorph bezeichnet, wenn sie durch meromorphe Funktionen gegeben wird. Es wird sich zeigen, daß eine Abbildung in $\overline{C^m}$ oder P^m dann und nur dann meromorph ist, wenn sie durch meromorphe Funktionen gegeben wird. Dasselbe gilt für R-meromorphe Abbildungen (Remmert [13]). Für den Fall $H = C^m$ gilt das nicht mehr, wie bereits das Beispiel in § 3 im Anschluß an Satz 3.9 zeigte. Zugleich ergibt sich, daß die beiden Meromorphiebegriffe (R-meromorph = meromorph) übereinstimmen, wenn der Bildraum der projektive Raum oder der Osgoodsche Raum oder sogar ein M-vollständiger Raum ist. Zunächst soll das Verhalten meromorpher Funktionen bei meromorphen Abbildungen untersucht werden.

Satz 4.1. *Im Bildraum H der meromorphen Abbildung τ sei eine meromorphe Funktion f gegeben. Sei N die Menge der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von f. Das Urbild $N' = \tau^{-1}(N)$ umfasse keine Zusammenhangskomponente von A. Dann ist die auf $A - N'$ holomorphe Funktion $f\tau$ in G meromorph. Ist f sogar holomorph, so ist auch $f\tau$ in M regulär, also in H analytisch und eindeutig fortsetzbar.*

Beweis. Sei S die Menge der singulären Stellen von τ und τ_0 die analytische Fortsetzung von τ in $A_0 = G - S \supseteq A$. Jede Zusammenhangskomponente von A_0 enthält genau eine von A und $A_0 - A$ ist dünn. Würde die in A_0 analytische Menge $N'' = \tau_0^{-1}(N)$ eine Zusammenhangskomponente von A_0 enthalten, so auch eine von A. Wegen $N'' \cap A = \tau_0^{-1}(N) \cap A = \tau^{-1}(N) \cap A = N'$ würde N' eine Zusammenhangskomponente von A enthalten, was falsch ist. Auf $A_0 - N''$ ist $f\tau_0$ holomorph und auf A_0 meromorph. Da $S = G - A_0$ dünn, abgeschlossen und fastdünn von der Codimension 2 ist, bleibt $f\tau_0$ auf S mero-

morph; daher wird die auf $A - N'' = A - N'$ holomorphe Funktion $f\tau = f\tau_0$ in G meromorph fortgesetzt.

Ist f holomorph, so ist $f\tau_0$ in A_0 holomorph. Da S dünn, abgeschlossen und von der Codimension 2 fastdünn ist, bleibt $f\tau_0$ in S regulär. Also ist $f\tau$ in M regulär, w.z.b.w.

Dieser Satz gilt natürlich auch für SR-meromorphe Abbildungen[9]), da diese meromorph sind. Ist G ein komplexer Raum, dann sei $I(G)$ der Ring der holomorphen Funktionen auf G und $K(G)$ der Ring der meromorphen Funktionen auf G. Im Bildraum H sei $K_\tau(H)$ die Menge der meromorphen Funktionen f mit der Eigenschaft: Ist N_f die Menge der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von f, so enthält $\tau^{-1}(N_f)$ keine Zusammenhangskomponente von A. Sei $K'_\tau(H)$ die Teilmenge der Funktionen $f \in K_\tau(H)$, für die die in $A - \tau^{-1}(N_f)$ holomorphe Funktion $f\tau$ sich in G meromorph fortsetzen läßt. Sei $I'_\tau(H)$ die Teilmenge der holomorphen Funktionen f von $I(H)$, für die $f\tau$ in M regulär ist. Die Mengen $K_\tau(H)$, $K'_\tau(H)$ und $I'_\tau(H)$ sind Ringe. Ist $f \in K_\tau(H)$, so $f\tau = \tilde{\tau} f \in K(A)$. Ist $f \in K'_\tau(H)$, so hat $f\tau$ eine meromorphe Fortsetzung $\tau^* f \in K(G)$. Ist $f \in I(H)$, so ist $\tilde{\tau}_1 f = f\tau \in I(A)$ und ist $f \in I'_\tau(H)$, so hat $f\tau$ eine holomorphe Fortsetzung $\tau_1^* f \in I(G)$. Die Abbildungen $\tilde{\tau}$, τ^*, $\tilde{\tau}_1$ und τ_1^* sind Ringhomomorphismen mit

$$\tau^* \mid I'_\tau(H) = \tau_1^* \qquad \tilde{\tau} \mid I(H) = \tilde{\tau}_1$$
$$\tilde{\tau} \mid K'_\tau(H) = \tau^* \qquad \tilde{\tau}_1 \mid I'_\tau(H) = \tau_1^* .$$

Die Aussage des Satzes 4.1 kann man also auch so ausdrücken:

1. $I(H) = I'_\tau(H)$ und $K_\tau(H) = K'_\tau(H)$
2. $\tau^* : K_\tau(H) \rightsquigarrow K(G)$ (Ringhomomorphismus)
3. $\tau_1^* : I(H) \rightsquigarrow I(G)$ (Ringhomomorphismus),

wobei aus 1. die Aussagen 2. und 3. folgen. Kann man nun Satz 4.1 umkehren? Das ist sicher nur der Fall, wenn es im Bildraum „hinreichend" viele meromorphe Funktionen gibt. Räume mit „hinreichend" vielen meromorphen Funktionen sind:

Definition 4.1. *Ein komplexer Raum H heiße M-vollständig (K-vollständig[10])), wenn es zu jedem Punkt $Q_0 \in H$ endlich viele auf H meromorphe (holo-morphe) Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ gibt, die in einer geeigneten offenen Umgebung U von Q_0 holomorph sind und für die*

$$(f_1(Q), \ldots, f_k(Q)) \neq (f_1(Q_0), \ldots, f_k(Q_0))$$

für $Q \in U$ und $Q \neq Q_0$ gilt.

Beispielsweise sind alle algebraischen[11]) komplexen Räume M-vollständig, alle Steinschen Mannigfaltigkeiten K-vollständig.

Satz 4.2. *Sei G zusammenhängend. Der Bildraum H sei M-vollständig und $K_\tau(H) = K'_\tau(H)$, d. h. für jede in H meromorphe Funktion f mit N_f als Menge der Pol- und Unbestimmtheitsstellen, für die $\tau^{-1}(N_f)$ nicht die zusammen-*

[9]) Dies wurde schon von Remmert [13], S. 369 bewiesen.

[10]) Siehe Grauert [4], S. 234.

[11]) Ein komplexer Raum heiße algebraisch, wenn er abgeschlossener komplexer Teilraum eines komplex-projektiven Raumes ist.

hängende offene Menge A enthält, sei $f\tau$ aus $A-\tau^{-1}(N_f)$ in G meromorph fortsetzbar. Dann ist τ schwach meromorph.

Beweis. Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L\cap M=\bar{L}\cap M=\{P_0\}$. O. B. d. A. sei L zusammenhängend angenommen. Sei $Q_0\in\Sigma_\tau(P_0,L)$. Dann gibt es endlich viele in H meromorphe Funktionen $f_1,\ldots,f_k$, die in einer offenen Umgebung U von Q_0 holomorph sind, so daß

$$\bigcap_{\nu=1}^{k}\{Q\mid f_\nu(Q)=f_\nu(Q_0),\ Q\in U\}$$

nur den Punkt Q_0 enthält. Ist $Q_1\in\Sigma_\tau(P_0,L)\cap U$, so gibt es eine Folge $P^\nu\in L\cap A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty}\tau(P^\nu)=Q_1$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty}P^\nu=P_0$. Für $\nu\geqq\nu_0$ ist $\tau(P^\nu)\in U\subseteq H-N_{f_\mu}$. Wegen $P^\nu\in A-\tau^{-1}(N_{f_\mu})$ ist $f_\mu^*=f_\mu\tau$ in G meromorph. Wegen $\tau(P^\nu)\in U$ ist f_μ^* in $P^\nu\in L\cap A$ holomorph. Daher ist f_μ^* auf L meromorph und nicht identisch unendlich. Es strebt $f_\mu^*(P)\to a_\mu$ für $P\to P_0$ mit $P\in L\cap A$, wobei $a_\mu=\infty$ zugelassen sei. Man hat $a_\mu=\lim\limits_{\nu\to\infty}f_\mu(\tau(P^\nu))=f_\mu(Q_1)$. Die Größen a_μ sind unabhängig von der Wahl von Q_1 in $U\cap\Sigma_\tau(P_0,L)$. Daher ist $f_\mu(Q_1)=a_\mu=f_\mu(Q_0)$ für $\mu=1,\ldots,k$ und $Q_1\in U$. Es folgt $Q_1=Q_0$. Also ist Q_0 isolierter Punkt von $\Sigma_\tau(P_0,L)$, weswegen $\Sigma_\tau(P_0,L)$ höchstens aus einem Punkt besteht, w.z.b.w.

Eine lückenfreie Abbildung mit dünnen Singularitäten in einen M-vollständigen Raum ist also dann und nur dann meromorph, wenn sie jede in H meromorphe Funktion zu einer in G meromorphen Funktion überträgt, d. h. wenn $K_\tau(H)=K'_\tau(H)$ gilt, d. h. wenn τ einen Homomorphismus $\tau^*:K_\tau(H)\to K(G)$ erzeugt. Ein entsprechender Satz wird später für R-meromorphe Abbildungen bewiesen werden.

Ist f eine holomorphe Funktion auf der offenen Teilmenge A des komplexen Raumes G und ist $M=G-A$ dünn, so ist $\tilde{f}=f:A\to P^1$ eine holomorphe Abbildung in die Zahlenkugel. Wie der nächste Satz zeigt, ist die Funktion f dann und nur dann meromorph auf G, wenn es die Abbildung $\tilde{f}(=f)$ ist.

Satz 4.3[12]). **Voraussetzung.** *Sei $\tau:A\to P^m$ eine holomorphe Abbildung der offenen Teilmenge A des zusammenhängenden komplexen Raumes G in den komplexprojektiven Raum $P^m=\{(w_0:\cdots:w_m)\mid\sum\limits_{\mu=0}^{m}|w_\mu|^2>0\}$. Sei $M=G-A$ dünn.*

Behauptung. 1. *Die Abbildung τ ist dann und nur dann meromorph, wenn sie R-meromorph ist.*

2. *Die Abbildung τ ist dann und nur dann meromorph, wenn die folgende Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllt ist:*

$\mathfrak{B}$: *Seien $E_\mu=\{(w_0:\cdots:w_m)\mid(w_0:\cdots:w_m)\in P^m$ und $w_\mu=0\}$ und $E'_\mu=\tau^{-1}(E_\mu)$. Dann gibt es eine Nummer μ mit $E'_\mu\neq A$. Für $P\in A-E'_\mu$ gilt*

$$\tau(P)=(f_0(P):\cdots:f_{\mu-1}(P):1:f_{\mu+1}(P):\cdots:f_m(P)),$$

wobei alle f_ν auf G meromorph sind.

[12]) Für meromorphe Abbildungen vgl. STOLL [17]. Für R-meromorphe Abbildungen vgl. REMMERT [13], Satz 33 und S. 370.

Beweis. a) *Ist τ meromorph, so folgt $\mathfrak{B}$*: Wegen $\bigcap\limits_{\nu=0}^{m} E_\nu = \theta$ ist $\tau(A) \subsetneq E_\mu$ für ein μ, also $E'_\mu \neq A$. Die Funktion $f'_\nu = \frac{w_\nu}{w_\mu}$ ist holomorph auf $P^m - E_\mu$. Daher ist $f'_\nu \tau$ auf $A - E'_\mu$ holomorph und zu f_ν in G meromorph fortsetzbar. Für $P \in A - E'_\mu$ ist

$$\begin{aligned}
\tau(P) &= \left(\frac{w_0}{w_\mu} : \cdots : \frac{w_m}{w_\mu}\right) \\
&= (f'_0(\tau(P)) : \cdots : f'_{\mu-1}(\tau(P)) : 1 : f'_{\mu-1}(\tau(P)) : \cdots : f'_m(\tau(P))) \\
&= (f_0(P) : \cdots : f_{\mu-1}(P) : 1 : f_{\mu-1}(P) : \cdots : f_m(P)) .
\end{aligned}$$

b) *Gilt $\mathfrak{B}$, so ist τ R-meromorph*[13]): Sei T der Graph von τ. Sei $P_0 \in M$ und U eine offene zusammenhängende Umgebung von P_0, so daß $f_\nu = \frac{g_\nu}{h}$ für $0 \leq \nu \leq m$ und $\nu \neq \mu$ mit in U holomorphen Funktionen g_ν, h gilt. In U ist $B = \{P \mid h(P) = 0\}$ eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge, wobei n die Dimension von G ist. In $U \times P^m$ ist

$$R = \{(P, Q) \mid P \in U\,,\ Q = (w_0 : \cdots : w_m) \in P^m,\ w_\nu h(P) - w_\mu g_\nu(P) = 0\}$$

analytisch. Sei $U_1 = U \cap A - B$ und $V_1 = U_1 \times P^m$. Die Menge $V - V_1$ ist dünn. Wegen $R \cap V_1 = T \cap V_1 = \bar{T} \cap V_1$ ist T in $(M \cap U) \times P^m$ regulär; da T frei ist, wird durch $\bar{T}$ die analytische Fortsetzung gegeben. Also ist τ R-meromorph.

c) *Ist τ R-meromorph*, so auch schwach meromorph. Weil P^m kompakt ist, ist τ lückenlos. Also ist τ meromorph, w.z.b.w.

Anmerkung 1. Ist der Bildraum H kompakt, so stimmen die Begriffe schwach meromorph und meromorph überein, ebenso die Begriffe R-meromorph und SR-meromorph.

Anmerkung 2. Der Satz kann ganz entsprechend bewiesen werden, wenn der Bildraum H das Produkt von komplexprojektiven Räumen, z. B. der Osgoodsche Raum ist.

Nun ist es möglich, den Satz 4.2 auf R-meromorphe Abbildungen zu übertragen.

Satz 4.4. *Sei G zusammenhängend. Der Bildraum H sei M-vollständig und $K_\tau(H) = K'_\tau(H)$, d. h. für jede in H meromorphe Funktion f mit N_f als Menge der Pol- und Unbestimmtheitsstellen, für die $\tau^{-1}(N_f)$ von der zusammenhängenden Menge A verschieden ist, sei $f\tau$ aus $A - \tau^{-1}(N_f)$ in G meromorph fortsetzbar. Dann ist τ R-meromorph.*

Beweis. Weil $M = G - A$ in G dünn und G zusammenhängend ist, ist auch A zusammenhängend und $\tau(A)$ liegt in einer Zusammenhangskomponente von H. Daher kann man o. B. d. A. den Raum H zusammenhängend annehmen. Sei $n = \dim G$ und $m = \dim H$. Sei (P_0, Q_0) ein beliebiger Punkt des Graphen $\bar{T}$ von τ. In H gibt es meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$, die in

---

[13]) Der Beweis von b) stammt von REMMERT [13], Satz 33 und wird hier nur der Vollständigkeit halber wiedergegeben.

einer offenen Umgebung V_0 von Q_0 holomorph sind und für die $\bigcap\limits_{\nu=1}^{k} \{Q \mid f_\nu(Q) = f_\nu(Q_0),\ Q \in V_0\}$ aus dem Punkt Q_0 allein besteht. Sei N_ν die Menge der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von f_ν und $N = \bigcup\limits_{\nu=1}^{k} N_\nu$. Es ist N analytisch und dünn in H und $B = H - N \supseteq V_0$. Durch $\varphi(Q) = (1 : f_1(Q) : \cdots : f_k(Q))$ wird eine holomorphe Abbildung $\varphi : B \to P^k$ in den komplexprojektiven Raum P^k der Dimension k definiert, die R-meromorph auf H ist. Sei $r_\varphi(Q) = m - \dim_Q \varphi^{-1}\varphi(Q)$ der Rang der Abbildung φ in Q. Es ist $r_\varphi(Q) \leqq m$ und $r_\varphi(Q_0) = m$. Daher gibt es eine offene, in V_0 enthaltene Umgebung V von Q_0, für die $r_\varphi(Q) = m$ ist. Man kann $\overline{V}$ kompakt und in V_0 enthalten annehmen mit $r_\varphi(Q) = m$ für $Q \in \overline{V}$. Dann besteht $\varphi^{-1}\varphi(Q) \cap V$ für jedes $Q \in V$ höchstens aus endlich vielen Punkten.

Es ist $V \subseteq V_0 \subseteq B = H - N$, also $\tau^{-1}(V) \subseteq A - \tau^{-1}(N)$. Eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} (P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_0, Q_0) \in G \times V$ existiert, da $(P_0, Q_0) \in \overline{T}$ ist. Für $\nu \geqq \nu_0$ ist $\tau(P^\nu) \in V$ also $P^\nu \in \tau^{-1}(V)$. Es ist A nicht in $\tau^{-1}(N)$ enthalten. Daher läßt sich die in $A^* = A - \tau^{-1}(N)$ holomorphe Funktion $f_\nu \tau$ zu einer in G meromorphen Funktion f_ν^* fortsetzen. Durch $\varphi^*(P) = (1 : f_1^*(P) : \cdots : f_k^*(P)) = \varphi(\tau(P))$ für $P \in A^*$ wird eine holomorphe Abbildung $\varphi^* : A^* \to P^k$ gegeben, die auf G R-meromorph ist.

Der Graph $\overline{F}$ von φ und der Graph $\overline{F^*}$ von φ^* sind analytisch. Also ist auch

$$D_0 = \{(P, Q, R) \mid (Q, R) \in \overline{F},\ (P, R) \in \overline{F^*}\}$$

analytisch in $G \times H \times P^k$. Sei $\chi : G \times H \times P^k \to G \times H$ die durch $\chi(P, Q, R) = (P, Q)$ gegebene Projektion. Ist $K \subseteq G \times H$ kompakt, so ist $\chi^{-1}(K) = K \times P^k$ kompakt. Also ist χ eine eigentliche Abbildung. Daher ist $D = \chi(D_0)$ in $G \times H$ analytisch.

Sei $(P, Q) \in T$. Dann ist $Q = \tau(P)$. Es gibt eine Folge $P^\nu \in A^*$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} P^\nu = P$. Es folgt $\lim\limits_{\nu\to\infty} \tau(P^\nu) = \tau(P) = Q$. Sei $R^\nu = \varphi^*(P^\nu)$. Dann ist $(P^\nu, R^\nu) \in F^* \in \overline{F^*}$. Wegen $\varphi^*(P^\nu) = \varphi(\tau(P^\nu))$ ist $(\tau(P^\nu),\ \varphi(\tau(P^\nu))) \in F \in \overline{F}$. Da P^k kompakt ist, gibt es eine Teilfolge P^{ν_μ} mit $R = \lim\limits_{\mu\to\infty} \varphi^*(P^{\nu_\mu})$. Dann ist $(P, R) = \lim\limits_{\mu\to\infty} (P^{\nu_\mu}, R^{\nu_\mu}) \in \overline{F^*}$ und $(Q, R) = \lim\limits_{\mu\to\infty} (\tau(P^{\nu_\mu}),\ \varphi(\tau(P^{\nu_\mu}))) \in \overline{F}$, was $(P, Q, R) \in D_0$ und $(P, Q) \in D$ ergibt. Da D abgeschlossen ist, folgt $\overline{T} \subseteq D$.

Sei $D_0' = D_0 \cap (G \times V \times P^k)$ und $\varrho : D_0' \to G \times P^k$ die durch $\varrho(P, Q, R) = (P, R)$ gegebene Projektion. Nach Definition von D_0 ist $\varrho(D_0') \subseteq \overline{F^*}$. Für $(P, R) \in \overline{F^*}$ gilt

$$\begin{aligned} \varrho^{-1}(P, R) &= \{(P, Q, R) \mid (Q, R) \in \overline{F},\ Q \in V\} \\ &= \{(P, Q, R) \mid \varphi(Q) = R,\ Q \in V\} \\ &= \{P\} \times (\varphi^{-1}(R) \cap V) \times \{R\}. \end{aligned}$$

Da nun $\varphi^{-1}(R) \cap V$ höchstens aus endlich vielen Punkten besteht, ist $\varrho^{-1}(P, R)$

endlich. Sei D_0'' ein irreduzibeler Teil von D_0' und $s = \dim D_0''$. Dann ist $s = r_\varrho(P, Q, R)$ der Rang der Projektion ϱ in $(P, Q, R) \in D_0''$. Das heißt $\varrho : D_0'' \to G \times P^k$ ist nirgends entartet und holomorph. Jeder Punkt $(P, Q, R) \in$ $\in D_0''$ hat daher eine Umgebung U, so daß $\varrho(U \cap D_0'')$ in $G \times P^k$ lokalanalytisch und rein s-dimensional ist[14]). Es ist $\varrho(U \cap D_0'') \subseteq \overline{F}^*$.

Da A zusammenhängend ist, ist F^* irreduzibel und n-dimensional in $A \times P^k$. Folglich ist $\overline{F}^*$ irreduzibel und n-dimensional. Also ist

$$\dim D_0'' = s = \dim \varrho(U \cap D_0'') \leq \dim \overline{F}^* = n\,.$$

Folglich ist $\dim D_0' \leq n$. Daher hat

$$D' = \chi(D_0') = \chi(D_0 \cap (G \times V \times P^k)) = D \cap (G \times V)$$

höchstens die Dimension n.

Da $\tau^{-1}(V) \neq \emptyset$ ist, ist $T \cap (A \times V) \neq \emptyset$ also rein n-dimensional mit $T \cap$ $\cap (A \times V) \subseteq D'$, wobei D' in $G \times V$ analytisch mit $\dim D' \leq n$ ist. Also läßt sich $T \cap (A \times V)$ in $G \times V$ fortsetzen. Das heißt, T ist in $(P_0, Q_0) \in \overline{T}$ regulär. In jedem Punkt $(P_0, Q_0) \in G \times H - \overline{T}$ ist T trivialerweise regulär. Daher ist T auf der dünnen Restmenge $M \times H$ regulär und frei von $M \times H$, also ist T fortsetzbar. Die Fortsetzung wird durch $\overline{T}$ gegeben, d. h. τ ist R-meromorph, w.z.b.w.

Die Sätze 4.2 und 4.4 liefern zugleich ein wichtiges Nebenergebnis. Ist τ lückenfrei und H M-vollständig, so ist eine Abbildung genau dann R-meromorph, wenn sie meromorph ist:

Satz 4.5. *Ist die Abbildung τ lückenfrei, G zusammenhängend und der Bildraum H M-vollständig, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *τ ist meromorph*
2. *τ ist R-meromorph*
3. *$K_\tau'(H) = K_\tau(H)$, d. h.: Ist f eine auf H meromorphe Funktion und ist $\tau(A)$ nicht in der Menge N_f der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von f enthalten, so ist die in $A - \tau^{-1}(N_f)$ holomorphe Funktion auf G meromorph fortsetzbar.*

Zusatz. *Eine lückenfreie Abbildung in einen M-vollständigen komplexen Raum H ist dann und nur dann meromorph, wenn sie R-meromorph ist, auch wenn G nicht zusammenhängend ist.*

Beweis. Aus 1 folgt 3 nach Satz 4.1. Aus 3 folgt 2 nach Satz 4.4. Aus 2 folgt 1 nach Satz 3.3, weil τ lückenfrei ist. Also sind die Aussagen gleichwertig, w.z.b.w.

Da eine Abbildung auf G genau dann meromorph (R-meromorph) ist, wenn sie es auf jeder Zusammenhangskomponente ist, ergibt sich der Zusatz unmittelbar aus Satz 4.5.

Beim Beweis der Sätze 4.2, 4.4 und 4.5 wurden nicht alle meromorphe Funktionen auf H benutzt, sondern nur solche, die bei der Definition der M-Vollständigkeit auftreten. Ist daher H K-vollständig, so gelten dieselben Sätze 4.2, 4.4, 4.5, wenn dabei nur alle holomorphe Funktionen $f \in I(H)$, die bei der Definition der K-Vollständigkeit auftreten, meromorph auf G über-

[14]) Siehe Remmert [12], Satz 14 und Remmert [13], Satz 19.

tragen werden, wenn also speziell $I(H) \subseteq K'_\tau(H)$ ist. Im Falle einer lückenlosen Abbildung in einen K-vollständigen Raum werden die Sätze 4.2, 4.3 und 4.5 trivial. Um dies zu zeigen, wird zunächst ein Hilfssatz hergeleitet.

Hilfssatz 4.1. *Ist G ein komplexer Raum und M eine dünne Teilmenge, so gibt es durch jeden Punkt $P_0 \in M$ eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit L mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$.*

Beweis. O. B. d. A. kann man G als analytische, rein n-dimensionale Teilmenge eines Gebietes G_1 des C^m mit $m > n$ annehmen. Außerdem darf man die Existenz einer höchstens $(n-1)$-dimensionalen analytischen Menge M_0 in G_1 mit $G \supsetneqq M_0 \supseteqq M$ annehmen. Man kann P_0 als Ursprung eines Koordinatensystemes in G_1 wählen. Die letzten $(m-n)$-Koordinatenachsen kann man so wählen, daß die durch sie aufgespannte Ebene G in P_0 nur isoliert schneidet. Dieses Teilkoordinatensystem kann man zu einem vollen ergänzen. Sei π die Projektion $\pi(z_1, \ldots, z_m) = (z_1, \ldots, z_n)$. Nach dem Einbettungssatz von REMMERT und STEIN [11] gibt es einen Polyzylinder U in G_1 so, daß gilt

1. $\pi(G \cap U) = \{\mathfrak{z} \mid |z_\nu| < \varepsilon$ für $\nu = 1, \ldots, n\} = U'$.
2. $\pi^{-1}(\mathfrak{z}) \cap G \cap U$ ist endlich und nicht leer für jedes $\mathfrak{z} \in U'$.
3. $\pi(M_0) = M_1$ ist analytisch in U' mit $\dim M_1 \leqq n-1$.
4. $\pi(P_0) = (0, \ldots, 0)$ mit $\pi^{-1}\pi(P_0) \cap U = \{P_0\} = \{(0, \ldots, 0)\}$.

Eine eindimensionale komplexe Ebene E durch den Nullpunkt existiert, die M_1 nur isoliert schneidet. Es ist $\tilde{L} = \pi^{-1}(E) \cap G \cap U$ analytisch in U und $\pi(\tilde{L}) = E \cap U'$. Da die Fasern der Projektion $\pi: \tilde{L} \to E \cap U'$ nicht leer und nulldimensional sind, ist $\tilde{L}$ rein eindimensional. Wegen $0 \in L$ ist $\pi^{-1}(0) \subseteq \tilde{L}$, d. h. $P_0 \in \tilde{L}$. Eine beliebig kleine Umgebung V des Nullpunktes P_0 existiert mit $\tilde{L} \cap V = \bigcup_{\varrho=1}^{r} L_\varrho$, wobei L_ϱ eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten sind, die sich paarweise in P_0 und nur in P_0 schneiden, und wobei L_ϱ in V abgeschlossen ist: $\bar{L}_\varrho \cap V = L_\varrho$. Man kann V so klein wählen, daß $E \cap \pi(\bar{V}) \cap M_1 = \{\pi(P_0)\}$ ist. Also ist $\{P_0\} = \bar{L}_\varrho \cap M_0 = L_\varrho \cap M_0$. Es ist $\bar{L}_\varrho \cap M = L_\varrho \cap M = \{P_0\}$, w.z.b.w.

Satz 4.6. *Ist H K-vollständig und τ lückenlos, so ist τ in jedem Punkt von M regulär, läßt sich also zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{\tau}: G \to H$ fortsetzen. Ist τ nicht lückenlos vorausgesetzt, dafür aber meromorph, so gilt dasselbe. (Es ist τ also dann doch lückenlos!)*

Beweis. Sei f in H holomorph. In A ist $f\tau$ holomorph. Sei $P_0 \in M$ und U eine offene Umgebung von P_0, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist. Angenommen, $f\tau$ ist auf $A \cap U$ unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $P^\nu \in U \cap A$ mit $f(\tau(P^\nu)) \to \infty$ für $\nu \to \infty$. Da $\bar{U}$ kompakt ist, kann man P^ν konvergent annehmen. Der Grenzpunkt $P_1 = \lim_{\nu \to \infty} P^\nu$ gehört zu $\bar{U}$. Ist $P_1 \in A$, so konvergiert $\tau(P^\nu) \to \tau(P_1) = Q_1$ für $\nu \to \infty$. Ist $P_1 \in M$, so kann man eine — wieder mit $\tau(P^\nu)$ bezeichnete — konvergente Teilfolge finden: $Q_1 = \lim_{\nu \to \infty} \tau(P^\nu)$. Also ist $f(Q_1) = \lim_{\nu \to \infty} f(\tau(P^\nu)) = \infty$. Widerspruch! Da $f\tau$ auf $A \cap U$ beschränkt

und M dünn ist, läßt sich $f\tau$ in U analytisch fortsetzen. Also ist $f\tau$ in jedem Punkt von M regulär, also zu einer in G analytischen Funktion f^* fortsetzbar.

Ist τ nicht lückenlos, aber meromorph und ist f holomorph auf H, so läßt sich $f\tau$ nach Satz 4.1 analytisch in G zu f^* fortsetzen.

Ist τ lückenlos, so ist $\Sigma_\tau(P_0) \neq \theta$. Ist τ lückenfrei, so gibt es eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit L mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$. Es ist $\Sigma_\tau(P_0) \supseteq \Sigma_\tau(P_0, L) \neq \theta$, also $\Sigma_\tau(P_0) \neq \theta$.

Ist nun $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} \tau(P^\nu) = Q_0$. Also ist $f(Q_0) = \lim\limits_{\nu\to\infty} f(\tau(P^\nu)) = f^*(P_0)$, d. h., f ist auf $\Sigma_\tau(P_0)$ konstant. Auf H gibt es nun holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ so, daß Q_0 isolierter Punkt der analytischen Menge $N = \bigcap\limits_{\nu=1}^{k} \{Q \mid f_\nu(Q) = f_\nu(Q_0) = f_\nu^*(P_0)\}$ ist. Da $\Sigma_\tau(P_0) \subseteq N$ ist, ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$ isolierter Punkt von $\Sigma_\tau(P_0)$. Nach Satz 1.4. besteht $\Sigma_\tau(P_0)$ aus höchstens einem Punkt. Da aber $\Sigma_\tau(P_0) \neq \theta$ ist, besteht $\Sigma_\tau(P_0)$ aus genau einem Punkt. Nach Satz 1.6 ist τ in P_0 regulär, w.z.b.w.

Natürlich wird der Satz falsch, wenn τ nicht lückenlos ist. Schwieriger ist es, das Verhalten analytischer Mengen bei meromorphen Abbildungen zu untersuchen.

Satz 4.7. Voraussetzung. *Die Abbildung τ sei meromorph. Der Bildraum H sei eine m-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. In H sei eine analytische Menge L der reinen Dimension $m-1$ gegeben.*

Behauptung. *Die in A analytische Menge $\tau^{-1}(L)$ läßt sich eindeutig in G fortsetzen.*

Beweis. O. B. d. A. kann man G und H zusammenhängend annehmen. Sei $n = \dim G$ und S die Menge der Singularitäten von τ. Sei τ_0 die analytische Fortsetzung von τ in $A_0 = G - S$. Dann ist $L_0 = \tau_0^{-1}(L)$ analytisch in A_0. Hat L_0 die Dimension n, so ist $A_0 = L_0$ und $A = \tau^{-1}(L)$. Dann ist G die Fortsetzung von $\tau^{-1}(L)$. Weiterhin kann man also $\dim L_0 < n$ annehmen. Ist L_0, also auch $\tau^{-1}(L)$ leer, so ist die Behauptung trivial. Daher kann man auch $L_0 \neq \theta$ voraussetzen. Ist $P_0 \in \tau_0^{-1}(L)$, so gibt es eine offene Umgebung V von $Q_0 = \tau_0(P_0)$ und eine in V holomorphe Funktion f mit $V \cap L = \{Q \mid f(Q) = 0,\ Q \in V\}$. Dann ist

$$L_0 \cap \tau_0^{-1}(V) = \{P \mid f(\tau_0(P)) = 0\,,\ P \in \tau_0^{-1}(V)\}\,,$$

wobei $f\tau_0$ in $\tau_0^{-1}(V) \subseteq A_0$ holomorph ist. Daher ist $\dim_P L_0 \cap \tau_0^{-1}(V) \geqq n-1$ für $P \in L_0 \cap \tau_0^{-1}(V)$. Die in A_0 analytische Menge L_0 ist also rein $(n-1)$-dimensional. Da $S = G - A_0$ dünn von der Dimension $n-1$ und fastdünn von der Dimension $n-2$ ist, läßt sich L_0 eindeutig zu $L_0^* = \bar{L}_0$ in G fortsetzen (Satz 2.8). Wegen $\bar{L}_0 \cap A = L_0 \cap A = \tau^{-1}(L)$ ist die in A analytische Menge $\tau^{-1}(L)$ eindeutig in G fortsetzbar (Satz 2.2), w.z.b.w.

Für SR-meromorphe Abbildungen gilt allgemeiner:

Satz 4.8. *Ist τ SR-meromorph und ist L analytisch in H, so ist die in A analytische Menge $\tau^{-1}(L)$ eindeutig in G fortsetzbar.*

Beweis. Sei ψ die Projektion des Graphen T von τ in G und φ die Projektion von T in H. Die Projektion $\psi: T \to G$ ist eigentlich, da τ lückenlos ist. In T ist $\varphi^{-1}(L)$ analytisch. Folglich ist $L_0 = \psi\, \varphi^{-1}(L)$ analytisch in G. Es gilt

$$L_0 \cap A = \{P \mid P \in A\,,\ (P, \tau(P)) \in \varphi^{-1}(L)\} = \{P \mid P \in A\,,\ \tau(P) \in L\} = \tau^{-1}(L)\,.$$

Nach Satz 2.2 ist $\tau^{-1}(L)$ eindeutig in G fortsetzbar, w.z.b.w.

Der Satz 4.6 legt die Vermutung nahe, daß jede meromorphe Abbildung lückenlos ist. Das ist jedoch nicht der Fall, wie ein Beispiel in § 8 zeigen wird.

§ 5. Meromorphe Abbildungen auf analytische Mengen

Ist N eine lokalanalytische Teilmenge des komplexen Raumes G, so braucht N kein komplexer Raum zu sein. Jedoch kann man trotzdem den Begriff einer holomorphen Abbildung auf N einführen. Daher ist es sinnvoll zu fragen, inwieweit man die vorhergehende Theorie der meromorphen Abbildungen auf lokalanalytische Menge übertragen kann. Wie sich zeigen wird, kann man die Theorie der meromorphen Abbildungen analytischer Menge auf die Theorie der meromorphen Abbildungen komplexer Räume zurückführen.

Eine Teilmenge M der *lokalanalytischen Menge* N des komplexen Raumes G heiße *dünn* auf N, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in M$ eine in einer Umgebung U von P_0 analytische Menge M_0 mit $N \cap U \supsetneqq M_0 \supseteqq M \cap U$ gibt, die auf $N \cap U$ nirgendsdicht ist. Es heiße $M \subseteq N$ *dünn* von der Dimension p (Codimension q) in N, wenn es zu jedem Punkt $P_0 \in M$ eine in einer Umgebung U von P_0 analytische Menge M_0 mit $N \cap U \supseteq M_0 \supseteq M \cap U$ gibt, für die $\dim M_0 \leq p$ (bzw. $\dim_P N - \dim_P M_0 \geq q$ für $P \in M_0 \cap U$) gilt.

Sei S' die Menge der reduzibeln Punkte von N. Dann heißt $S = \bar{S}' \cap N$ die *kritische Menge*[15]) von N. Es ist S dünn auf N. Der Rest $\hat{N} = N - S$ ist ein komplexer Teilraum von G.

Sei A eine offene Menge von G. Eine stetige Abbildung $\tau: N \cap A \to H$ in den komplexen Raum H heiße *holomorph*, wenn $\tau: \hat{N} \cap A \to H$ holomorph ist[15]).

Eine holomorphe Abbildung $\tau: N \cap A \to H$ heiße *schwach meromorph*, wenn $M = N - A$ dünn auf N ist und wenn für jede eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit L von G mit $L \subseteq N$ und $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$ die Streumenge $\Sigma_\tau(P_0, L)$ aus höchstens einem Punkt besteht. Enthält aber $\Sigma_\tau(P_0, L)$ genau einen Punkt, so heiße die Abbildung *meromorph*.

Eine holomorphe Abbildung $\tau: N \cap A \to H$ heiße *R-meromorph*, wenn $M = G - A$ dünn ist und wenn der Graph $T = \{(P, \tau(P)) \mid P \in N \cap A\}$ eine in $G \times H$ lokalanalytische Menge $\bar{T} \cap (N \times H)$ definiert, die der *Graph von* τ heiße. Ist dabei die R-meromorphe Abbildung lückenlos, d. h. enthält jede Folge $P^\nu \in N \cap A$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0 \in M$ eine Teilfolge P^{ν_μ}, für die $\tau(P^{\nu_\mu})$ konvergiert, so heiße die Abbildung *SR-meromorph*.

---

[15]) Siehe z. B. Remmert [13] und Cartan [3].

Zu jeder lokalanalytischen Menge N gibt es einen bis auf analytische Äquivalenz eindeutig bestimmten komplexen *Überlagerungsraum*[15] (N^*, χ), der festgelegt ist durch

1. *Durch* χ *wird* N^* *holomorph und lokaleigentlich in* G *mit* $\chi(N^*) = N$ *abgebildet. Die Faser* $\chi^{-1}\chi(Q)$ *für* $Q \in N$ *ist endlich.*

2. *Ist* S *die kritische Menge von* N, *so ist* $\chi^{-1}(S) = S^*$ *dünn in* N^* *und* $\chi: N^* - S^* \to N - S = \hat{N}$ *ist umkehrbar holomorph.*

Dieser Überlagerungsraum hat ferner die Eigenschaften:

1. *Die Anzahl der Punkte von* $\chi^{-1}(P)$ *ist die Anzahl der irreduzibeln analytischen Mengenkeime, die durch* N *in* P *erzeugt werden.*

2. *Sind* N_ν^* *die Zusammenhangskomponenten von* N^*, *so sind* $\chi(N_\nu^*)$ *die irreduzibeln Teile von* N.

Satz 5.1. *Eine stetige Abbildung* $\tau: N \cap A \to H$ *ist dann und nur dann holomorph, wenn* $\tau\,\chi: \chi^{-1}(N \cap A) \to H$ *holomorph ist*[15].

Beweis. a) *Die Abbildung* $\tau\,\chi$ *sei holomorph.* Dann ist $\tau\,\chi$ auch auf $\chi^{-1}(\hat{N} \cap A)$ holomorph. Da $\chi^{-1}: \hat{N} \cap A \to \chi^{-1}(\hat{N} \cap A)$ holomorph ist, ist auch $\tau = \tau\,\chi\,\chi^{-1}$ auf $\hat{N} \cap A$ holomorph. Da τ auf $A \cap N$ stetig ist, ist τ holomorph.

b) *Die Abbildung* τ *sei holomorph.* Dann ist $\tau\,\chi: \chi^{-1}(N \cap A) \to H$ stetig und $\tau\,\chi: \chi^{-1}(\hat{N} \cap A) \to H$ holomorph. Da $\chi^{-1}(N \cap A) - \chi^{-1}(\hat{N} \cap A) = S^* \cap \chi^{-1}(A)$ dünn ist, ist die Abbildung $\tau\,\chi$ nach dem Riemannschen Fortsetzungssatz holomorph auf $\chi^{-1}(N \cap A)$, w.z.b.w.

Für meromorphe Abbildungen gilt nun:

Satz 5.2. *Die holomorphe Abbildung* $\tau: N \cap A \to H$ *ist dann und nur dann (schwach) meromorph auf* N, *wenn die holomorphe Abbildung* $\tau\,\chi: \chi^{-1}(N \cap A) \to$ $\to H$ *auf* N^* *(schwach) meromorph ist.*

Beweis. *a) Sei* τ *schwach meromorph.* In N^* ist $M^* = N^* - \chi^{-1}(N \cap A)$ dünn. Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von N^* mit $M^* \cap L = M^* \cap \bar{L} = \{P_0\}$. Da χ lokaleigentlich ist, gibt es eine Umgebung U von P_0, so daß $L' = \chi(L \cap U)$ lokalanalytisch in G ist. Da $\chi^{-1}\chi(P)$ höchstens aus endlich vielen Punkten besteht, ist L' rein eindimensional. Es ist

$$M \cap L' = \chi(L \cap U) \cap M = \chi(L \cap U \cap M^*) = \{\chi(P_0)\}.$$

Ist $P_1 \in \bar{L}' \cap M$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in L'$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_1$. Also gibt es eine Folge $\tilde{P}^\nu \in L$ mit $\chi(\tilde{P}^\nu) = P^\nu$. Da χ lokaleigentlich ist, enthält $\tilde{P}^\nu$ eine konvergente Teilfolge $\tilde{P}^{\nu_\mu}$ mit $\lim\limits_{\mu \to \infty} \tilde{P}^{\nu_\mu} = \tilde{P}_1$. Man erhält $\chi(\tilde{P}_1) = P_1 \in M$ und $\tilde{P}_1 \in \bar{L} \cap M^*$, d. h., $\tilde{P}_1 = P_0$ und $P_1 = \chi(P_0)$. Da die Abbildung $\chi \mid L \cap U$ nicht konstant ist und L eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit mit $P_0 \in L$ ist, kann man sich die Umgebung U so gewählt denken, daß L' eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Sei $Q_0 \in \Sigma_{\tau\chi}(P_0, L)$. Dann gibt es eine Folge $P^\nu \in L \cap \chi^{-1}(N \cap A)$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty}(P^\nu, \tau\,\chi(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$. Es ist $\chi(P^\nu) \in L' \cap A$, also $Q_0 \in \Sigma_\tau(\chi(P_0), L')$. Daher enthält $\Sigma_{\tau\chi}(P_0, L)$ höchstens einen Punkt. Es ist $\tau\,\chi$ schwach meromorph.

Ist τ sogar meromorph, so wählt man eine Folge $P^\nu \in L - M^*$ mit $\lim_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0$. Es ist $\chi(P^\nu) \in L \cap A$ und $\lim_{\nu\to\infty} \chi(P^\nu) = \chi(P_0)$. Daher gibt es eine Teilfolge $\chi(P^{\nu_\mu})$ mit $\lim_{\mu\to\infty} (\chi(P^{\nu_\mu}), \tau\,\chi(P^{\nu_\mu})) = (\chi(P_0), Q_0)$. Es ist $Q_0 \in \Sigma_{\tau\chi}(P_0, L)$. Also ist $\tau\,\chi$ meromorph.

b) Sei $\tau\,\chi$ (schwach) meromorph. Sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$ und $L \subseteq N$. Dann ist $\chi^{-1}(L)$ eine eindimensionale lokalanalytische Menge in N^*. Seien $P_0^1, \ldots, P_0^r$ die Punkte von $\chi^{-1}(P_0)$. Dann gibt es eine Umgebung U von P_0, so daß $\chi^{-1}(U \cap L)$ aus endlich vielen komplexen Mannigfaltigkeiten L_ν^ϱ ($\nu = 1, \ldots, n_\varrho$; $\varrho = 1, \ldots, r$) besteht mit $L_\nu^\varrho \cap M^* = \bar{L}_\nu^\varrho \cap M^* = \{P_0^\varrho\}$, wobei L_ν^ϱ entweder nur aus dem Punkt P_0^ϱ besteht oder eindimensional ist. Sei $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0, L)$. Dann gibt es eine Folge $P^\nu \in L \cap A$ mit $\lim_{\nu\to\infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$. Da χ lokaleigentlich ist und die L_σ^ϱ nur endlich viele Mannigfaltigkeiten sind, gibt es eine Folge $\tilde{P}^{\nu_\mu} \in L_\sigma^\varrho \cap \chi^{-1}(A \cap N)$ mit $\chi(\tilde{P}^{\nu_\mu}) = P^{\nu_\mu}$ und $\lim_{\mu\to\infty}(\tilde{P}^{\nu_\mu}, \tau\,\chi(P^{\nu_\mu})) = (\tilde{P}_1, Q_0)$. Es ist $\chi(\tilde{P}_1) = P_0$, also $\tilde{P}_1 = P_0$. Folglich ist $Q_0 \in \Sigma_{\tau\chi}(P_0^\varrho, L_\sigma^\varrho)$. Man erhält

$$\Sigma_\tau(P_0, L) \subseteq \bigcup_{\varrho=1}^{r} \bigcup_{\sigma=1}^{n_\varrho} \Sigma_{\tau\chi}(P_\sigma^\varrho, L_\sigma^\varrho),$$

weshalb $\Sigma_\tau(P_0, L)$ höchstens aus endlich vielen, also höchstens aus einem Punkt besteht. Es ist τ schwach meromorph.

Ist $\tau\,\chi$ sogar meromorph und ist $P^\nu \in L \cap A$ irgend eine gegen P_0 konvergierende Folge. So gibt es ein L_σ^ϱ und eine Folge $\tilde{P}^{\nu_\mu} \in L_\sigma^\varrho - M^*$ mit $\lim_{\mu\to\infty} \tilde{P}^{\nu_\mu} = P_0^\varrho$ und $\chi(\tilde{P}^{\nu_\mu}) = P^{\nu_\mu}$. Da $\tau\,\chi$ meromorph ist, gibt es eine — wieder mit $\tilde{P}^{\nu_\mu}$ bezeichnete — Teilfolge, für die $\tau\,\chi(\tilde{P}^{\nu_\mu})$ konvergiert. Es ist $Q_0 = \lim_{\mu\to\infty} \tau\,\chi(\tilde{P}^{\nu_\mu}) = \lim_{\mu\to\infty} \tau(P^{\nu_\mu}) \in \Sigma_\tau(P_0, L)$. Daher ist τ meromorph.

Für R-meromorphe Abbildungen gilt:

Satz 5.3. *Die holomorphe Abbildung $\tau: N \cap A \to H$ ist dann und nur dann R-meromorph (SR-meromorph) auf N, wenn die Abbildung $\tau\,\chi: \chi^{-1}(N \cap A) \to H$ auf N^* R-meromorph (SR-meromorph) ist.*

Beweis. Sei $\xi: N^* \times H \to G \times H$ durch $\xi(R, Q) = (\chi(R), Q) \in N \times H$ definiert. Es ist ξ lokaleigentlich und holomorph. Jede Faser von ξ besteht nur aus endlich vielen Punkten. Sei

$$\begin{aligned} T &= \{(P, \tau(P)) \mid P \in A \cap N\}, \\ T_1 &= \bar{T} \cap (N \times H), \\ S &= \{(R, \tau\,\chi(R)) \mid R \in \chi^{-1}(A \cap N) = A^*\}. \end{aligned}$$

Die abgeschlossene Hülle $\bar{S}$ von S ist der Graph von $\tau\,\chi$. Ist $(P, Q) \in \bar{S}$, so gibt es eine Folge $R^\nu \in \chi^{-1}(A \cap N)$ mit $\lim_{\nu\to\infty}(R^\nu, \tau\,\chi(R^\nu)) = (R, Q)$. Also ist $\xi(R, Q) = \lim_{\nu\to\infty}(\chi(R^\nu), \tau\,\chi(R^\nu)) \in \bar{T} \cap (N \times H) = T_1$, d. h., $T_1 \supseteq \xi(\bar{S})$. Ist $(P, Q) \in T_1$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in A \cap N$ mit $\lim_{\nu\to\infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P, Q)$. Da χ

lokaleigentlich ist, gibt es eine Folge $\tilde{P}^{\nu_\mu}$ mit $\chi(\tilde{P}^{\nu_\mu}) = P^{\nu_\mu}$, die gegen einen Punkt $\tilde{P} \in \chi^{-1}(P)$ konvergiert. Es ist $\tilde{P}^{\nu_\mu} \in \chi^{-1}(N \cap A)$ und $\lim\limits_{\mu \to \infty}(P^{\nu_\mu}, \tau\, \chi(P^{\nu_\mu})) = (\tilde{P}, Q) \in \tilde{S}$ mit $\xi(\tilde{P}, Q) = (\chi(\tilde{P}), Q) = (P, Q)$, d. h., $T_1 \subseteq \xi(\tilde{S})$. Zusammen ergibt sich $T_1 = \xi(\tilde{S})$.

Ist also $\tau\, \chi$ R-meromorph, so ist $\tilde{S}$ analytisch, also T_1 lokalanalytisch in $G \times H$, d. h. τ ist R-meromorph auf N.

Ist $\tau\, \chi$ SR-meromorph, so ist τ zunächst R-meromorph. Sei $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0 \in M$ beliebig gewählt. Eine konvergente Folge $\tilde{P}^{\nu_\mu}$ existiert mit $\chi(\tilde{P}^{\nu_\mu}) = P^{\nu_\mu}$ und $\lim\limits_{\mu \to \infty} \tilde{P}^{\nu_\mu} = \tilde{P}_0$ mit $\chi(\tilde{P}_0) = P_0$. Also ist $\tilde{P}_0 \in M^*$ und $\tilde{P}^{\nu_\mu} \in A^*$. Da $\tau\, \chi$ SR-meromorph ist, gibt es eine — wieder mit $\tilde{P}^{\nu_\mu}$ bezeichnete — Teilfolge mit $\lim\limits_{\mu \to \infty} \tau\, \chi(\tilde{P}^{\nu_\mu}) = Q_0$. Es konvergiert $\tau(P^{\nu_\mu}) = \tau\, \chi(\tilde{P}^{\nu_\mu})$. Daher ist τ lückenlos und folglich SR-meromorph.

Ist τ R-meromorph, so ist T_1 lokalanalytisch, also ist $\xi^{-1}(T_1)$ lokalanalytisch in $N^* \times H$. Da T_1 abgeschlossen in $N \times H$ ist, ist $\xi^{-1}(T_1)$ abgeschlossen in $N^* \times H$. Folglich ist $\xi^{-1}(T_1)$ in $N^* \times H$ analytisch. O. B. d. A. kann man N irreduzibel, also N^* zusammenhängend annehmen mit $\dim N = \dim N^* = n$. Da $\xi : N^* \times H \to G \times H$ nur Fasern der Dimension Null hat, ist

$$\dim \xi^{-1}(T_1) = \dim T_1 = \dim N = \dim N^* = \dim S = n\,,$$

wobei T_1 und S irreduzibel sind. Wegen $S \subseteq \xi^{-1}(T_1)$ ist S analytisch in $N^* \times H$ fortsetzbar. Da S frei ist, wird die Fortsetzung durch $\tilde{S}$ gegeben. Die Abbildung $\tau\, \chi$ ist R-meromorph.

Ist τ SR-meromorph, also τ lückenlos und ist $P^\nu \in A^*$ eine konvergente Folge $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0 \in M^*$, so strebt $\chi(P^\nu) \to \chi(P_0)$ für $\nu \to \infty$ mit $\chi(P^\nu) \in A$ und $P_0 \in M$. Daher gibt es eine Teilfolge $\chi(P^{\nu_\mu})$, für die $\tau\, \chi(P^{\nu_\mu})$ konvergiert. Daher ist $\tau\, \chi$ lückenlos. Da außerdem $\tau\, \chi$ R-meromorph ist, ist es SR-meromorph, w.z.b.w.

Wie man speziell sieht, ist der Graph einer holomorphen Abbildung $\tau : N \to H$ lokalanalytisch. Die Sätze 5.1 bis 5.3 zeigen, daß man sich beim Studium der meromorphen Abbildungen auf komplexe Räume beschränken kann. Aus der Definition folgt sofort

Satz 5.4. *Ist $\tau : A \to H$ holomorph und meromorph (bzw. schwach, meromorph oder R-meromorph oder SR-meromorph) auf G und ist $M = G - A$ dünn in G, ist ferner N lokalanalytisch in G und $N \cap M$ dünn auf N, so ist $\tau \mid N \cap A$ meromorph (bzw. schwach meromorph bzw. R-meromorph bzw. SR-meromorph) auf N.*

(Eingegangen am 5. Mai 1958)

König, H.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 240—244 (1958)

Eine Charakterisierung der Distributionen endlicher Ordnung

Von

Heinz König in Aachen

Herrn Professor Dr. Heinrich Behnke zum 60. Geburtstag gewidmet

Im folgenden benutzen wir die von L. Schwartz[1]) eingeführten Begriffe und Bezeichnungen. Es sei D der lineare Raum der auf R^n definierten unbeschränkt stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen φ mit kompaktem Träger. Für jedes $\varrho > 0$ sei D_ϱ der Teilraum der Funktionen $\varphi \in D$, deren Träger in der abgeschlossenen Kugel $B_\varrho : |x| \leqq \varrho$ enthalten sind. Für jedes $\varphi \in D$ und jedes $m\,(m = 0, 1, 2, \ldots)$ setzen wir

$$||\varphi||_m = \operatorname{Sup}\{|D^p\varphi(x)| : x \in R^n,\ |p| = p_1 + \cdots + p_n \leqq m\}\,.$$

Eine auf R^n definierte Schwartzsche Distribution S ist genau dann eine Distribution der endlichen Ordnung m, wenn für jedes $\varrho > 0$ die obere Grenze

$$||S||_m(\varrho) = \operatorname{Sup}\{|S(\varphi)| : \varphi \in D_\varrho \text{ mit } ||\varphi||_m \leqq 1\}$$

endlich ist. In diesem Falle erhalten wir für jedes $\varphi \in D_\varrho$, indem wir bei festem $x \in R^n$ die durch $\psi_x(t) = \varphi(x - t)$ definierte Funktion $\psi_x \in D_{|x|+\varrho}$ bilden und die Relation $S(\psi_x) = (S * \varphi)\,(x)$ berücksichtigen, die Ungleichung

$$|(S * \varphi)\,(x)| \leqq ||\varphi||_m\,||S||_m(|x| + \varrho) \qquad \text{für alle } x \in R^n.$$

Hieraus folgt: Ist S eine Distribution der endlichen Ordnung m, dann gibt es zu jedem $\varrho > 0$ auf $[0, \infty)$ eine nichtnegative und monoton wachsende Funktion H mit der Eigenschaft, daß für alle Funktionen $\varphi \in D_\varrho$ gilt

$$(S * \varphi)\,(x) = O(H(|x|)) \qquad \text{für } |x| \to \infty\,;$$

man braucht nur $H(r) = ||S||_m(r + \varrho)$ zu setzen.

Diese letzte Aussage ist, wie wir in der vorliegenden Note zeigen, in verschärfter Form umkehrbar. Damit gewinnen wir eine Charakterisierung der Distributionen endlicher Ordnung S durch das Wachstumsverhalten ihrer Regularisierten $S * \varphi$ mit $\varphi \in D$ bei der Bewegung $|x| \to \infty$. Es gilt der folgende

Satz: *Es sei S eine auf R^n definierte Schwartzsche Distribution, und es gebe ein $\varrho > 0$ und auf $[0, \infty)$ eine nichtnegative und monoton wachsende Funktion H mit der Eigenschaft, daß für alle Funktionen $\varphi \in D_\varrho$ gilt*

$$(S * \varphi)\,(x) = O(H(|x|)) \qquad \textit{für } |x| \to \infty\,.$$

Dann ist S eine Distribution einer gewissen endlichen Ordnung m, und im Falle

[1]) Schwartz, L.: Théorie des Distributions I, II. Paris 1957/51.

$H \neq 0$ gilt für alle hinreichend großen m

(1) $$||S||_m(r) = O((r+\varrho)^n H(r+\varrho)) \qquad \text{für } r \to \infty\,.$$

Die Abschätzung (1) kann, wie schon das Beispiel $S = 1$ mit $H = 1$ zeigt, allgemein nicht verbessert werden. Den Gedankengang unseres Beweises entnehmen wir einer früheren Note[2]), in der es sich um Distributionen S auf der Zahlengeraden R^1 handelte, deren Träger in $[0, \infty)$ enthalten sind.

Wir betrachten eine lineare Abbildung L des Raumes D in den linearen Raum C der auf R^n definierten stetigen komplexwertigen Funktionen φ. L sei stetig in bezug auf die Topologie des induktiven Limes der D_ϱ auf D, jeder Raum D_ϱ versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in allen Ableitungen, und in bezug auf die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen B_ϱ auf C. Jede Distribution S auf R^n definiert vermittels $L\,\varphi = S * \varphi$ eine solche Abbildung L. Diese speziellen Abbildungen L sind durch ihre Vertauschbarkeit mit allen Translationen des R^n charakterisiert: Wenn die Funktionen $\varphi, \psi \in D$ durch $\psi(x) = \varphi(x - h)$ mit festem $h \in R^n$ auseinander hervorgehen, dann gilt auch $L\,\psi(x) = L\,\varphi(x - h)$.

Hilfssatz 1: *Es sei L eine stetige lineare Abbildung von D in C. Dann gibt es zu beliebigen $\varrho, \sigma > 0$ einen Index $m = m(\varrho, \sigma)$ mit der Eigenschaft, daß für alle $\varphi \in D_\varrho$ gilt*

$$|L\,\varphi(x)| \leq \operatorname{Sup}\left\{\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\,\varphi(x)\right| : x \in B_\varrho\right\} \qquad \text{für alle} \quad x \in B_\sigma.$$

Beweis: Wir nehmen an, daß die Behauptung für gewisse $\varrho, \sigma > 0$ falsch ist. Dann gibt es eine Folge von Funktionen $\varphi_m \in D_\varrho$ mit

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\,\varphi_m(x)\right| \leq 1 \qquad \text{für alle } x \in B_\varrho$$

und eine Folge von Punkten $x^m \in B_\sigma$ mit $|L\,\varphi_m(x^m)| > 1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Bei festem p folgt hieraus für alle $m \geq \operatorname{Max}(p_1, \ldots, p_n) = P$

$$|D^p\,\varphi_m(x)| \leq \frac{(2\varrho)^{mn - |p|}}{(m-p_1)!\cdots(m-p_n)!} \leq (2\varrho)^{nP-|p|}\left(\frac{(2\varrho)^{m-P}}{(m-P)!}\right)^n,$$

also die gleichmäßige Konvergenz der $D^p\,\varphi_m$ gegen Null. Die $L\,\varphi_m$ konvergieren daher auf B_σ gleichmäßig gegen Null, im Widerspruch zu $|L\,\varphi_m(x^m)| > 1$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2: *Es sei L eine stetige lineare Abbildung von D in C, und es gebe ein $\varrho > 0$ und auf $[0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion H mit $H(0) \geq 1$ mit der Eigenschaft, daß für alle Funktionen $\varphi \in D_\varrho$ gilt*

$$L\,\varphi(x) = O(H(|x|)) \qquad \text{für } |x| \to \infty\,.$$

Dann gibt es einen Index m und ein $M > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle Funktionen $\varphi \in D_\varrho$ gilt

$$|L\,\varphi(x)| \leq M\,||\varphi||_m H(|x|) \qquad \text{für alle } x \in R^n.$$

Beweis: Wir nehmen an, daß die Behauptung falsch ist. Wir wählen rekursiv eine Folge von Indizes m_j, zwei Folgen von Zahlen $M_j, S_j > 0$, eine

[2]) König, H.: Über das Wachstumsverhalten von linearen Funktionaltransformationen. Arch. Math. **9**, 94—101 (1958).

Folge von Funktionen $\varphi_j \in D_\varrho$ mit $\|\varphi_j\|_{m_j n} \leq 1$ und mit

(2) $$|L\,\varphi_j(x)| \leq S_j H(|x|) \qquad \text{für alle } x \in R^n$$

sowie eine Folge von Punkten $x^j \in R^n$ mit

(3) $$|L\,\varphi_j(x^j)| > M_j H(|x^j|)$$

$(j = 1, 2, \ldots)$ in der folgenden Weise: Im Falle $j = 1$ sei $m_1 = M_1 = 1$. Dann können wir auf Grund unserer Annahme die Funktion $\varphi_1 \in D_\varrho$ mit $\|\varphi_1\|_{m_1 n} \leq 1$ und den Punkt $x^1 \in R^n$ so wählen, daß (3) erfüllt ist. Hierauf bestimmen wir $S_1 > 0$ so, daß auch (2) erfüllt ist. Es sei nun $j \geq 2$, und die betrachteten Größen seien für $1 \leq k \leq j-1$ bereits festgelegt. Dann wählen wir einen Index $m_j > m_{j-1}$ mit

(4) $$m_j \geq m(\varrho, |x^k|) + j \qquad \text{für } 1 \leq k \leq j-1$$

und setzen

(5) $$M_j = S_1 + \cdots + S_{j-1} + 2^j + e^{2\varrho n}.$$

Hierauf können wir auf Grund unserer Annahme die Funktion $\varphi_j \in D_\varrho$ mit $\|\varphi_j\|_{m_j n} \leq 1$ und den Punkt $x^j \in R^n$ so wählen, daß (3) erfüllt ist. Und schließlich wird $S_j > 0$ so bestimmt, daß auch (2) erfüllt ist.

Wir betrachten nun die durch

$$\psi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x)$$

definierten Funktionen $\psi_k \in D_\varrho (k = 1, 2, \ldots)$. Bei festem p hat man für alle k, l mit $P \leq k < l$

$$|D^p \psi_k(x) - D^p \psi_l(x)| \leq \sum_{j=k+1}^{l} |D^p \varphi_j(x)| \leq$$

$$\leq (2\varrho)^{nP-|p|} \sum_{j=k+1}^{l} \left(\frac{(2\varrho)^{m_j - P}}{(m_j - P)!}\right)^n < (2\varrho)^{nP-|p|} \left(\sum_{j=k+1-P}^{\infty} \frac{(2\varrho)^j}{j!}\right)^n,$$

die $D^p \psi_k$ konvergieren also gleichmäßig gegen die Ableitung $D^p \psi$ der durch

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)$$

gegebenen Funktion $\psi \in D_\varrho$. Daher gilt auch

(6) $$L\,\psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} L\,\varphi_j(x).$$

Nun hat man im Falle $j > k$

$$\left|\frac{\partial^{m(\varrho, |x^k|)}}{\partial x^{m(\varrho, |x^k|)}}\,\varphi_j(x)\right| \leq \left(\frac{(2\varrho)^{m_j - m(\varrho, |x^k|)}}{(m_j - m(\varrho, |x^k|))!}\right)^n$$

und daher nach Hilfssatz 1

$$|L\,\varphi_j(x^k)| \leq \left(\frac{(2\varrho)^{m_j - m(\varrho, |x^k|)}}{(m_j - m(\varrho, |x^k|))!}\right)^n.$$

Für $k \geqq 2$ folgt hieraus und aus (2) bis (6)

$$\begin{aligned} M_k H(|x^k|) - |L\,\psi(x^k)| &< |L\,\psi(x^k) - L\,\varphi_k(x^k)| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{k-1} |L\,\varphi_j(x^k)| + \sum_{j=k+1}^{\infty} |L\,\varphi_j(x^k)| \\ &\leqq (S_1 + \cdots + S_{k-1})\,H(|x^k|) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{(2\varrho)^j}{j!}\right)^n \\ &< (S_1 + \cdots + S_{k-1} + e^{2\varrho n})\,H(|x^k|) = (M_k - 2^k)\,H(|x^k|) \end{aligned}$$

und mithin

$$|L\,\psi(x^k)| > 2^k H(|x^k|)\,,$$

im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Hilfssatz 3: *Es sei S eine auf R^n definierte Schwartzsche Distribution. Es gebe ein $\varrho > 0$, auf $[0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion H mit $H(0) \geqq 1$, einen Index m und ein $M > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle Funktionen $\varphi \in D_\varrho$ gilt*

$$|(S * \varphi)(x)| \leqq M\,\|\varphi\|_m\,H(|x|) \qquad \textit{für alle } x \in R^n.$$

Dann gibt es ein $N > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $r > 0$ und alle Funktionen $\varphi \in D_r$ gilt

$$|(S * \varphi)(x)| \leqq N\,\|\varphi\|_m (r + \varrho)^n H(|x| + r + \varrho) \qquad \textit{für alle } x \in R^n. \tag{7}$$

Beweis: Wir wählen auf der Zahlengeraden R^1 eine feste monoton wachsende und unbeschränkt stetig differenzierbare Funktion f mit $f(t) = 0$ für $t \leqq 0$ und $f(t) = 1$ für $t \geqq 1$ und setzen

$$K = \operatorname{Sup}\{|f^{(j)}(t)| : 0 \leqq t \leqq 1\,,\ 0 \leqq j \leqq m\}\,.$$

Wir ordnen ferner jedem Punkte $h \in R^n$ mit ganzzahligen Koordinaten $h_1, \ldots, h_n$ die durch

$$F_h(x) = \left(f\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}x_1 - h_1 + 1\right) - f\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}x_1 - h_1\right)\right) \cdots \\ \cdots \left(f\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}x_n - h_n + 1\right) - f\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}x_n - h_n\right)\right)$$

definierte nichtnegative Funktion $F_h \in D$ zu. Der Träger von F_h ist in der Kugel $\left|x - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}h\right| \leqq \varrho$ enthalten, und es gilt offenbar

$$\sum_h F_h(x) = 1 \qquad \text{für alle } x \in R^n. \tag{8}$$

Wir wählen nun ein festes $r > 0$ und eine Funktion $\varphi \in D_r$. In der aus (8) folgenden Zerlegung

$$\varphi(x) = \sum_h \varphi(x)\,F_h(x) = \sum_h \varphi_h(x) \qquad \text{für alle } x \in R^n \tag{9}$$

können die Funkionen $\varphi\,F_h = \varphi_h \in D$ höchstens für $\left|\frac{\varrho}{\sqrt{n}}h\right| < r + \varrho$ von Null verschieden sein. Die Anzahl der in (9) vorkommenden Summanden ist also

/6\

kleiner als

$$(10)\qquad \left(2\sqrt{n}\,\frac{r+\varrho}{\varrho}+1\right)^n < \left(\frac{3\sqrt{n}}{\varrho}\right)^n (r+\varrho)^n .$$

Ferner hat man für alle p mit $|p| \leqq m$

$$|D^p\,\varphi_h(x)| \leqq \sum_{q\leqq p}\binom{p}{q}\,||\varphi||_m\,K^n\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}\right)^{|q|} = K^n\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}+1\right)^{|p|}||\varphi||_m$$

und mithin

$$(11)\qquad ||\varphi_h||_m \leqq K^n\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}+1\right)^m ||\varphi||_m .$$

Nun liegt der Träger von φ_h in der Kugel $\left|x-\frac{\varrho}{\sqrt{n}}h\right| \leqq \varrho$ und daher der Träger der durch

$$\psi_h(x) = \varphi_h\left(x+\frac{\varrho}{\sqrt{n}}h\right)$$

definierten Funktion $\psi_h \in D$ in B_ϱ. Hieraus folgt nach Voraussetzung

$$|(S*\psi_h)(x)| \leqq M\,||\varphi_h||_m H(|x|) \qquad \text{für alle } x\in R^n$$

und mithin

$$|(S*\varphi_h)(x)| \leqq M\,||\varphi_h||_m\,H\left(\left|x-\frac{\varrho}{\sqrt{n}}h\right|\right) \leqq M\,||\varphi_h||_m\,H(|x|+r+\varrho)$$

$$\text{für alle } x\in R^n.$$

Auf Grund von (9), (10) und (11) erhalten wir daher

$$|(S*\varphi)(x)| \leqq M\,K^n\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}+1\right)^m\left(\frac{3\sqrt{n}}{\varrho}\right)^n (r+\varrho)^n\,||\varphi||_m\,H(|x|+r+\varrho)$$

$$\text{für alle } x\in R^n$$

und damit die behauptete Ungleichung (7) mit der Konstanten

$$N = M\,K^n\left(\frac{\sqrt{n}}{\varrho}+1\right)^m\left(\frac{3\sqrt{n}}{\varrho}\right)^n.$$

Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Die Behauptung unseres Satzes folgt nun unmittelbar aus den Hilfssätzen 2 und 3. In der Tat gibt es hiernach unter den Voraussetzungen des Satzes einen Index m und ein $N > 0$ mit der Eigenschaft, daß für alle $r > 0$ und alle Funktionen $\varphi \in D_r$ gilt

$$|(S*\varphi)(x)| \leqq N\,||\varphi||_m (r+\varrho)^n\,(1+H(|x|+r+\varrho)) \text{ für alle } x\in R^n.$$

Hieraus folgt insbesondere

$$|S(\varphi)| \leqq N\,||\varphi||_m (r+\varrho)^n (1+H(r+\varrho)) .$$

Es gilt mithin

$$||S||_m(r) \leqq N(r+\varrho)^n(1+H(r+\varrho)) \qquad \text{für alle } r>0 .$$

S ist also eine Distribution der endlichen Ordnung m, und im Falle $H \neq 0$ erhalten wir sofort die asymptotische Relation (1). Damit ist unser Satz bewiesen.

(Eingegangen am 6. September 1958)

GRAUERT, H. und REMMERT, R.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 245—318 (1958)

Komplexe Räume*

Von

HANS GRAUERT in Princeton, N. J., und REINHOLD REMMERT in Münster, Westf.

Unserem Lehrer, HEINRICH BEHNKE, in Dankbarkeit und Verehrung zum 60. Geburtstag gewidmet

Inhalt

Einleitung

1. In der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen hat man schon sehr früh mehrdeutige holomorphe Funktionen untersucht. Wie in der klassischen Funktionentheorie ist man jedoch auch hier bald der Idee RIEMANNs gefolgt, die mehrdeutigen Funktionen auf mehrblättrigen Gebieten über dem n-dimensionalen komplexen Zahlenraum C^n zu betrachten. Eine erste Beschreibung dieser sog. Riemannschen Gebiete wurde 1932 von H. CARTAN und P. THULLEN [5] gegeben; jedoch wurden vorerst alle Verzweigungspunkte von der Betrachtung ausgeschlossen. Noch im gleichen Jahr machte C. CARATHÉODORY [4] in seinem Vortrag auf dem Kongreß in Zürich den Vorschlag, ähnlich wie im Fall $n = 1$ eine allgemeine Theorie der holomorphen und meromorphen Funktionen auf abstrakten Riemannschen Gebieten beliebiger Dimension aufzubauen. Die Carathéodorysche Definition des abstrakten Riemannschen Gebietes wurde später von O. TEICHMÜLLER [33] und vor allem

* Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit wurde in einer CR-Note der Verff. angekündigt; vgl. [18]

von H. HOPF [22] vereinfacht; der so wiederentdeckte Begriff ist heute unter dem Namen „komplexe Mannigfaltigkeit" allgemein bekannt.

Bereits aus den Anfängen der klassischen algebraischen Geometrie weiß man, daß algebraische Mengen sog. nichtuniformisierbare Punkte aufweisen können: es kann Punkte geben, die keine Umgebungen von der analytischen Struktur der Hyperkugel besitzen. Algebraische Mengen sind also im allgemeinen keine komplexen Mannigfaltigkeiten. Die spezielle algebraische Menge $w^2 - z_1 z_2 = 0$, auf der der Nullpunkt ein nichtuniformisierbarer Punkt ist, kann als das natürliche analytische Gebilde der 2-deutigen holomorphen Funktion $\sqrt{z_1 z_2}$ aufgefaßt werden; das zeigt, daß die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen im allgemeinen nicht überall die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit haben können. Komplexe Mannigfaltigkeiten sind also noch keineswegs die echten höherdimensionalen Analoga der Riemannschen Flächen.

2. Im Jahr 1951 wurden erstmals — und zwar von H. BEHNKE und K. STEIN [1] einerseits und von H. CARTAN [7] andererseits — Verallgemeinerungen des Begriffs der komplexen Mannigfaltigkeit gegeben, die den funktionentheoretischen Belangen gerecht werden. Die von den genannten Autoren vorgeschlagenen Begriffe werden heute beide als komplexe Räume bezeichnet (espace analytique). Komplexe Räume im Sinne von H. BEHNKE und K. STEIN besitzen lokal die Struktur einer *analytischen Überlagerung* eines Gebiets im C^n: unter einer analytischen Überlagerung eines Gebietes $G \subset C^n$ wird dabei eine endlich-blättrige und unbegrenzte, aber verzweigte Überlagerung von G verstanden, bei der alle Verzweigungspunkte über einer in G analytischen Menge liegen[1]). Komplexe Räume im Sinne von H. CARTAN besitzen lokal die Struktur einer *normalen* analytischen *Menge*[2]); dabei heißt eine analytische Menge normal, wenn in jedem ihrer Punkte der Ring der auf die Menge beschränkten holomorphen Funktionen ganz abgeschlossen in seinem Quotientenring ist.

Der Cartansche Begriff wurde später von J. P. SERRE [31] noch verallgemeinert; komplexe Räume im Sinn von SERRE können lokal die Struktur einer beliebigen analytischen Menge haben. Solche Serreschen Räume werden in dieser Arbeit kurz β-Räume genannt; die spezielleren Cartanschen Räume nennen wir β_n-Räume. Komplexe Räume im Sinne von H. BEHNKE und K. STEIN bezeichnen wir als α-Räume.

Eine sinnvolle und befriedigende Funktionentheorie konnte bislang nur in β-Räumen entwickelt werden. Unter anderem hat man die allgemeine Theorie der kohärenten analytischen Garben lediglich über β-Räumen auf-

1) H. BEHNKE und K. STEIN benutzen in ihrer Definition die Terminologie der simplizialen Topologie; sie postulieren insbesondere, daß die analytischen Überlagerungen Pseudomannigfaltigkeiten im Sinne von [29] sind. Inzwischen wurde diese Definition von den Verff. [15] wesentlich vereinfacht; die Charakterisierung der analytischen Überlagerungen geschieht ohne Benutzung der Begriffe der kombinatorischen Topologie.

2) Die ursprünglich von H. CARTAN gegebene Definition ist etwas anders und macht Gebrauch von der Tatsache, daß es zu jeder analytischen Menge einen sog. Parameterraum gibt.

bauen können. Andererseits treten bei „analytischen Zerlegungen" — selbst von komplexen Mannigfaltigkeiten — als Quotientenräume komplexe α-Räume auf, von denen sich nicht ohne weiteres zeigen läßt, daß sie auch β-Räume sind (vgl. [32], p. 89). Es ist daher wichtig, Beziehungen zwischen α-Räumen und β-Räumen nachzuweisen. Aus dem in [28] hergeleiteten Einbettungssatz ergibt sich zunächst leicht (vgl. Satz 30), daß jeder β_n-Raum ein α-Raum ist; der ursprüngliche Cartansche Begriff des komplexen Raumes subsummiert sich somit unter den Begriff des komplexen Raumes von H. Behnke und K. Stein. Indessen zeigt sich, daß umgekehrt alle α-Räume, die zugleich β-Räume sind, eine spezielle Eigenschaft haben: sie tragen lokal die Struktur von sog. *algebroiden Überlagerungen*. Algebroide Überlagerungen sind solche analytischen Überlagerungen, deren Verzweigungsverhalten im Kleinen durch das Verzweigungsverhalten einer algebroiden, d. h. mehrdeutigen holomorphen Funktion realisiert werden kann[3]). Solche speziellen α-Räume nennen wir α_c-Räume; es folgt wiederum leicht aus einem grundlegenden Satz von K. Oka, daß jeder α_c-Raum ein β_n-Raum ist.

Als Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ergibt sich nun:

Jeder α-Raum ist ein α_c-Raum.

Damit wird eine bereits von H. Behnke und K. Stein in [1] aufgeworfene Frage beantwortet (vgl. p. 6); insbesondere folgt, daß die Definitionen des komplexen Raumes, wie sie von H. Behnke und K. Stein sowie von H. Cartan gegeben wurden, äquivalent sind. Die Klasse der α-Räume ist also eine echte Teilmenge der Klasse der β-Räume.

3. Es sei nun ein kurzer Überblick über den Inhalt und Aufbau der vorliegenden Arbeit gegeben. In § 1 sind die für uns wichtigen Begriffe und Sätze aus der allgemeinen Topologie sowie aus der lokalen Theorie der analytischen Mengen zusammengestellt (Dimension, lokalirreduzibel, Einbettungssatz usw.). Der Begriff der analytischen Überlagerung wird in § 2 definiert; die topologische Struktur solcher Überlagerungen wird weitgehend geklärt. In § 3 sind die Grundlagen der Funktionentheorie auf analytischen Überlagerungen dargestellt; der für die Anwendungen wichtige Riemannsche Fortsetzungssatz wird für holomorphe und meromorphe Funktionen bewiesen. § 4 enthält alsdann die exakte Definition des α-Raumes. α-Räume, versehen mit der Garbe der Keime der holomorphen Funktionen, werden nun als geringte Räume aufgefaßt; § 5 gibt eine Einführung in die Theorie solcher Räume[4]). Insbesondere werden „morphe" Vektorraumbündel über geringten Räumen studiert; weiter werden Bilder und Urbilder von „morphen" Garben bezüglich „morpher" Abbildungen eingeführt[5]). Als spezielle geringte Räume

[3]) In [18] wurden solche Überlagerungen Cartansche Überlagerungen genannt. In einigen früheren Arbeiten heißen sie C-Überlagerungen.

[4]) Bereits H. Weyl faßt in seinem 1913 erschienenen Buche „Die Idee der Riemannschen Fläche" Riemannsche Flächen als geringte Räume auf, vgl. insbesondere p. 36. Später hat C. Chevalley [11] die reell-analytischen Mannigfaltigkeiten durch ihre geringte Struktur charakterisiert. Den allgemeinen Begriff des geringten Raumes hat H. Cartan [10] eingeführt.

[5]) Zu diesen Begriffen vgl. auch [19].

werden sodann in § 6 die β-Räume definiert. β-Räume, deren Strukturgarbe eine Garbe von Integritätsringen ist, nennen wir β_i-Räume; ist jeder Integritätsring ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper, so ist der β_i-Raum ein β_n-Raum. In § 7 wird die Struktur von β-Räumen näher untersucht, es wird bewiesen:

a) *Für einen β-Raum gilt der Riemannsche Fortsetzungssatz für holomorphe Funktionen genau dann, wenn er ein β_n-Raum ist*[6]).

b) *Zu jedem β-Raum R gibt es einen eindeutig bestimmten β_n-Raum R^*, der durch eine holomorphe, außerhalb einer in R^* nirgends dichten analytischen Menge biholomorphe Abbildung auf R bezogen ist (Normalisierung von R).*

Der Vektorraum $H^0(R, \mathcal{O})$ der Schnittflächen in der Strukturgarbe $\mathcal{O}$ eines β-Raumes R, d. h. der Raum der in R holomorphen Funktionen, wird in § 8 untersucht. Es wird gezeigt:

c) *Der Vektorraum $H^0(R, \mathcal{O})$ ist, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, vollständig, d. h. ist f_ν eine Folge von in R holomorphen Funktionen, die kompakt gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist f holomorph in R*[7]).

In § 9 wird ein bekannter Satz von F. HARTOGS auf β-Räume verallgemeinert. Es gilt:

d) *Eine komplex-wertige Funktion f auf dem cartesischen Produkt $X_1 \times X_2$ zweier β-Räume X_1, X_2 ist bereits dann holomorph auf $X_1 \times X_2$, wenn jede Funktion $f \mid x_1 \times X_2$ und $f \mid X_1 \times x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ beliebig, holomorph ist*[8]).

In § 10 wird gezeigt, daß die Klasse der α_c-Räume mit der Klasse der β_n-Räume übereinstimmt. Die restlichen Paragraphen sind dann dem Hauptanliegen der vorliegenden Arbeit gewidmet; in ihnen wird bewiesen, daß jeder α-Raum ein α_c-Raum ist. In § 11 werden vorbereitend verschiedene Typen von analytischen Überlagerungen untersucht. Unter einer a-Überlagerung verstehen wir spezielle analytische Überlagerungen über Produkten $G^n \times P^1$, wo G^n ein Gebiet im C^n und P^1 die Riemannsche Zahlenkugel ist. Es wird gezeigt, daß man zu jeder a-Überlagerung von $G^n \times P^1$ stets eine in G^n höchstens $(n-2)$-dimensionale analytische Menge A finden kann, so daß die Überlagerung, beschränkt auf $(G^n - A) \times P^1$, lokal äquivalent zu einer sog. b-Überlagerung ist; diese b-Überlagerungen haben, obgleich sie $(n+1)$-dimensional sind, keine „kompliziertere Verzweigungsstruktur" als 2-dimensionale analytische Überlagerungen. Noch einfacher verzweigt als b-Überlagerungen sind die sog. c-Überlagerungen; es wird bewiesen, daß über jeder b-Überlagerung eine analytische Überlagerung existiert, die biholomorph auf eine c-Überlagerung abgebildet werden kann. Es läßt sich nun unter Verwendung des verallgemeinerten σ-Prozesses zeigen, daß jede c-Überlagerung algebroid ist (vgl. § 14). Daraus ergibt sich unmittelbar, daß auch jede b-Überlagerung

[6]) Dagegen läßt sich zeigen, daß der Riemannsche Fortsetzungssatz für meromorphe Funktionen in jedem β-Raum gilt.

[7]) Dieser Satz ist für beliebige β-Räume nicht trivial.

[8]) Das cartesische Produkt zweier β-Räume kann in natürlicher Weise wieder als ein β-Raum aufgefaßt werden (vgl. § 6).

algebroid ist (§ 11). Jede a-Überlagerung von $G^n \times P^1$ ist daher über $(G^n - A) \times \times P^1$ algebroid. In den §§ 12. 13 wird sodann aus diesem Resultat unter Verwendung der Theorie der kohärenten analytischen Garben der allgemeine Satz für a-Überlagerungen abgeleitet. Da aber a-Überlagerungen schon so verzweigt sind wie allgemeine analytische Überlagerungen, folgt hieraus, daß jeder α-Raum ein α_e-Raum ist.

Es sei uns gestattet, an dieser Stelle unseren verehrten Lehrern, den Herren Professoren Dr. Heinrich Behnke und Dr. Karl Stein, für die Anregungen zu der vorliegenden Untersuchung zu danken. Von ihnen wurden wir auf die Möglichkeit aufmerksam gemacht, unser Hauptproblem durch Untersuchung analytischer Überlagerungen von $G^n \times P^1$ — das sind Scharen kompakter Riemannscher Flächen — zu lösen.

§ 1. Allgemeine Vorbereitungen

1. Wir benötigen in dieser Arbeit ein Kriterium über die Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen. Ist A^* ein überall dichter Teilraum eines topologischen Raumes A und $\tau^*: A^* \to A_1$ eine stetige Abbildung von A^* in einen regulären Hausdorffschen Raum A_1, so ist bekanntlich τ^* genau dann in eindeutiger Weise zu einer stetigen Abbildung $\tau: A \to A_1$ von ganz A in A_1 fortsetzbar, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist (vgl. [2], théorème 1, p. 54):

Fortsetzbarkeitsbedingung: Ist $a \in A$ irgendein Punkt und $\mathfrak{U}(a)$ der Nachbarschaftsfilter von a, so konvergiert die τ^*-Bildfilterbasis $\tau^*(\mathfrak{U}_{A^*}(a))$ der Spurenfilterbasis $\mathfrak{U}_{A^*}(a)$ von $\mathfrak{U}(a)$ auf A^* in A_1[9]).

Wir geben im folgenden ein einfaches Kriterium dafür an, daß diese Fortsetzbarkeitsbedingung erfüllt ist. Wir definieren zunächst:

Definition 1 (Nicht zerlegende Menge, nirgends zerlegende Menge): Eine nirgends dichte Teilmenge S eines topologischen Raumes A zerlegt A nicht in einem Punkt $a \in A$, wenn jede zusammenhängende Umgebung U von a eine Umgebung V von a enthält, so daß $V - S$ offen und zusammenhängend ist.

S zerlegt A nirgends, wenn S den Raum A in jedem Punkt $a \in A$ nicht zerlegt.

Es folgt sofort: *Zerlegt S den Raum A nirgends und ist $T \subset S$ eine abgeschlossene Menge in A, so zerlegt auch T den Raum A nirgends.*

Wir beweisen nun:

Satz 1: Es sei A ein topologischer, lokal zusammenhängender Raum und S eine A nirgends zerlegende Menge; A_1 sei ein regulärer Hausdorffscher Raum. Dann ist für eine stetige Abbildung $\tau^*: A^* \to A_1$, $A^* := A - S$, die Fortsetzbarkeitsbedingung sicher dann erfüllt, wenn die folgenden beiden Bedingungen statthaben:

α) Für jedes $a \in S$ ist die Menge B_a der Berührungspunkte der Bildfilterbasis $\tau^*(\mathfrak{U}_{A^*}(a))$ diskret in A_1.

---

[9]) In der Terminologie folgen wir, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, N. Bourbaki. „Voisinage“ ist mit Nachbarschaft übersetzt; eine offene Nachbarschaft wird Umgebung genannt.

β) Ist $a \in S$ und $A_1' \subset A_1$ so beschaffen, daß die Spurenfilterbasis von $\tau^*(\mathfrak{U}_{A^*}(a))$ auf A_1' existiert, so besitzt dieselbe wenigstens einen Berührungspunkt.

Beweis: Wegen β) ist keine Menge B_a, wo $a \in S$, leer. Wir wählen zu den Punkten $a_1 \in B_a$ paarweise disjunkte Umgebungen $U(a_1)$ und setzen $V(a_1) := \overset{-1}{\tau}{}^*(U(a_1))$. Dann muß es eine Nachbarschaft V_0 von a geben mit $V_0 \cap A^* \subset \bigcup_{a_1 \in B_a} V(a_1)$. Wäre das nämlich nicht der Fall, so wäre keine der Mengen $\tau^*(W \cap A^*) \cap (A_1 - \bigcup_{a_1 \in B_a} U(a_1))$, wo $W \in \mathfrak{U}(a)$, leer. Daher existiert die Spurenfilterbasis von $\tau^*(\mathfrak{U}_{A^*}(a))$ auf $A_1 - \bigcup_{a_1 \in B_a} U(a_1)$; dieselbe müßte nach β) einen Berührungspunkt $a^* \in A_1$ besitzen. Das ist aber nicht möglich, da notwendig gelten müßte $a^* \in B_a$, was nicht sein kann. Wir können nun V_0 insbesondere so wählen, daß $V_0 \cap A^*$ zusammenhängend ist. Dann liegt $\tau^*(V_0 \cap A^*)$ in genau einer Menge $U(a_1')$, $a_1' \in B_a$. Hieraus folgt aber, daß gilt: $B_a = \{a_1'\}$. Es bleibt zu zeigen, daß $\tau^*(\mathfrak{U}_{A^*}(a))$ gegen a_1' konvergiert. Sei U' irgendeine Umgebung von a_1'. Dann muß wenigstens eine der Mengen $\tau^*(W \cap A^*) \cap (A_1 - U')$, wo $W \in \mathfrak{U}(a)$, leer sein, da sich sonst analog wie oben aus β) ein Widerspruch ergibt. Also gibt es ein $W_0 \in \mathfrak{U}(a)$ mit $\tau^*(W_0 \cap A^*) \subset U'$. Das bedeutet aber, daß $\tau^*(\mathfrak{U}_{A^*}(a))$ gegen a_1' konvergiert, w.z.b.w.

Anmerkung: Die Bedingung β) ist sicher erfüllt, wenn folgendes gilt:

β') Es gibt zu jedem Punkt $a \in S$ eine Nachbarschaft $U(a)$ und eine in A_1 kompakte Menge K_a, so daß $\tau^*(U(a) \cap A^*) \subset K_a$.

Eine stetige Abbildung möge *nirgends entartet* genannt werden, wenn die Urbildmenge eines jeden Bildpunktes eine diskrete Menge ist. Dann ergibt sich aus Satz 1 unmittelbar der folgende, bereits von K. STEIN (vgl. [32], p. 68) bewiesene

Satz 2: Es sei A ein topologischer, lokal zusammenhängender Raum und S eine A nirgends zerlegende Menge. $\tau^* : A^* \to A_1$, wo $A^* := A - S$, sei eine stetige Abbildung in einen lokal kompakten Raum A_1. Es existiere eine eigentliche nirgends entartete Abbildung $\varphi : A_1 \to A_2$ von A_1 in einen lokal kompakten Raum A_2, so daß $\varphi \circ \tau^* : A^* \to A_2$ zu einer stetigen Abbildung $\psi : A \to A_2$ fortsetzbar ist. Dann ist auch τ^* eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\tau : A \to A_1$ fortsetzbar.

Beweis: Da A_1 insbesondere ein regulärer Hausdorffscher Raum ist (vgl. [2], p. 98), genügt es zu zeigen, daß für τ^* die Bedingungen α) und β') erfüllt sind. Es sei $a \in S$ ein beliebiger Punkt. Für jeden Berührungspunkt a_1 von $\tau^*(\mathfrak{U}_{A^*}(a))$ gilt dann $\varphi(a_1) = \psi(a)$, so daß die Menge B_a aller dieser Berührungspunkte in $\overset{-1}{\varphi}(\psi(a))$ enthalten ist. Die Menge $\overset{-1}{\varphi}(\psi(a))$ ist aber diskret (sogar endlich) in A_1, mithin ist auch B_a diskret.

Um β') zu bestätigen, sei K_2 eine kompakte Nachbarschaft von $\psi(a)$. Dann ist $\overset{-1}{\psi}(K_2)$ eine Nachbarschaft von a, weiter ist $\overset{-1}{\varphi}(K_2)$ kompakt in A_1 und es gilt: $\tau^*(\overset{-1}{\psi}(K_2) \cap A^*) \subset \overset{-1}{\varphi}(K_2)$. — Damit ist Satz 2 bewiesen.

2. Wir werden später benötigen

Hilfssatz 1: Es sei $\varphi : A \to A_1$ eine stetige nirgends entartete Abbildung eines lokal kompakten Raumes A in einen lokal kompakten Raum A_1. $a \in A$ sei ein

beliebiger Punkt; U' bzw. V_1' sei eine Nachbarschaft von a bzw. $\varphi(a)$. Dann gibt es Umgebungen U bzw. V_1 von a bzw. $\varphi(a)$ mit $U \subset U'$, $V_1 \subset V_1'$, so daß $\varphi: U \to V_1$ eine eigentliche Abbildung von U in V_1 ist[10]).

Beweis: Es sei $\bar{U} \subset U'$ eine kompakte Nachbarschaft von a. Da φ nirgends entartet ist, gibt es höchstens endlich viele von a verschiedene Punkte $a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}$ in $\bar{U}$ mit $\varphi(a^{(\varrho)}) = \varphi(a) =: a_1$, $\varrho = 1, \ldots, r$. Man kann dann eine Umgebung W von $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(r)}\}$ finden, so daß $U^* := \bar{U} - W$ eine kompakte Nachbarschaft von a ist. Da $U^* \cap \overset{-1}{\varphi}(\varphi(a)) = a$, so gilt also: $a_1 \notin \varphi(U^* - \mathring{U}^*)$, wenn wir mit $\mathring{U}^*$ den offenen Kern von U^* bezeichnen. $\varphi(U^* - \mathring{U}^*)$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt und mithin abgeschlossen in A_1. Daher gibt es eine Umgebung V_1 von a_1 mit $V_1 \subset V_1'$, so daß $V_1 \cap \varphi(U^* - \mathring{U}^*)$ leer ist. Wir setzen nun: $U := \overset{-1}{\varphi}(V_1) \cap \mathring{U}^* = \overset{-1}{\varphi}(V_1) \cap U^*$ und behaupten, daß $\varphi \mid U$ eine eigentliche Abbildung von U in V_1 ist.

Sei M kompakt in V_1. Die Menge $N := \overset{-1}{\varphi}(M) \cap U$ ist genau dann kompakt in U, wenn jeder Filter $\mathfrak{F}$ auf N einen Berührungspunkt in N hat. Sicher hat $\mathfrak{F}$ in $U^* \supset N$ einen Berührungspunkt a^*. Der Bildfilter $\varphi(\mathfrak{F})$ von $\mathfrak{F}$ auf M hat dann aus Stetigkeitsgründen den Berührungspunkt $\varphi(a^*)$. Es gilt $\varphi(a^*) \in M$, da M abgeschlossen ist. Es folgt mithin $a^* \in N$, q.e.d.

Eine stetige Abbildung $w: \langle 0,1 \rangle \to A$ des abgeschlossenen Einheitsintervalls $\langle 0,1 \rangle$ der reellen Zahlengeraden in einen topologischen Raum A heißt ein *Weg* in A; $w(0)$ bzw. $w(1)$ heißt der Anfangspunkt bzw. Endpunkt dieses Weges. Ein topologischer Raum A heißt *in bezug auf Wege zusammenhängend* (kurz: *wegzusammenhängend*), wenn es zu 2 beliebigen Punkten $a_0, a_1 \in A$ einen Weg w in A mit $w(0) = a_0$, $w(1) = a_1$ gibt. A heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jeder Punkt a eine Nachbarschaftsbasis $\{V_\iota\}$ mit wegzusammenhängenden Mengen V_ι besitzt; dann besitzt jeder Punkt a auch eine Umgebungsbasis mit solchen Mengen. — Man beweist leicht:

a) *Jeder wegzusammenhängende Raum A ist zusammenhängend. Ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Raum ist wegzusammenhängend.*

Weiter gilt:

a') *Es sei A ein topologischer Raum; M sei eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge in A, so daß $A - M$ lokal wegzusammenhängend ist. Zu jedem Punkt $a \in M$ gebe es eine Umgebungsbasis $\{U_\iota\}$, $\iota \in I_a$, so daß jeder Punkt $\hat{a} \in U_\iota - M$, $\iota \in I_a$, in U_ι mit a durch einen Weg verbindbar ist. Dann ist A lokal wegzusammenhängend.*

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß jede Umgebung U_ι wegzusammenhängend ist. Dazu hat man nur zu zeigen, daß jeder Punkt $a' \in U_\iota$ mit a in U_ι durch einen Weg verbindbar ist. Für Punkte $a' \in U_\iota - M$ ist das nach Voraussetzung richtig. Sei also $a' \in M$. Ist dann $\{V_j\}$, $j \in I_{a'}$, die zu a' gemäß Voraussetzung existierende Umgebungsbasis, so gibt es zu jedem $\iota \in I_a$ ein $j(\iota) \in I_{a'}$, so daß $V_{j(\iota)} \subset U_\iota$. Da nun a' in $V_{j(\iota)} \subset U$ durch einen Weg mit jedem Punkt $\tilde{a}' \in V_{j(\iota)} - M$ verbunden werden kann, läßt sich a' auch mit a selbst in U_ι über ein solches $\tilde{a}'$ durch einen Weg verbinden.

[10]) Vgl. auch [32], Hilfssatz 3, wo eine noch allgemeinere Aussage bewiesen wird.

Wir merken noch an:

b) *Eine abgeschlossene nirgends dichte Teilmenge eines lokal wegzusammenhängenden Raumes A zerlegt A genau dann nirgends, wenn folgendes gilt: Ist $D \subset A$ offen und zusammenhängend, so ist auch $D - S$ zusammenhängend.*

Der Beweis ist trivial und sei dem Leser überlassen.

Eine Abbildung $\varphi : A \to A_1$ eines topologischen Raums A in einen topologischen Raum A_1 heißt *offen*, wenn das Bild $\varphi(V)$ einer jeden offenen Menge $V \subset A$ offen in A_1 ist. Wir beweisen das folgende

Lemma: Es seien A, A_1 lokal kompakt, A_1 sei lokal wegzusammenhängend. $\varphi : A \to A_1$ sei stetig und nirgends entartet; es sei $S_1 \subset A_1$ eine A_1 nirgends zerlegende Menge, so daß $\overset{-1}{\varphi}(S_1)$ nirgends dicht in A liegt. Ist dann $\varphi : A - \overset{-1}{\varphi}(S_1) \to A_1 - S_1$ offen, so ist auch $\varphi : A \to A_1$ offen.

Beweis: Es genügt, folgendes zu zeigen: Ist $a \in A$ beliebig, so gibt es zu jeder Umgebung U' von a eine Umgebung W_1 von $\varphi(a)$ mit $\varphi(U') \supset W_1$. Wir wählen zunächst eine in U' enthaltene abgeschlossene Nachbarschaft U^* von a. Es gibt dann nach Hilfssatz 1 eine relativ kompakte Umgebung U von a mit $U \subset U^*$ und eine Umgebung V_1 von $\varphi(a)$, so daß $\varphi \mid U$ eine eigentliche Abbildung von U in V_1 ist. Wir wählen weiter eine wegzusammenhängende Umgebung W_1 von $\varphi(a)$ mit $W_1 \subset V_1$ und behaupten: $\varphi(\overline{U}) \supset W_1$. Dann gilt wegen $\overline{U} \subset U^* \subset U'$ erst recht: $\varphi(U') \supset W_1$.

Wir zeigen zunächst: $\varphi(U) \supset W_1 - S_1$. Es sei $\hat{a} \in U - \overset{-1}{\varphi}(S_1)$ irgendein Punkt mit $\varphi(\hat{a}) = \hat{a}_1 \in W_1 - S_1$. Ist dann $a_1 \in W_1 - S_1$ beliebig, so sei $w(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, ein Weg in $W_1 - S_1$ mit $w(0) = \hat{a}_1$, $w(1) = a_1$: ein solcher Weg existiert, da S_1 den Raum A_1 nirgends zerlegt. Es bezeichne T die Menge aller $\bar{t} \in \langle 0, 1 \rangle$, zu denen es ein $\bar{a} \in U$ mit $\varphi(\bar{a}) = w(\bar{t})$ gibt. Dann gilt $0 \in T$. Da $\overset{-1}{\varphi}(w(\langle 0, 1 \rangle)) \subset A - \overset{-1}{\varphi}(S_1)$ und $\varphi \mid A - \overset{-1}{\varphi}(S_1)$ offen ist, folgt sofort, daß T eine offene Teilmenge von $\langle 0, 1 \rangle$ ist. T ist aber auch abgeschlossen. Es gilt nämlich: $T = \overset{-1}{w}(\varphi(\overset{-1}{\varphi}(w\langle 0, 1 \rangle) \cap U))$; und da $\overset{-1}{\varphi}(w\langle 0, 1 \rangle) \cap U$ wegen der Eigentlichkeit von $\varphi : U \to V_1$ kompakt ist, folgt, daß $\varphi(\overset{-1}{\varphi}(w\langle 0,1 \rangle) \cap U)$ und dann auch T abgeschlossen ist. Mithin muß gelten: $T = \langle 0, 1 \rangle$. Daher besitzt auch $a_1 = w(1)$ ein φ-Urbild in U.

Sei nun $a_1' \in W_1$ beliebig. Wir betrachten das Mengensystem $\mathfrak{F}_1 := \{U_1 - S_1\}$, wo U_1 den Nachbarschaftsfilter von a_1' durchläuft. $\mathfrak{F}_1$ ist eine Filterbasis, die gegen a_1' konvergiert. Auf Grund des bereits Bewiesenen ist keine Menge $\overset{-1}{\varphi}(U_1 - S_1) \cap U$ leer. Die Urbildfilterbasis $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{F}_1)$ existiert also und hat, da U relativ kompakt ist, mindestens einen Berührungspunkt a' in $\overline{U}$. Aus Stetigkeitsgründen ist $\varphi(a')$ ein Berührungspunkt von $\mathfrak{F}_1$. Da $\mathfrak{F}_1$ aber nur a_1' als Berührungspunkt hat, muß gelten: $\varphi(a') = a_1'$. Mithin folgt $\varphi(\overline{U}) \supset W_1$, w.z.b.w.

3. Wir stellen in den weiteren Abschnitten dieses Paragraphen grundlegende Begriffe und Sätze aus der Theorie der analytischen Mengen zusammen, die wir später benötigen[11]). Es bezeichne B stets einen Bereich, d. h. eine

[11]) Zur Theorie der analytischen Menge vgl. etwa [26], [28] sowie [9], Exp. VI—IX.

offene nichtleere Menge des komplexen Zahlenraumes C^n der n komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$; wir setzen abkürzend $z := (z_1, \ldots, z_n)$. Eine Teilmenge M von B heißt bekanntlich analytisch in einem Punkt $z \in B$, wenn es eine Umgebung $U \subset B$ von z gibt, so daß $M \cap U$ die genaue gemeinsame Nullstellenmenge von endlich vielen in U holomorphen Funktionen ist[12]). M heißt eine analytische Menge in B, wenn M in jedem Punkt von B analytisch ist. Ist M analytisch in B, so ist M abgeschlossen in B. Es gilt:

c) *Ist M analytisch in B, so ist M, versehen mit der induzierten Topologie, ein metrisierbarer, lokal kompakter, lokal wegzusammenhängender Raum mit abzählbarer Topologie.*

Ist M analytisch in $z \in B$, so definiert M in natürlicher Weise ein Ideal $\mathfrak{J}_z$ im Integritätsring $\mathcal{O}_z$ der in z analytischen Funktionskeime: $\mathfrak{J}_z$ besteht aus allen Funktionskeimen, die holomorphe Repräsentanten besitzen, die in der Umgebung von z auf M verschwinden. Ist M analytisch in B, so ist die Kollektion $\{\mathfrak{J}_z, z \in B\}$ offensichtlich eine Idealgarbe $\mathfrak{J}$, die eine analytische Untergarbe der Garbe $\mathcal{O}(B)$ der in B holomorphen Funktionskeime ist.

Eine in B analytische Menge M heißt *reduzibel* in B, wenn sie darstellbar ist als Vereinigung von zwei in B analytischen Mengen, die nicht leer und von M verschieden sind. Eine in B nicht reduzible analytische Menge heißt *irreduzibel* in B.

Eine in $z \in C^n$ analytische Menge M erzeugt in z einen (evtl. leeren) Mengenkeim m_z, den wir einen analytischen Mengenkeim nennen. Die Gesamtheit aller in einem Punkt $z \in C^n$ analytischen Mengenkeime bildet einen Verband, die Menge aller analytischen Mengenkeime $\{m_z, z \in B\}$ kann in natürlicher Weise als eine *Garbe* $\mathfrak{R}(B)$ *von Verbänden über* B aufgefaßt werden. Die Schnittflächen in $\mathfrak{R}(B)$ über einer offenen Menge $B' \subset B$ sind genau die analytischen Mengen in B'.

Ein analytischer Mengenkeim m_z in z heißt ein *analytischer Primkeim*, wenn er nicht als Vereinigung von zwei nichtleeren, von m_z verschiedenen analytischen Mengenkeimen in z darstellbar ist. Eine analytische Menge M in B heißt irreduzibel in $z \in M$, wenn sie in z einen analytischen Primkeim erzeugt. M heißt *lokal irreduzibel* in $z \in M$, wenn es eine Umgebung U von z gibt, so daß M in jedem Punkt $z' \in M \cap U$ irreduzibel ist. Ein in z analytischer Primkeim p_z heißt lokal irreduzibel, wenn er einen in z lokal irreduziblen analytischen Repräsentanten besitzt.

Es gilt nun:

d) *Jeder analytische Mengenkeim m_z, $z \in C^n$, ist (bis auf die Reihenfolge) in eindeutiger Weise als unverkürzbare Vereinigung von endlich vielen verschiedenen in z analytischen Primkeimen darstellbar:*

$$m_z = p_z^{(1)} \cup p_z^{(2)} \cup \cdots \cup p_z^{(r)}.$$

---

[12]) Man braucht nur zu fordern, daß $M \cap U$ die genaue gemeinsame Nullstellenmenge irgendeines Systems in U holomorpher Funktionen ist. Aus dem Rückert-Cartanschen Idealbasissatz (vgl. [6], Appendice I) folgt dann bereits, daß M lokal auch als simultane Nullstellenmenge von endlich vielen holomorphen Funktionen darstellbar ist.

e) *Die folgenden Aussagen für eine in $z \in C^n$ analytische Menge M sind äquivalent:*

1. *M ist irreduzibel in z.*

2. *Das von M in $\mathcal{O}_z$ definierte Ideal $\mathfrak{J}_z$ ist ein Primideal.*

3. *Es gibt eine Umgebungsbasis $\{U_1, U_2, \ldots\}$ von z, so daß $M \cap U_\nu$ jeweils eine in U_ν analytische irreduzible Menge ist, $\nu = 1, 2, \ldots$.*

Wir definieren nun für jede offene Menge $B \subset C^n$ den sog. Parameterraum P_B der in B analytischen Primkeime. Die Punkte von P_B sind die analytischen Primkeime p_z, $z \in B$. Eine Topologie wird in P_B durch Angabe einer Basis der offenen Mengen wie folgt eingeführt: Jeder in einer offenen Menge von B analytischen Menge M ordnen wir die Menge $M^* \subset P_B$ aller von M erzeugten analytischen Primkeime zu. Die Familie aller dieser Mengen M^* ist die Basis einer Topologie in P_B. Wir nennen P_B, versehen mit dieser Topologie, den *Parameterraum* der analytischen Primkeime in B. Es gilt:

f) *Der Parameterraum P_B ist lokal kompakt und lokal wegzusammenhängend.*

Die Mengen $M^* \subset P_B$, die oben den in B analytischen Mengen M zugeordnet wurden, sind offene Unterräume von P_B. Man hat eine offensichtlich stetige Projektion $\mu: M^* \to M$ von M^* auf M. Wir definieren nun:

Definition 2 (Normalisierung einer analytischen Menge): Das Paar (M^*, μ) heißt die Normalisierung der in B analytischen Menge M im Parameterraum P_B.

Wichtige Eigenschaften einer in B analytischen Menge M kann man aus ihrer Normalisierung (M^*, μ) in P_B ablesen. So gilt:

g) *M ist genau dann irreduzibel in B, wenn M^* zusammenhängend ist. ist genau dann lokal irreduzibel in B, wenn $\mu: M^* \to M$ eine topologische ildung ist.*

Hieraus folgt leicht:

h) *Jede in B analytische Menge M zerfällt in eindeutiger Weise in höchstens abzählbar unendlich viele in B irreduzible analytische Mengen M_j.* (Diese Mengen M_j heißen die *irreduziblen Komponenten* von M bezüglich B.) *Die Gesamtheit aller M_j bildet eine abgeschlossene, lokal endliche Überdeckung von M, d. h. für jede kompakte Menge K in M ist $M_j \cap K$ für fast alle j leer.*

Die Menge P_B ist offensichtlich eine Teilmenge von $\mathfrak{R}(B)$. Die oben definierte Topologie in P_B stimmt jedoch nicht mit der von $\mathfrak{R}(B)$ in P_B induzierten Topologie überein. Dies ist vielmehr in der Umgebung eines Punktes $p_z \in P_B$ genau dann der Fall, wenn der Primkeim p_z lokal irreduzibel ist.

4. Eine analytische Menge M in einem Bereich $B \subset C^n$ besitzt in jedem Punkt $z \in M$ eine wohlbestimmte topologische Dimension $d'_z(M)$ (zur Def. vgl. [23]). Es zeigt sich, daß $d'_z(M)$ stets eine gerade Zahl ist; wir setzen $d_z(M) := \frac{1}{2} d'_z(M)$ und nennen $d_z(M)$ die *komplexe Dimension* von M in z. Die Zahl

$$d(M) := \max_{z \in M} d_z(M)$$

heißt die komplexe Dimension von M schlechthin; es gilt stets: $d(M) \leq n$.

Eine analytische Menge M in B heißt reindimensional, wenn für alle $z \in M$ gilt: $d_z(M) = d(M)$. Man kann zeigen (vgl. [28] p. 287):

i) *Eine in B irreduzible analytische Menge ist reindimensional.*

Es ist zweckmäßig, neben der Dimension einer analytischen Menge auch sofort ihre Codimension zu betrachten. Ist M eine analytische Menge in $B \subset C^n$, so heißt die Zahl

$$c_z(M) := n - d_z(M)$$

die *komplexe Codimension* von M in $z \in B$. Die Zahl $c(M) := n - d(M)$ heißt die komplexe Codimension von M in B schlechthin; es gilt: $c(M) = \min_{z \in M} c_z(M)$.

Für die Anwendungen ist der folgende Einbettungssatz bisweilen nützlich (vgl. [28], p. 267ff., sowie [26], p. 414):

Satz 3 (Einbettungssatz): Es seien G^d bzw. G^{n-d} Gebiete[13]) *im $C^d(z_1, \ldots, z_d)$ bzw. $C^{n-d}(z_{d+1}, \ldots, z_n)$; G^{n-d} sei relativ kompakt. Im Produktgebiet $G^d \times G^{n-d}$ sei eine rein d-dimensionale analytische Menge M gegeben, derart, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M bezüglich $C^n(z)$ mit $G^d \times \partial G^{n-d}$ keinen Punkt gemeinsam hat*[14]). *Dann gibt es $(n-d)$ Polynome*

$$\omega_\delta(z_\delta; z_1, \ldots, z_d) = z_\delta^{m_\delta} + \sum_{\mu=0}^{m_\delta - 1} A_\delta^{(\mu)}(z_1, \ldots, z_d) \cdot z_\delta^\mu, \quad \delta = d+1, \ldots, n,$$

mit in G^d holomorphen Koeffizienten $A_\delta^{(\mu)}(z_1, \ldots, z_d)$, $\mu = 0, \ldots, m_\delta - 1$, $\delta = d+1, \ldots, n$, ohne mehrfache Faktoren, so daß M aus der Vereinigung gewisser irreduzibler Komponenten der in $G^d \times G^{n-d}$ analytischen Menge

$$\{z \in G^d \times G^{n-d}, \omega_{d+1}(z) = 0, \ldots, \omega_n(z) = 0\}$$

besteht. Ist M irreduzibel in $G^d \times G^{n-d}$, so können alle $\omega_\delta(z_\delta; z_1, \ldots, z_d)$ als irreduzibel gewählt werden.

Es ist zweckmäßig, einige bequeme Redeweisen einzuführen. M sei eine analytische Menge im Produkt $G^d \times G^{n-d}$ zweier beliebiger Gebiete $G^d \subset C^d$, $G^{n-d} \subset C^{n-d}$.

Wir sagen, *M liegt über G^d, wenn die natürliche Projektion $\gamma: M \to G^d$ nirgends entartet ist.*

Wir sagen, *M liegt über G^d ausgebreitet, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

a') *M ist rein d-dimensional, $\gamma: M \to G^d$ ist nirgends entartet, eigentlich und surjektiv.*

b') *Es gibt in G^d eine höchstens $(d-1)$-dimensionale analytische Menge A, so daß $\gamma: M - \overset{-1}{\gamma}(A) \to G^d - A$ lokal topologisch ist* ($\overset{-1}{\gamma}(A)$ ist dann eine höchstens $(d-1)$-dimensionale analytische Menge in $M \cap (G^d \times G^{n-d})$.

Es ergibt sich sofort:

---

[13]) Unter einem Gebiet werde stets eine offene und zusammenhängende Menge verstanden (vgl. auch [2] p. 115).

[14]) Ist G eine offene Teilmenge eines topologischen Raumes R, so sei $\partial G := \overline{G} - G$; ∂G heißt der *Rand* von G in R.

Korollar zu Satz 3: Ist G^{n-d} relativ kompakt in C^{n-d} und M eine rein d-dimensionale analytische Menge in $G^d \times G^{n-d}$, so daß $\overline{M} \cap (G^d \times \partial G^{n-d})$ leer ist, so liegt M ausgebreitet über G^d.

In der Tat! Zunächst ist evident, daß $\gamma : M \to G^d$ eine nirgends entartete, eigentliche Abbildung von M auf G^d ist. Um die Existenz einer Menge A im Sinne von b') zu beweisen, ziehen wir Satz 3 heran und bezeichnen mit $D_\delta(z_1, \ldots, z_d)$ die Diskriminante des Polynoms ω_δ; nach bekannten Sätzen ist D_δ holomorph in G^d und es gilt: $D_\delta \not\equiv 0$, $\delta = d+1, \ldots, n$. Durch die Gleichung $\prod\limits_{\delta=d+1}^{n} D_\delta(z_1, \ldots, z_d) = 0$ wird daher in G^d eine höchstens $(d-1)$-dimensionale analytische Menge A definiert, die Abbildung $\gamma : M - \overset{-1}{\gamma}(A) \to G^d - A$ ist ersichtlich lokal topologisch.

Für reindimensionale analytische Mengen kann man lokal stets die Situation des Einbettungssatzes herstellen. Dies ergibt sich sofort aus

Satz 4: Ist M eine rein d-dimensionale analytische Menge in $B \subset C^n$, so gibt es durch jeden Punkt $z \in M$ eine d-codimensionale analytische Ebene E, die M in der Nähe von z nur in z schneidet.

Hieraus folgt, daß man in einer Umgebung von z durch eine lineare Koordinatentransformation Koordinaten $z'_1, \ldots, z'_n$ so einführen kann, daß in einer genügend kleinen Polyzylinderumgebung

$$Z^d \times Z^{n-d} := \{|z'_1| < a_1, \ldots, |z'_d| < a_d\} \times \{|z'_{d+1}| < a_{d+1}, \ldots, |z'_n| < a_n\} \subset B$$

von z (wir nehmen an, daß z die Koordinaten $(0, \ldots, 0)$ hat) für die in $Z^d \times Z^{n-d}$ analytische Menge $M \cap (Z^d \times Z^{n-d})$ die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt sind und M also insbesondere über Z^d ausgebreitet liegt.

Wir benötigen im folgenden noch:

k) *Es seien M, M' analytische Mengen in B; es gelte $M' \subset M$ und $d_z(M') < d_z(M)$ für alle $z \in M'$. Dann liegt M' nirgends dicht in M.*

k') *Ist B einfach zusammenhängend und M eine mindestens 2-codimensionale analytische Menge in B, so ist auch $B - M$ einfach zusammenhängend.*

Ein Punkt z einer in $B \subset C^n$ analytischen Menge M heißt ein *gewöhnlicher Punkt* von M, wenn M in einer Umgebung $U \subset B$ von z die genaue simultane Nullstellenmenge von k in U holomorphen Funktionen ist, deren Funktionalmatrix in z vom Range $n - k$ ist. Offensichtlich gilt dann $d_z(M) = n - k$. Ist z ein gewöhnlicher Punkt von M, so ist M in z lokal irreduzibel. Man kann beweisen (vgl. [9], Exp. IX):

l) *Die nicht gewöhnlichen Punkte einer in B analytischen Menge M bilden selbst eine in B analytische Menge N; es gilt: $d_z(N) < d_z(M)$ für alle Punkte $z \in N$.*

Weiter gilt (vgl. [28], Satz 10):

m) *Es sei M eine analytische Menge in B und M' eine irreduzible Komponente von M. Dann ist die Menge der auf M' liegenden gewöhnlichen Punkte von M zusammenhängend. Eine in B analytische Menge M ist genau dann irreduzibel in B, wenn die Menge ihrer gewöhnlichen Punkte zusammenhängend ist.*

In [28] wurde bewiesen:

Satz 5: Ist L eine höchstens k-dimensionale analytische Menge in einer offenen Menge B des C^n und M eine rein d-dimensionale analytische Menge in $B - L$ mit $d > k$, so ist die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ von M bezüglich B eine rein d-dimensionale analytische Menge in B.

5. Wir geben in diesem Abschnitt eine einfache, für spätere Anwendungen nützliche Bedingung dafür an, daß eine analytische Menge in einem Punkte irreduzibel bzw. lokal irreduzibel ist. Wir behaupten:

Satz 6: Eine in einer offenen Menge B des C^n analytische Menge M ist genau dann irreduzibel in einem Punkte $z \in M$, wenn die Menge N der nicht gewöhnlichen Punkte von M den Raum M in z nicht zerlegt.

Ist M irreduzibel in z, so zerlegt überdies jede in z analytische Menge $A \subset M$ mit $d_z(A) < d_z(M)$ den Raum M in z nicht.

Beweis: 1. Es sei M irreduzibel in z. Dann gibt es nach e) eine Umgebungsbasis $\{W_j\}, j \in I$, von z, so daß alle Mengen $M \cap W_j$ irreduzibel in W_j sind. Nach i) ist $M \cap W_j$ rein dimensional in $W_j, j \in I$; wir setzen $d(M \cap W_j) = d$. Sei nun $A \subset M$ irgendeine in einer Umgebung $V(z) \subset B$ analytische Menge mit $d_z(A) < d$. Dann ist in der Umgebungsbasis $\{W_j\}, j \in I$, von z eine Umgebungsbasis $\{W_\iota\}$ von z enthalten, wo ι eine Teilmenge von I durchläuft, so daß stets $W_\iota \subset V$ gilt und alle Mengen $A_\iota := W_\iota \cap A$ höchstens $(d-1)$-dimensionale analytische Mengen in W_ι sind. Wir behaupten nun, daß $\{U_\iota\}$, $U_\iota := M \cap W_\iota$, eine Umgebungsbasis von z im Raume M ist, so daß alle Mengen $U_\iota - A$ offen und zusammenhängend sind: sicher ist jede Menge $U_\iota \cap A = W_\iota \cap A$ abgeschlossen in U_ι, weiter liegt nach k) jedes $U_\iota \cap A$ nirgends dicht in U_ι. Um zu zeigen, daß auch jede Menge $U_\iota - A$ zusammenhängend ist, nehmen wir an, daß es ein ι_0 gibt, so daß $U_{\iota_0} - A$ in zwei nicht leere, von $U_{\iota_0} - A$ verschiedene offene Mengen M', M'' zerfällt. Diese Mengen sind dann notwendig rein d-dimensionale analytische Mengen in $W_{\iota_0} - A$. Da A höchstens $(d-1)$-dimensional ist, sind daher nach Satz 5 die abgeschlossenen Hüllen $\overline{M}', \overline{M}''$ von M', M'' bezüglich W_{ι_0} rein d-dimensionale analytische Mengen in W_{ι_0}. Es gilt: $M \cap W_{\iota_0} = \overline{M}' \cup \overline{M}''$. Das aber widerspricht der Voraussetzung, daß $M \cap W_{\iota_0}$ irreduzibel in W_{ι_0} ist.

2. Es sei nun M reduzibel in z. Wir bezeichnen mit N die nichtleere, in B analytische Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von M und behaupten, daß N den Raum M in z zerlegt. Es gilt $z \in N$, $d_z(N) < d_z(M)$; weiter ist N abgeschlossen und nirgends dicht in M. Es kann keine Umgebungsbasis $\{U_j\}, j \in I$, von $z \in M$ geben, so daß alle Mengen $(M \cap U_j) - N$ zusammenhängend sind. Dann wäre nämlich nach m) jede Menge $M \cap U_j$ irreduzibel in U_j und nach e) mithin M selbst irreduzibel in z. Also zerlegt N den Raum M im Punkte z, w.z.b.w.

Wir merken noch an:

Korollar: Eine in B analytische Menge M ist genau dann lokal irreduzibel, wenn die Menge N der nicht gewöhnlichen Punkte von M den Raum M nirgends zerlegt.

Wir können nun die Normalisierung einer analytischen Menge in einfacher Weise charakterisieren. Wir behaupten:

Satz 7: Ist M eine in $B \subset C^n$ analytische Menge und (M^*, μ) ihre Normalisierung im Parameterraum P_B, so gilt:

0. *M^* ist lokal kompakt und lokal zusammenhängend; $\mu: M^* \to M$ ist eine stetige nirgends entartete eigentliche Abbildung von M^* auf M.*

1. *Ist N die Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von M, so zerlegt $\overset{-1}{\mu}(N)$ den Raum M^* nirgends. μ bildet $M^* - \overset{-1}{\mu}(N)$ topologisch auf $M - N$ ab.*

Ist $('M^*, '\mu)$ irgendein Paar, für das 0. und 1. erfüllt ist, so gibt es eine topologische Abbildung $\tau: 'M^* \to M^*$ von $'M^*$ auf M^* mit $'\mu = \mu \circ \tau$.

Beweis: Es ist klar, daß 0. erfüllt ist. Weiter ist $\mu: M^* - \overset{-1}{\mu}(N) \to M - N$ sicher topologisch, da jeder gewöhnliche Punkt von M lokal irreduzibel ist. Aus Satz 6 folgt leicht, daß $\overset{-1}{\mu}(N)$ den Raum M^* nirgends zerlegt.

Sei nun $('M^*, '\mu)$ ein weiteres Paar, für welches 0. und 1. gilt. Dann ist $\tau^* := \overset{-1}{\mu} \circ '\mu : 'M^* - '\overset{-1}{\mu}(N) \to M^* - \overset{-1}{\mu}(N)$ eine topologische Abbildung. Aus Satz 2, angewandt auf τ^* (mit $S = '\overset{-1}{\mu}(N)$, $\varphi = \mu$), folgt nun, daß τ^* zu einer stetigen Abbildung $\tau: 'M^* \to M^*$ fortsetzbar ist. Ebenso kann man $(\tau^*)^{-1}$ stetig auf M^* fortsetzen. Aus Stetigkeitsgründen ist diese Fortsetzung die Umkehrung von τ; daher ist τ eine topologische Abbildung von $'M^*$ auf M^*. Nach Definition gilt: $'\mu = \mu \circ \tau$. q.e.d.

Anmerkung: Die erste Aussage in 1. gilt für beliebige in B analytische Mengen $A \subset M$, falls nur für alle $z \in A$ gilt: $d_z(A) < d_z(M)$. — Der Beweis ergibt sich wieder unmittelbar aus Satz 6.

§ 2. Analytische Überlagerungen komplexer Mannigfaltigkeiten

1. Der Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit ist wohlbekannt: eine topologische Mannigfaltigkeit heißt eine komplexe Mannigfaltigkeit, wenn sie durch Umgebungen mit komplexen Koordinaten überdeckt ist, derart, daß in einander überlappenden Umgebungen die Koordinaten holomorph voneinander abhängen (zur präzisen Beschreibung dieses Begriffes vgl. [22]). Mit X wird in diesem Paragraphen stets eine komplexe Mannigfaltigkeit bezeichnet. Die Grundbegriffe der Funktionentheorie wie holomorphe Funktion, analytische Menge usw. sind für komplexe Mannigfaltigkeiten wohldefiniert und seien als bekannt vorausgesetzt. Beispiele für komplexe Mannigfaltigkeiten sind alle nichtleeren offenen Mengen des C^n, $n \geq 1$, alle Riemannschen Flächen sowie alle komplex-projektiven Räume P^m, $m \geq 1$. Sind X_1, X_2 komplexe Mannigfaltigkeiten, so kann das topologische Produkt $X_1 \times X_2$ in natürlicher Weise als eine komplexe Mannigfaltigkeit angesehen werden. Jede zusammenhängende Komponente einer komplexen Mannigfaltigkeit besitzt eine eindeutig bestimmte komplexe Dimension; das Supremum der Dimensionen aller Komponenten heißt die komplexe Dimension der Mannigfaltigkeit schlechthin. Eine nirgends dichte analytische Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit X zerlegt X nirgends.

Wir führen nun den für diese Arbeit grundlegenden Begriff der analytischen Überlagerung einer komplexen Mannigfaltigkeit ein.

Definition 3 (Analytische Überlagerung): Ein Tripel $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *heißt eine analytische Überlagerung der komplexen Mannigfaltigkeit* X, *wenn folgendes gilt:*

α) Y *ist ein lokal kompakter Raum,* η *ist eine stetige eigentliche nirgends entartete Abbildung von* Y *auf* X.

β) *Es gibt eine analytische Menge* A *in* X, *so daß* $\overset{-1}{\eta}(A)$ *den Raum* Y *nirgends zerlegt und die Menge* $Y - \overset{-1}{\eta}(A)$ *durch* η *lokal topologisch auf eine offene Menge in* X *abgebildet wird.*

Eine analytische Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *heißt zusammenhängend, wenn* Y *zusammenhängend ist.*

Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung von X, so heißt der Raum Y der *Überlagerungsraum.* Ein Punkt $y \in Y$ heißt über dem Punkt $\eta(y) =: x \in X$ gelegen; $\eta(y)$ heißt der *Grundpunkt von* y. Die Menge A (vgl. Def. 3. β)) nennen wir auch eine *kritische Menge* der Überlagerung, η heißt die *Projektion* von Y auf X.

Die obige Definition der analytischen Überlagerung stimmt für den Fall, daß X der Einheitspolyzylinder in einem Zahlenraum ist, mit der in [15] gegebenen Definition überein. Das einfachste Beispiel einer analytischen Überlagerung von X bildet die triviale Überlagerung (X, ι, X), wo ι die identische Abbildung von X auf sich bezeichnet.

Wir bemerken sofort:

a) *Sind* $\mathfrak{Y}_i = (Y_i, \eta_i, X_i)$, $i = 1, 2$, *analytische Überlagerungen von komplexen Mannigfaltigkeiten* X_1 *bzw.* X_2, *so ist*

$$\mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 := (Y_1 \times Y_2, \eta_1 \times \eta_2, X_1 \times X_2)$$

eine analytische Überlagerung der komplexen Mannigfaltigkeit $X_1 \times X_2$.

Wir führen noch in naheliegender Weise den Begriff der Äquivalenz für analytische Überlagerungen ein.

Definition 4 (Äquivalenz): Zwei analytische Überlagerungen $\mathfrak{Y}_i = (Y_i, \eta_i, X)$ $i = 1, 2$, *derselben komplexen Mannigfaltigkeit* X *heißen äquivalent, wenn es eine topologische Abbildung* λ von Y_2 *auf* Y_1 *gibt, so daß gilt:* $\eta_2 = \eta_1 \circ \lambda$.

2. In diesem Abschnitt notieren wir einige Eigenschaften des Überlagerungsraumes Y einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$. Zunächst gilt:

b) *Die Projektion* $\eta : Y \to X$ *ist eine offene Abbildung. Ist* $A \subset X$ *eine kritische Menge von* $\mathfrak{Y}$, *so ist das Tripel* $(Y - \overset{-1}{\eta}(A), \eta, X - A)$ *eine unbegrenzte und unverzweigte Überlagerung von* $X - A$.

Die erste Aussage folgt sofort aus dem Lemma in § 1.2; die zweite Aussage ist unmittelbar ersichtlich. (Spezialfall des "covering homotopy theorem".)

Wir zeigen weiter:

c) *Jeder Punkt* $y_0 \in Y$ *besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis* $\{U_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, *so daß jedes Tripel* (U_ν, η_ν, V_ν), $\eta_\nu := \eta \,|\, U_\nu, V_\nu := \eta(U_\nu)$, *eine analytische Überlagerung der komplexen Mannigfaltigkeit* V_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, *ist.*

Aus Hilfssatz 1 in § 1 folgt zunächst, daß es Umgebungsfolgen U_ν bzw. V_ν von y_0 bzw. $\eta(y_0)$ gibt, so daß $\eta_\nu := \eta | U_\nu$ jeweils eine eigentliche Abbildung

von U_ν in V_ν ist, $\nu = 1,2, \ldots$. Offensichtlich darf man annehmen, daß die $\{V_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ eine Umgebungsbasis von $\eta(y_0)$ bilden, daß jedes V_ν wegzusammenhängend ist und daß gilt: $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$, $U_1 \cap \overset{-1}{\eta}(\eta(y_0)) = y_0$. Da $\eta_\nu\colon U_\nu \to V_\nu$ offen ist, ist η_ν stets surjektiv. Dann ist aber offensichtlich jedes Tripel (U_ν, η_ν, V_ν) eine analytische Überlagerung der in X offenen Menge V_ν, $\nu = 1,2, \ldots$.

Würden nun die $U_1, U_2, \ldots$ keine Umgebungsbasis von y_0 bilden, so gäbe es eine Umgebung U von y_0 und eine Punktfolge $y_\nu \in U_\nu$, so daß stets gilt: $y_\nu \notin U$. Die Folge $\eta(y_\nu)$ konvergiert gegen $\eta(y_0)$. Da $y_\nu \in U_1$ und $K := \{\eta(y_0), \eta(y_1), \ldots\}$ eine kompakte Menge in V_1 ist, muß auch $\overset{-1}{\eta}_1(K) \subset U_1$ kompakt sein. Das ist jedoch nicht der Fall, denn dann müßte y_0 notwendig ein Häufungspunkt der Folge $y_1, y_2, \ldots$ sein im Widerspruch zur Voraussetzung. Mithin bilden die $\{U_\nu\}$, $\nu = 1,2, \ldots$ doch eine Umgebungsbasis von y_0, q.e.d.

Es folgt nun:

d) *Ist die komplexe Mannigfaltigkeit X abzählbar im Unendlichen (d. h. Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Mengen), so ist der Überlagerungsraum Y einer jeden analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ von X parakompakt und metrisierbar.*

Nach Dieudonné (vgl. [12], théorème 3) ist jeder lokal kompakte Raum, der abzählbar im Unendlichen ist, parakompakt. Daher ist Y parakompakt, denn wegen der Eigentlichkeit von η ist klar, daß Y abzählbar im Unendlichen ist. Nunmehr folgt nach [12], théorème 1, daß Y ein normaler Raum ist. Da Y überdies eine abzählbare Topologie besitzt (dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß Y dem 1. Abzählbarkeitsaxiom genügt und X eine abzählbare Topologie besitzt), so ergibt sich aus dem Urysohnschen Metrisationssatz, daß Y ein metrisierbarer Raum ist, q.e.d.

e) *Der Überlagerungsraum Y jeder analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ ist lokal wegzusammenhängend. Zerlegt $S \subset X$ den Raum X nirgends, so zerlegt $\overset{-1}{\eta}(S)$ den Raum Y nirgends.*

Beweis: Es sei A eine kritische Menge von $\mathfrak{Y}$. Die erste Aussage wird gemäß §1. a') bewiesen sein, wenn wir zu jedem Punkt $y_0 \in \overset{-1}{\eta}(A)$ eine Umgebungsbasis $\{U_\nu\}$, $\nu = 1,2, \ldots$ mit folgender Eigenschaft angeben: Zu jeder zusammenhängenden Komponente U_ν^* von $U_\nu - A$ gibt es einen Weg $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$, in U_ν mit $w(0) \in U_\nu^*$, $w(1) = y_0$. Wir wählen $\{U_\nu\}$ gemäß § 2. c). Jede zusammenhängende Komponente U_ν^* von $U_\nu - A$ ist dann eine unbegrenzte und unverzweigte endlich-blättrige Überlagerung von $\eta(U_\nu) - A$. Wählt man daher in $\eta(U_\nu)$ einen Weg $'w(t)$, $0 \leq t \leq 1$, mit $'w(t) \notin A$ für $0 \leq t < 1$, $'w(1) = \eta(y_0)$, so kann man den „Weg ohne Endpunkt“ $w(t)$, $0 \leq t < 1$, zu einem „Weg ohne Endpunkt“ $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t < 1$, nach U_ν^* liften. Setzt man noch $\tilde{w}(1) = y_0$, so ist $\tilde{w}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ein Weg in U_ν mit der gesuchten Eigenschaft.

Zum Beweis der zweiten Aussage von e) ziehen wir § 1. b) heran. Sicher ist $\overset{-1}{\eta}(S)$ abgeschlossen und nirgends dicht in Y. Sei nun $D \subset Y$ ein Gebiet. Dann ist auch $D - \overset{-1}{\eta}(A)$ ein Gebiet. Da $D - \overset{-1}{\eta}(A)$ vermöge η lokal topo-

logisch abgebildet wird und S nach Voraussetzung X nirgends zerlegt, ist auch $D - \overset{-1}{\eta}(A) - \overset{-1}{\eta}(S) = D - (\overset{-1}{\eta}(A \cup S))$ zusammenhängend. Also zerlegt $\overset{-1}{\eta}(A \cup S)$ und somit erst recht $\overset{-1}{\eta}(S)$ den Raum Y nirgends.

e') *Ist* $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *eine analytische Überlagerung von* X *und* X' *ein Teilgebiet von* X, *so zerfällt die offene Menge* $\overset{-1}{\eta}(X')$ *in eindeutiger Weise in endlich viele offene zusammenhängende Komponenten* $Y_1', \ldots, Y_s'$; *die Tripel* $\mathfrak{Y}_\sigma' = (Y_\sigma', \eta_\sigma, X')$, *wo* η_σ *jeweils die Beschränkung von* η *auf* Y_σ' *bezeichnet*, $\sigma = 1, \ldots, s$, *sind sämtlich zusammenhängende analytische Überlagerungen von* X'.

Anmerkung: Zum Beweis der Aussagen b), c), d) *sowie zum ersten Teil von* e) *wurde nicht benutzt, daß* $\overset{-1}{\eta}(A)$ *den Raum* Y *nirgends zerlegt.*

Von besonderer Wichtigkeit ist der folgende Fortsetzungssatz für analytische Überlagerungen.

Satz 8 (Fortsetzungssatz): Es sei X *eine komplexe Mannigfaltigkeit und* M *eine nirgends dichte analytische Menge in* X. *Es sei* $(Y', \eta', X - M)$ *eine analytische Überlagerung von* $X - M$, *derart, daß eine kritische Menge* A *dieser Überlagerung in jeden Punkt von* M *hinein analytisch fortsetzbar ist. Dann gibt es bis auf Äquivalenz genau eine analytische Überlagerung* (Y, η, X) *von* X, *deren Beschränkung* $(\overset{-1}{\eta}(X - M), \eta, X - M)$ *auf* $X - M$ *mit* $(Y', \eta', X - M)$ *äquivalent ist.*

Dieser Satz wurde von den Verff. in [16] angekündigt und auch bereits benutzt; inzwischen hat K. Stein den Satz bewiesen, falls als kritische Menge A der Überlagerung $(Y', \eta', X - M)$ die leere Menge gewählt werden kann (vgl. [32], Satz 1). Der obige Satz ist eine einfache Folgerung aus dem Resultat von Stein.

Wir merken noch an:

Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *irgendeine analytische Überlagerung, so besitzt jeder Punkt* $y_0 \in Y$ *eine Umgebungsbasis* $\{U_\nu\}$, *so daß für jedes* ν *sämtliche Homotopiegruppen* $\pi_q(U_\nu, y_0)$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, *verschwinden.*

Den Beweis kann man z. B. dadurch führen, daß man eine Umgebungsbasis $\{U_\nu\}$ konstruiert, in der jedes U_ν ein simplizialer Komplex ist.

3. Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung von X und A eine kritische Menge von $\mathfrak{Y}$, so gibt es eine natürliche Zahl $b \geq 1$, so daß über jedem Punkt $x \in X - A$ genau b Punkte von Y und über jedem Punkt $x \in A$ höchstens b Punkte von Y liegen. Die Zahl b heißt die Blätterzahl der analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$; wir schreiben durchweg: $b = b(\mathfrak{Y})$.

Wir führen nun den Begriff der Ordnung eines Punktes $y \in Y$ ein:

Definition 5 (Ordnung): Ein Punkt $y \in Y$ *des Überlagerungsraumes* Y *einer analytischen Uberlagerung* $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *heißt ein Punkt* k*-ter Ordnung, in Zeichen* $o(y) = k$, *wenn es eine Umgebungsbasis* $\{U_\nu\}$ *von* y *gibt, so daß jeweils* $(U_\nu, \eta, \eta(U_\nu))$ *eine* k*-blättrige analytische Überlagerung von* $\eta(U_\nu)$ *ist.*

Offensichtlich ist für jeden Punkt $y \in Y$ die Ordnung $o(y)$ wohldefiniert. Man beweist unmittelbar:

f) *Ist* $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *eine* b*-blättrige analytische Überlagerung von* X, *so gilt für jeden Punkt* $x \in X$:
$$\sum_{y \in \overset{-1}{\eta}(x)} o(y) = b(\mathfrak{Y}).$$

Definition 6 (Schlichter Punkt, Verzweigungspunkt): Ein Punkt $y \in Y$ des Überlagerungsraumes Y einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ heißt ein schlichter Punkt, wenn gilt: $o(y) = 1$. Jeder nicht schlichte Punkt $y \in Y$ heißt ein Verzweigungspunkt.

Offensichtlich ist ein Punkt $y \in Y$ genau dann ein Verzweigungspunkt, wenn es keine Umgebung von y gibt, die durch η topologisch in X abgebildet wird.

Die Verzweigungsmenge $V \subset Y$ einer analytischen Überlagerung (Y, η, X) ist die Menge aller Verzweigungspunkte von Y. Es gilt $V \subset \overset{-1}{\eta}(A)$, wenn A irgendeine kritische Menge ist; V ist abgeschlossen in Y und zerlegt Y nirgends.

Man beweist sofort, daß das Tripel $(Y - \hat{V}, \eta, X - \eta(V))$, $\hat{V} := \overset{-1}{\eta}(\eta(V))$, eine unverzweigte und unbegrenzte Überlagerung von $X - \eta(V)$ ist.

Wir zeigen jetzt:

g) *Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung von X und A eine kritische Menge, so liegen über jedem Punkt von A, in dem A mindestens 2-codimensional ist, nur schlichte Punkte von Y.*

Beweis: Es sei $x_0 \in A$ ein Punkt, in dem A mindestens 2-codimensional ist. Wir wählen eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Umgebung U von x_0 so klein, daß $U \cap A$ in ganz U mindestens 2-codimensional ist. Dann ist auch $U - A$ nach § 1. k') einfach zusammenhängend. Nun ist nach einem bekannten Satz über Überlagerungen jede zusammenhängende, unbegrenzte und unverzweigte Überlagerung eines zusammenhängenden, lokal zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden topologischen Raumes mit der trivialen Überlagerung äquivalent. Ist daher $\hat{\mathfrak{Y}} = (\hat{U}, \eta, U)$ irgendeine zusammenhängende Komponente von $\mathfrak{Y} \mid U$, so ist $\eta : \hat{U} - \overset{-1}{\eta}(A) \to U - A$ eine topologische Abbildung. Alsdann wird aber auch $\hat{U}$ selbst vermöge η topologisch auf U abgebildet. Mithin liegen über $x_0 \in A$ nur schlichte Punkte von Y.

Als kritische Menge A einer analytischen Überlagerung (Y, η, X) kann auf Grund von $g)$ stets eine leere oder rein 1-codimensionale analytische Menge in X gewählt werden; dies soll im folgenden durchweg geschehen.

4. Wir geben in diesem Abschnitt ein Verfahren zur Konstruktion analytischer Überlagerungen aus analytischen Mengen an. Es sei M eine rein dimensionale analytische Menge im Produkt $X_1 \times X_2$ zweier zusammenhängender komplexer Mannigfaltigkeiten X_1, X_2. Es bezeichne $\gamma : M \to X_1$ die natürliche Projektion von M in X_1; weiter sei (M^*, μ) die Normalisierung von M im Parameterraum $P_{X_1 \times X_2}$. Dann gilt:

Satz 9: Liegt M ausgebreitet über X_1, so ist das Tripel $\mathfrak{M} = (M^*, \gamma^*, X_1)$, $\gamma^* := \gamma \circ \mu$, eine analytische Überlagerung von X_1. (M, γ, X_1) is genau dann eine analytische Überlagerung von X_1, wenn M lokal irreduzibel ist.

Beweis: Zunächst ist evident, daß $\gamma^* : M^* \to X_1$ stetig, nirgends entartet, eigentlich und surjektiv ist. Um einzusehen, daß auch Bedingung β) von Def. 3 erfüllt ist, sei A eine niederdimensionale analytische Menge in X_1, so daß $\gamma : M - \overset{-1}{\gamma}(A) \to X_1 - A$ lokal topologisch ist; ein solches A existiert, da M über X_1 ausgebreitet liegt. Da vorausgesetzt werden darf, daß $\overset{-1}{\gamma}(A) \subset M$ alle

nicht gewöhnlichen Punkte N von M umfaßt, folgt aus Satz 7, daß $\overset{-1}{\gamma}{}^*(A) = \overset{-1}{\mu}(\overset{-1}{\gamma}(A))$ den Raum M^* nirgends zerlegt und $\mu: M^* - \overset{-1}{\gamma}{}^*(A) \to M - \overset{-1}{\gamma}(A)$ lokal topologisch ist. Daher ist auch $\gamma^*: M^* - \overset{-1}{\gamma}{}^*(A) \to X_1 - A$ lokal topologisch und $\mathfrak{M} \doteq (M^*, \gamma^*, X_1)$ mithin eine analytische Überlagerung von X_1.

Ist M lokal irreduzibel, so ist $\mu: M^* \to M$ nach § 1. g) ein Homöomorphismus. Daher ist (M, γ, X_1) eine analytische Überlagerung von X_1. Weiß man andererseits, daß (M, γ, X_1) eine analytische Überlagerung ist, so sei A eine zugehörige kritische Menge. Da $\overset{-1}{\gamma}(A)$ den Raum M nirgends zerlegt und sicher alle nichtgewöhnlichen Punkte von M umfaßt, folgt aus Satz 6, Korollar, daß M lokal irreduzibel ist, q.e.d.

Wir nennen $\mathfrak{M}$ die von M über X_1 erzeugte analytische Überlagerung. Die über M gemachten Voraussetzungen sind für eine mit X_1 gleichdimensionale Menge M sicher dann erfüllt, wenn X_2 ein beschränktes Gebiet G im C^r und $\overline{M} \cap (X_1 \times \partial G)$ leer ist; dies folgt unmittelbar aus Satz 3.

Ein besonders einfacher Fall liegt vor, wenn X_2 die w-Ebene $C^1(w)$ und M die Nullstellenmenge eines Polynoms $\omega(w; x_1) = w^b + a_1(x_1)\, w^{b-1} + \cdots + a_b(x_1)$ mit in X_1 holomorphen Koeffizienten ist. Dann ist $\mathfrak{M} = (M^*, \gamma^*, X_1)$ eine b-blättrige analytische Überlagerung; überdies gilt, wie leicht zu zeigen:

h) *$\mathfrak{M}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\omega(w; x_1)$ irreduzibel über X_1 ist.*

Wir diskutieren abschließend zwei wichtige Beispiele von analytischen Überlagerungen, die von analytischen Mengen erzeugt werden.

Beispiel 1: X_1 sei ein Polyzylinder $Z := \{z, |z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n\}$, $r_\nu > 0$, im C^n. Die Nullstellenmenge $W_b \subset C^n(z) \times C^1(w)$ des Polynoms $\omega(w; z) := w^b - z_1$, $b \geqq 1$ natürliche Zahl, hat nur gewöhnliche Punkte und ist mithin lokal irreduzibel. Weiter ist W_b zusammenhängend, so daß folgt, wenn $\gamma: W_b \to Z$ die natürliche Projektion bezeichnet:

Das Tripel $\mathfrak{W}_b(Z) := (W_b, \gamma, Z)$ ist eine zusammenhängende b-blättrige analytische Überlagerung von Z. Jeder Punkt $x \in W_b$, der nicht über dem analytischen Ebenenstück $E := \{z \in Z,\ z_1 = 0\}$ liegt, ist ein schlichter Punkt; jeder Punkt $x \in W_b$ über E ist ein Verzweigungspunkt b-ter Ordnung.

Die Überlagerungen $\mathfrak{W}_b(Z)$ sind die „einfachsten" verzweigten analytischen Überlagerungen von Z. Wir werden sie im folgenden Abschnitt zur Charakterisierung der Verzweigungspunkte einer analytischen Überlagerung heranziehen.

Beispiel 2: X_1 sei ein 2-dimensionaler Polyzylinder $Z := \{z, |z_1| < r_1, |z_2| < r_2\}$ im C^2; wir setzen $\omega(w; z) := w^b - z_1^{b_1} z_2^{b_2}$, wo b, b_1, b_2 positive natürliche Zahlen mit $(b_1, b_2, b) = 1$ sind[15]). Es sei $L_b(b_1, b_2) := \{x \in Z \times C^1(w),\ \omega(x) = 0\}$ und $(L_b^*(b_1, b_2), \mu)$ die Normalisierung von $L_b(b_1, b_2)$. Bezeichnet weiter λ die natürliche Projektion von $L_b(b_1, b_2)$ auf Z und setzt man: $\lambda^* = \lambda \circ \mu$, so gilt:

Das Tripel $\mathfrak{L}_b(b_1, b_2) := (L_b^*(b_1, b_2), \lambda^*, Z)$, $(b, b_1, b_2) = 1$, ist eine zusammenhängende b-blättrige analytische Überlagerung von Z. Alle Punkte von $L_b^*(b_1, b_2)$, die über keiner Koordinatenachse liegen, sind schlichte Punkte; über dem

---

[15]) Mit $(a_1, \ldots, a_n)$ sei der größte gemeinsame Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet.

Nullpunkt liegt genau ein Verzweigungspunkt b-ter Ordnung. Über jedem Punkt $z \neq 0$ *der* z_1*-Achse (bzw.* z_2*-Achse) liegen genau* (b_2, b) *(bzw.* (b_1, b)*) Verzweigungspunkte der Ordnung* $b \cdot (b_2, b)^{-1}$ *(bzw.* $b \cdot (b_1, b)^{-1}$*).*

$(L_b(b_1, b_2), \lambda, Z)$ *ist genau dann eine analytische Überlagerung von* Z, *wenn* $(b_1, b) = (b_2, b) = 1$.

Zum Beweis dieser Aussage betrachte man die durch die Gleichungen

$$z_1 = u^b, \quad z_2 = v^b, \quad w = u^{b_1} v^{b_2}$$

definierte eigentliche holomorphe Abbildung $\tau : T \to Z \times C^1(w)$, wo $T := \{(u, v), |u| < \sqrt[b]{r_1}, |v| < \sqrt[b]{r_2}\}$. Es gilt $\tau(T) \subset L_b(b_1, b_2)$; man kann ferner leicht zeigen:

Jeder Punkt $'x \in L_b(b_1, b_2)$, $'x = ('z_1, 'z_2, 'w) \neq (0, 0, 0)$ *hat genau b Urbildpunkte in T;* $L_b(b_1, b_2)$ *ist in* $(0, 0, 0)$ *irreduzibel. Gilt* $'w \neq 0$, *so ist* $'x$ *ein gewöhnlicher Punkt von* $L_b(b_1, b_2)$ *und* τ *lokal topologisch in der Umgebung aller Urbilder* $\overset{-1}{\tau}('x)$. *Verschwindet die* z_i*-Koordinate von* $'x \neq (0, 0, 0)$, *so erzeugt* $L_b(b_1, b_2)$ *in* $'x$ *genau* (b_i, b) *analytische Primkeime; zu jedem solchen Primkeim* $p_{'x}$ *gibt es genau* $b \cdot (b_i, b)^{-1}$ τ*-Urbilder von* $'x$, *so daß* τ *in deren Umgebung außerhalb eines analytischen Ebenenstückes eine* $1-(b_i, b)$*-deutige offene Abbildung auf eine in* $'x$ *analytische Menge ist, die* $p_{'x}$ *erzeugt,* $i = 1, 2$. — Hieraus folgt die obige Behauptung.

5. Spezielle Verzweigungspunkte einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} := (Y, \eta, X)$ sind die Windungspunkte.

Definition 7 (Windungspunkt): Ein Punkt $y_0 \in Y$ *heißt ein Windungspunkt b-ter Ordnung,* $b \geq 1$, *der analytischen Überlagerung* $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$, *wenn es in einer Umgebung U des Punktes* $\eta(y_0)$ *komplexe Koordinaten* $z_1, \ldots, z_n$ *gibt mit folgender Eigenschaft:*

Bezeichnet V diejenige zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\eta}(U)$, *die* y_0 *enthält, so ist die analytische Überlagerung* $\mathfrak{V} = (V, \eta, U)$ *äquivalent zur analytischen Überlagerung* $\mathfrak{W}_b(U) = (W_b, \gamma, U)$ (zur Definition von $\mathfrak{W}_b$ vgl. 4., Beispiel 1), U kann offenbar als Polyzylinder vorausgesetzt werden).

Ist $y_0 \in Y$ ein Windungspunkt b-ter Ordnung, so gilt offensichtlich $o(y_0) = b$, wie es sein soll.

Wir beweisen nun:

Satz 10: Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *eine analytische Überlagerung und A eine kritische Menge, so liegen über jedem gewöhnlichen Punkt von A nur Windungspunkte von* $\mathfrak{Y}$.

Beweis: Es sei $x_0 \in A$ ein gewöhnlicher Punkt. Wir können in einer geeigneten Umgebung U von x_0 komplexe Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ so einführen, daß U der Einheitspolzylinder $\{|z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$ und $A \cap U$ die analytische Ebene $\{z_1 = 0\}$ ist. Sei nun $y_0 \in Y$ irgendein Punkt über x_0 und V die zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\eta}(U)$, die y_0 enthält. Ist dann b die Blätterzahl der analytischen Überlagerung $\mathfrak{V} = (V, \eta, U)$, so behaupten wir, daß $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}_b = (W_b, \gamma, U)$ äquivalent sind. Das ergibt sich unmittelbar aus nachstehendem

Hilfssatz 2: Ist $\mathfrak{V} = (V, \eta, U)$ *eine zusammenhängende b-blättrige analytische Überlagerung des Polyzylinders* $U := \{z, |z_1| < 1, \cdots, |z_n| < 1\} \subset C^n$, *die höchstens über dem analytischen Ebenenstück* $E := \{z \in U, z_1 = 0\}$ *verzweigt ist, so ist* $\mathfrak{V} = (V, \eta, U)$ *zur analytischen Überlagerung* $\mathfrak{W}_b = (W_b, \gamma, U)$ *äquivalent.*

Beweisen wir also diesen Hilfssatz, so ist auch Satz 10 bewiesen. Wir betrachten zunächst die Überlagerungen $(V - \overset{-1}{\eta}(E), \eta, U - E)$ und $(W_b - \gamma(E), \overset{-1}{\gamma}, U - E)$, die beide b-blättrig, zusammenhängend, unbegrenzt und unverzweigt sind. Es sei $z^{(0)} \in U - E$ ein beliebiger Punkt; $w^{(0)} \in W_b$ und $v^{(0)} \in V$ seien beide über $z^{(0)}$ gelegen. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(U - E, z^{(0)})$ ist die freie zyklische Gruppe. Die Fundamentalgruppen $\pi_1(V - \overset{-1}{\eta}(E), v^{(0)})$ und $\pi_1(W_b - \overset{-1}{\gamma}(E), w^{(0)})$ lassen sich vermöge der Projektionen η bzw. γ beide als Untergruppen von $\pi_1(U - E, z^{(0)})$ auffassen. Sind G_η bzw. G_γ diese Untergruppen, so müssen sie beide denselben Index b haben. Da $\pi_1(U - E, z^{(0)})$ frei zyklisch ist, gilt folglich: $G_\eta = G_\gamma$. Es ist aber ein wohlbekannter Satz, daß unverzweigte Überlagerungen, die zur gleichen Untergruppe der Fundamentalgruppe des Grundraums Anlaß geben, äquivalent sind. Folglich sind die Überlagerungen $(V - \overset{-1}{\eta}(E), \eta, U - E)$ und $(W_b - \overset{-1}{\gamma}(E), \gamma, U - E)$ äquivalent. Aus dem Fortsetzungssatz 8 für analytische Überlagerungen ergibt sich dann, daß auch $\mathfrak{V} = (V, \eta, U)$ und $\mathfrak{W} = (W_b, \gamma, U)$ äquivalent sind, w.z.b.w.

Es folgt, daß alle Punkte der Überlagerungen $\mathfrak{L}_b^*(b_1, b_2) = (L_b^*(b_1, b_2), \lambda^*, C^2)$, die nicht über dem Nullpunkt des C^2 liegen, Windungspunkte sind, da eine kritische Menge z. B. aus der Vereinigung der beiden Ebenen $\{z_1 = 0\}$ und $\{z_2 = 0\}$ besteht.

Ist S irgendein topologischer Raum, so nennt man einen Punkt $s \in S$ einen *zellularen* Punkt, wenn es eine Umgebung von s gibt, die einem Zahlenraum homöomorph ist. Eine komplexe Mannigfaltigkeit besitzt nur zellulare Punkte; dagegen enthält der Träger Y einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y}$ im allgemeinen nicht zellulare Punkte. So ist z. B. in Beispiel 2 der über dem Nullpunkt liegende Punkt von $L_b^*(b_1, b_2)$ stets nicht zellular, wenn $b > 1, (b, b_1) = (b, b_2) = 1$. Ein Windungspunkt einer analytischen Überlagerung ist indessen stets zellular.

Wir zeigen nun abschließend in diesem Paragraphen

Satz 11: Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *eine analytische Überlagerung, so ist die Projektion* $\eta(V)$ *der Verzweigungsmenge* V, *falls* V *nicht leer ist, eine rein* 1-*codimensionale analytische Menge in* X.

Beweis: Sei $\eta(V)$ nicht leer; sei A irgendeine kritische Menge von $\mathfrak{Y}$. Dann gilt $\eta(V) \subset A$; nach § 2, g) darf A als rein 1-codimensional angenommen werden. A zerfällt in eindeutiger Weise in irreduzible Komponenten $A_\varkappa$, $\varkappa \in K$. Wir bezeichnen mit $\breve{A}_\varkappa$ die Menge der gewöhnlichen Punkte von A in $A_\varkappa$ und mit $\breve{A}'_\varkappa$ diejenigen Punkte von $\breve{A}_\varkappa$, über denen ein Verzweigungspunkt von $\mathfrak{Y}$ liegt. $\breve{A}'_\varkappa$ ist sicher abgeschlossen in $\breve{A}_\varkappa$. Aus Satz 10 folgt aber, daß $\breve{A}'_\varkappa$ auch offen in $\breve{A}_\varkappa$ ist. Mithin ist, da $\breve{A}_\varkappa$ nach § 1, m) zusammenhängend ist, $\breve{A}'_\varkappa$ entweder leer oder es gilt: $\breve{A}'_\varkappa = \breve{A}_\varkappa$. Hieraus folgt, daß $\eta(V)$ aus der Vereinigung

genau derjenigen $A_\varkappa$ besteht, für die gilt: $\breve{A}'_\varkappa = \breve{A}_\varkappa$; diese Menge ist aber ersichtlich analytisch und rein 1-codimensional in X.

Anmerkung: $\eta(V)$ *ist offensichtlich die minimale kritische Menge von* $\mathfrak{Y}$.

§ 3. Funktionentheorie in analytischen Überlagerungen

1. Die Überlegungen des § 2 betrafen die topologische Struktur analytischer Überlagerungen. Wir führen nun die grundlegenden Begriffe der Funktionentheorie für analytische Überlagerungen ein; mit $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ sei stets eine analytische Überlagerung einer komplexen Mannigfaltigkeit X bezeichnet.

Definition 8 (Holomorphe Funktion): Eine komplex-wertige stetige Funktion f *auf einer offenen Menge* $W \subset Y$ *heißt holomorph in* W, *wenn es zu jedem schlichten Punkt* $y \in W$ *eine schlichte Umgebung* $U(y) \subset W$ *gibt, so daß* $f \circ \eta^{-1}$ *holomorph in* $\eta(U(y))$ *ist.*

Die Menge $I(Y)$ aller in Y holomorphen Funktionen bildet offensichtlich einen Ring. Ist f holomorph in X, so ist $f \circ \eta$ holomorph in Y, daher induziert $\eta: Y \to X$ in natürlicher Weise einen Isomorphismus $\eta^*: I(X) \to I(Y)$ von $I(X)$ in $I(Y)$. Der Ring $I(X)$ liegt somit im Ring $I(Y)$ eingebettet; wir werden im folgenden $I(Y)$ durchweg als Oberring von $I(X)$ auffassen.

Es gilt:

Satz 12: Eine stetige Funktion $f \mid Y$ *auf einer analytischen Überlagerung* $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *ist genau dann holomorph in* Y, *wenn sie ganz algebraisch über* $I(X)$ *ist. Es gilt dann stets:* $(f : I(X)) \leq b(\mathfrak{Y})$[16].

Der Beweis ist einfach. Sei zunächst $f \in I(Y)$. Ist A eine kritische Menge von $\mathfrak{Y}$, so seien mit $w_1(x), \ldots, w_b(x)$ die $b := b(\mathfrak{Y})$ Funktionswerte von f über einem Punkt $x \in X - A$ bezeichnet. Die elementarsymmetrischen Funktionen

$$a'_\beta(x) :\equiv w_1(x) \cdot \ldots \cdot w_\beta(x) + \cdots, \quad \beta = 1, \ldots, b, \quad x \in X - A,$$

sind dann holomorph in $X - A$ (sie sind eindeutig in $X - A$, da sich bei Durchlaufen eines geschlossenen Weges in $X - A$ die b möglichen Funktionswerte von f höchstens untereinander permutieren können). Da f stetig ist, bleibt jede Funktion $a'_\beta(x)$ bei Annäherung an A beschränkt, sie kann daher auf Grund eines für komplexe Mannigfaltigkeiten geltenden Satzes von RIEMANN über hebbare Singularitäten zu einer in ganz X holomorphen Funktion $a_\beta(x)$ fortgesetzt werden, $\beta = 1, \ldots, b$. Nach Konstruktion der $a_1, \ldots, a_b$ ist klar, daß f das Polynom $\omega(w; x) :\equiv w^b + a_1(x) \cdot w^{b-1} + \cdots + a_b(x)$ annulliert. Mithin ist f ganz algebraisch über $I(X)$ mit $(f : I(X)) \leq b$.

Ist umgekehrt eine in Y stetige Funktion f ganz algebraisch über $I(X)$, so folgt aus einem bekannten Satz über die „Wurzeln von Pseudopolynomen" sowie aus dem Satz von RIEMANN über hebbare Singularitäten holomorpher Funktionen in komplexen Mannigfaltigkeiten, daß in einer Umgebung eines jeden schlichten Punktes von Y die Funktion $f \circ \eta^{-1}$ holomorph ist. Damit ist Satz 12 bewiesen.

---

[16]) $(f : I(X))$ bezeichnet wie üblich den Grad von f über $I(X)$.

2. Wir führen nun den Begriff der analytischen Menge sowie der dünnen Menge in analytischen Überlagerungen ein[17]).

Definition 9 (Analytische Menge, dünne Menge): Eine Teilmenge $M \subset Y$ einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ heißt analytisch in Y, wenn jeder Punkt $y \in Y$ eine Umgebung U besitzt, so daß $M \cap U$ die genaue simultane Nullstellenmenge von endlich vielen in U holomorphen Funktionen ist.

Eine Teilmenge $D \subset Y$ heißt dünn in Y, wenn D abgeschlossen in Y ist und jeder Punkt $y \in D$ eine Umgebung U besitzt, so daß $D \cap U$ in einer in U nirgends dichten analytischen Menge enthalten ist.

Wir benötigen im folgenden:

Hilfssatz 3: Ist $D \subset Y$ eine dünne Menge in einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$, so zerlegt D den Raum Y nirgends. $\eta(D)$ ist eine dünne Menge in X.

Beweis: Es sei $x^* \in \eta(D)$ irgendein Punkt, es seien $y_1^*, \ldots, y_s^*$ die über x^* liegenden Punkte von D. Man kann eine zusammenhängende Umgebung U_σ von y_σ^* und eine in U_σ holomorphe Funktion $f_\sigma \not\equiv 0$ finden, so daß gilt: $D \cap U_\sigma \subset \subset \{y \in U_\sigma, f_\sigma(y) = 0\}$, $\sigma = 1, \ldots, s$. Sei dann U eine zusammenhängende Umgebung von x^*, so daß $\overset{-1}{\eta}(U) \cap U_\sigma \subset U_\sigma$; sei $f'_\sigma := f_\sigma \mid U_\sigma \cap \overset{-1}{\eta}(U)$. Nach Satz 12 annulliert f'_σ ein Polynom $\omega_\sigma(w; x) = w^{b_\sigma} + \sum_{\beta=1}^{b_\sigma} a_\beta^{(\sigma)}(x)\, w^{b_\sigma - \beta}$ mit in U holomorphen Koeffizienten, $\sigma = 1, \ldots, s$. Die Funktion $a_{b_\sigma}^{(\sigma)}(x)$ verschwindet genau dann in einem Punkt $x_0 \in U$, wenn es ein $y_\sigma \in U_\sigma$ über x_0 mit $f'_\sigma(y_\sigma) = 0$ gibt, $\sigma = 1, \ldots, s$. Also ist $\eta(D) \cap U$ im Nullstellengebilde L der in U holomorphen Funktion $a(x) := \prod_{\sigma=1}^{s} a_{b_\sigma}^{(\sigma)}(x)$ enthalten. Daher ist $\eta(D)$ dünn in X, denn $\eta(D)$ ist wegen der Eigentlichkeit von η sicher abgeschlossen in X. Da $a(x) \not\equiv 0$, so zerlegt L den Raum U nirgends. Daher zerlegt auch $\overset{-1}{\eta}(L)$ nach § 2, e) den Raum $\overset{-1}{\eta}(U)$ nirgends. Dann haben aber $D \cap \overset{-1}{\eta}(U) \subset \overset{-1}{\eta}(L)$ und mithin D erst recht diese Eigenschaft, q.e.d.

Wir beweisen nun:

Satz 13 (Riemannscher Fortsetzungssatz): Es sei $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung und $D \subset Y$ eine in Y dünne Menge. f^* sei eine in $Y - D$ holomorphe Funktion, jeder Punkt $y_0 \in D$ besitze eine Umgebung U, so daß $f^* \mid U - D$ beschränkt ist. Dann ist f^* in eindeutiger Weise zu einer in ganz Y holomorphen Funktion f fortsetzbar.

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß jeder Punkt $y_0 \in D$ eine Umgebung V besitzt, so daß $f^* \mid V - D$ in ganz V eindeutig holomorph fortsetzbar ist. Wir wählen $V \subset U$ so, daß $(V, \eta, \eta(V))$ eine analytische Überlagerung von $\eta(V)$ ist. $L := \eta(V \cap D)$ ist dann nach Hilfssatz 3 eine dünne Menge in $\eta(V)$. $\overset{-1}{\eta}(L)$ zerlegt

[17]) Es ist zur Vereinfachung einiger Beweise zweckmäßig, auch den Begriff der dünnen Menge einzuführen. Dieser Begriff ist jedoch lediglich ein Hilfsbegriff; die für die komplexe Analysis wichtigen Mengen (z. B. Polstellenmengen meromorpher Funktionen usw.) sind nicht nur dünn, sondern stets analytisch.

V nirgends, weiter annulliert $f^* \mid V - \overset{-1}{\eta}(L)$ nach Satz 12 ein Polynom $\omega^*(w;x) = w^{b^*} + \sum_{\beta=1}^{b^*} a_\beta^*(x) \cdot w^{b^*-\beta}$ mit in $\eta(V) - L$ holomorphen Koeffizienten $a_\beta^*(x)$. Wir behaupten nun, daß die Abbildung $f^*: V - \overset{-1}{\eta}(L) \to C^1(w)$ eindeutig zu einer stetigen Abbildung $f: V \to C^1(w)$ fortsetzbar ist. Dazu ist nur zu zeigen, daß die Bedingungen α) und β') von Satz 1 erfüllt sind. β') ist trivialerweise erfüllt, denn $f^*(V - \overset{-1}{\eta}(L))$ liegt innerhalb eines hinreichend großen Kreises um den Ursprung der w-Ebene, da $f^* \mid V - \overset{-1}{\eta}(L)$ beschränkt ist. Um α) zu verifizieren, beachten wir, daß man jede Funktion $a_\beta^*(x)$ auf Grund des für komplexe Mannigfaltigkeiten geltenden Riemannschen Fortsetzungssatzes zu einer in ganz $\eta(V)$ holomorphen Funktion $a_\beta(x)$ fortsetzen kann, da $a_\beta^*(x)$ als β-te elementarsymmetrische Funktion von $f^* \mid V - \overset{-1}{\eta}(L)$ bei Annäherung an L stets beschränkt bleibt. Es ist nun evident, daß für jedes $y \in \overset{-1}{\eta}(L)$ die Menge B_y der Berührungspunkte der Bildfilterbasis $f^*(\mathfrak{U}_{V-\overset{-1}{\eta}(L)}(y))$ höchstens aus den Nullstellen der Gleichung $\omega(w;\eta(y)) = 0$, wo $\omega(w;x) := w^{b^*} + \sum_{\beta=1}^{b^*} a_\beta(x) \times \times w^{b^*-\beta}$, besteht und daher diskret in der w-Ebene liegt. Also ist $f^*: V - -\overset{-1}{\eta}(L) \to C^1(w)$ nach Satz 1 eindeutig zu einer stetigen Abbildung f von ganz V in die w-Ebene fortsetzbar. Die fortgesetzte Funktion $f \mid V$ ist nach Satz 12 holomorph in V, da sie das Pseudopolynom $\omega(w;x)$ annulliert. Da $f \mid V - D = f^* \mid V - D$, ist somit Satz 13 bewiesen.

3. Wir führen weiter den Begriff der meromorphen Funktion ein.

Definition 10 (Meromorphe Funktion): Unter einer meromorphen Funktion h in einer offenen Menge $W \subset Y$ einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ versteht man eine außerhalb einer in W dünnen Menge Q definierte holomorphe Funktion h mit folgenden Eigenschaften:

α) h ist in keinem Punkt von Q holomorph fortsetzbar.

β) Zu jedem Punkt $y_0 \in Q$ gibt es eine zusammenhängende Umgebung $U \subset W$ und eine in U holomorphe Funktion $g \not\equiv 0$, so daß $g \cdot h \mid U - Q$ in ganz U holomorph fortsetzbar ist.

Die Menge Q heißt die *Polstellenmenge* von h; ist Q leer, so ist h holomorph in W. Summe und Produkt zweier in W meromorphen Funktionen h_1, h_2 können in naheliegender Weise definiert werden, sie sind wieder meromorphe Funktionen in W. — Die vorstehende Definition der meromorphen Funktion stimmt, falls $Y = X$ der Träger der trivialen Überlagerung ist, mit der für komplexe Mannigfaltigkeiten geläufigen Definition überein.

Man überlegt (unter Verwendung von Satz 13) sofort:

Es sei $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung und h eine in Y außerhalb einer dünnen Menge D holomorphe Funktion. Dann definiert h genau dann (in natürlicher Weise) eine in Y meromorphe Funktion, wenn es zu jedem Punkt $y_0 \in D$ eine zusammenhängende Umgebung U und eine in U holomorphe Funktion $g \not\equiv 0$ gibt, so daß $g \cdot h \mid U - D$ beschränkt ist.

Wir beweisen:

a) *Ist h meromorph in Y mit der Polstellenmenge Q, so gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \eta(Q)$ eine zusammenhängende Umgebung V und eine in V holomorphe Funktion $a(x) \not\equiv 0$, so daß $(a \circ \eta) \cdot h$ in ganz $\overset{-1}{\eta}(V)$ holomorph fortsetzbar ist.*

Wir brauchen nur zu zeigen, daß es zu jedem Punkt $y_0 \in Q$ über x_0 ein V und ein $a(x) \not\equiv 0$ gibt, so daß $(a \circ \eta) \cdot h$ in y_0 hinein holomorph fortsetzbar ist. Nach Voraussetzung gibt es eine zusammenhängende Umgebung U von y_0 und eine in U holomorphe Funktion $g \not\equiv 0$, so daß $g \cdot h|U - Q$ beschränkt ist. Man kann offensichtlich U so wählen, daß (U, η, V), $V := \eta(U)$, eine analytische Überlagerung ist. Dann annulliert $g|U$ ein Polynom

$$\omega(w; x) \equiv w^s + a_1(x) \cdot w^{s-1} + \cdots + a_s(x)$$

mit in V holomorphen Koeffizienten. Der Quotient $p(y) := \frac{(a_s \circ \eta)(y)}{g(y)}$ ist außerhalb der Menge $\{y \in U, g(y) = 0\}$ holomorph; überdies ist $p(y)$ in ganz U holomorph fortsetzbar, da $p(y)$ das Polynom

$$\tilde{\omega}(w; x) \equiv w^s + a_{s-1}(x) \cdot w^{s-1} + a_{s-2}(x) a_s(x) \cdot w^{s-2} + \cdots + a_1(x) a_s^{s-2}(x) \cdot w + a_s^{s-1}(x)$$

annulliert. Aus der Gleichung $(a_s \circ \eta) \cdot h = \left(\frac{a_s \circ \eta}{g}\right)(g \cdot h)$ folgt dann, daß $V = \eta(U)$ und $a(x) := a_s(x)$ die verlangten Eigenschaften haben.

Der Ring der in Y bzw. X meromorphen Funktionen sei fortan mit $K(Y)$ bzw. $K(X)$ bezeichnet. Es gilt in Analogie zu Satz 12:

Satz 12': Auf einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ sei außerhalb einer in Y dünnen Menge D eine stetige Funktion h gegeben. Dann definiert h genau dann eine in Y meromorphe Funktion mit einer Polstellenmenge $Q \subset D$, wenn h ganz algebraisch über $K(X)$ ist. Es gilt stets: $(h : K(X)) \leq b(\mathfrak{Y})$.

Beweis: Es werde zunächst angenommen, daß es eine in Y meromorphe Funktion h' mit einer Polstellenmenge $Q \subset D$ gibt, so daß $h'|Y - D = h|Y - D$. Dann ist $h|Y - D$ insbesondere holomorph; analog wie im Beweis von Satz 12 findet man daher Funktionen $a_1(x), \ldots, a_b(x)$, $b = b(\mathfrak{Y})$, die in $X - \eta(D)$ holomorph sind, so daß $h|Y - \overset{-1}{\eta}(\eta(D))$ das Polynom $\omega(w; x) = w^b + a_1(x) w^{b-1} + \cdots + a_b(x)$ annulliert. Es bleibt zu zeigen, daß alle Koeffizienten $a_\beta(x)$ in X meromorph fortsetzbar sind, $\beta = 1, \ldots, b$. Sei $x_0 \in \eta(D)$ ein beliebiger Punkt. Nach a) gibt es eine zusammenhängende Umgebung V von x_0 und eine in V holomorphe Funktion $a(x) \not\equiv 0$, so daß $(a \circ \eta) \cdot h'|\overset{-1}{\eta}(V) - \overset{-1}{\eta}(\eta(D))$ zu einer in ganz $\overset{-1}{\eta}(V)$ holomorphen Funktion h^* fortsetzbar ist. h^* annulliert ersichtlich das Polynom

$$\omega^*(w; x) = w^b + a_1(x) a(x) w^{b-1} + \cdots + a_{b-1}(x) a(x)^{b-1} w + a_b(x) a(x)^b.$$

Da die Koeffizienten desselben die elementarsymmetrischen Funktionen von $h^*|\overset{-1}{\eta}(V)$ sind, folgt, daß alle Funktionen $a_\beta(x) a(x)^\beta$ holomorph in ganz V fortsetzbar sind, $\beta = 1, \ldots, b$. Das bedeutet aber, daß $a_1(x), \ldots, a_b(x)$ in V meromorph fortsetzbar sind. Mithin ist h ganz algebraisch über $K(X)$.

Es sei umgekehrt h ganz algebraisch über $K(X)$; h annulliere etwa das Polynom

$$\omega(w; x) = w^b + a_1(x) w^{b-1} + \cdots + a_b(x), \; a_\beta(x) \in K(X), \; \beta = 1, \ldots, b.$$

Dann gibt es eine nirgends dichte analytische Menge S in X, so daß $a_\beta(x)|X - S$ holomorph ist, $\beta = 1, \ldots, b$. Daher gibt die in $Y - D$ stetige Funktion h in natürlicher Weise zu einer in $Y - \overset{-1}{\eta}(S)$ holomorphen Funktion $\check{h}$ Anlaß, die außerhalb $D \cup \overset{-1}{\eta}(S)$ mit h übereinstimmt. Nun gibt es zu jedem Punkt $y_0 \in \overset{-1}{\eta}(S)$ nach Voraussetzung eine zusammenhängende Umgebung V von $\eta(y_0)$ und eine in V holomorphe Funktion $a(x) \not\equiv 0$, so daß jede Funktion $a(x) \cdot a_\beta(x)$ zu einer in ganz V holomorphen Funktion $a_\beta^*(x)$ fortsetzbar ist. Dann bleibt aber $(a \circ \eta) \cdot \check{h}|V - \overset{-1}{\eta}(S)$ bei Annäherung an y_0 beschränkt, da $(a \circ \eta) \cdot \check{h}$ über $V - \overset{-1}{\eta}(S)$ das Polynom

$$\omega^*(w; x) = w^b + \sum_{\beta=1}^{b} (a_\beta^*(x) \cdot a(x)^\beta)\, w^{b-\beta}$$

annulliert. Also ist $\check{h}$ und folglich h meromorph in Y, fortsetzbar q.e.d.

Wir werden in § 13 das folgende Fortsetzungslemma für meromorphe Funktionen benutzen:

b) *(Fortsetzungslemma): Es sei $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung und $M \subset X$ eine mindestens 2-codimensionale analytische Menge in X. Dann ist jede in $Y - \overset{-1}{\eta}(M)$ meromorphe Funktion h^* eindeutig zu einer in ganz Y meromorphen Funktion h fortsetzbar.*

Der Beweis ist trivial: Nach Satz 12' annulliert h^* ein Polynom

$$\omega^*(w; x) = w^b + a_1(x)\, w^{b-1} + \cdots + a_b(x)$$

mit in $X - M$ meromorphen Koeffizienten. Nach einem klassischen Satz über die Fortsetzbarkeit meromorpher Funktionen in komplexen Mannigfaltigkeiten sind alle Koeffizienten $a_\beta^*(x)$ zu in ganz X meromorphen Funktionen fortsetzbar. Es sei S eine in X nirgends dichte analytische Menge, so daß alle Funktionen $a_\beta^*(x)$ in $X - S$ holomorph sind. Dann gibt h^* in natürlicher Weise zu einer in $Y - \overset{-1}{\eta}(S)$ holomorphen Funktionen h Anlaß. Da h nach dem Vorstehenden ganz algebraisch über $K(X)$ ist, folgt aus Satz 12', daß h^* in ganz Y meromorph fortsetzbar ist.

4. Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung, so ist auf Y die Garbe $\mathcal{O}(Y)$ der holomorphen Funktionskeime ausgezeichnet. In diesem Abschnitt sollen einige Aussagen über die algebraische Struktur der Halme $\mathcal{O}_y$ dieser Garbe bewiesen werden.

Mit $\mathcal{O}(X)$ werde die Garbe der in der komplexen Mannigfaltigkeit X holomorphen Funktionen bezeichnet. Jeder Halm $\mathcal{O}_x, x \in X$, ist zu einem „Potenzreihenring" (von im Nullpunkt eines Zahlenraumes konvergenten Potenzreihen) isomorph. Daher gilt nach bekannten Sätzen:

c) *Alle Halme $\mathcal{O}_x, x \in X$, sind noethersche Integritätsringe, für die der Satz von der eindeutigen Primelementzerlegung gilt. Insbesondere ist $\mathcal{O}_x$ ganz abgeschlossen (in seinem Quotientenkörper).*

Jeder Halm $\mathcal{O}_y$ von $\mathcal{O}(Y)$ läßt sich in natürlicher Weise als Oberring von $\mathcal{O}_{\eta(y)} \subset \mathcal{O}(X)$ auffassen; jedes Element von $\mathcal{O}_y$ ist ganz algebraisch über $\mathcal{O}_{\eta(y)}$ höchstens vom Grad $b(\mathfrak{Y})$. Wir behaupten:

Satz 14: Jeder Halm $\mathcal{O}_y$ ist ein ganz abgeschlossener noetherscher Integritätsring. $\mathcal{O}_y$ ist ein endlicher $\mathcal{O}_{\eta(y)}$-Modul.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{O}_y$ stets nullteilerfrei ist. Es seien $f, g \in \mathcal{O}_y$ mit $f \cdot g = 0 \in \mathcal{O}_y$. Dann gibt es eine zusammenhängende Umgebung U von y und in U holomorphe Repräsentanten $\bar{f}, \bar{g}$ von f, g mit $\bar{f} \cdot \bar{g} = 0|U$. η bildet U mit Ausnahme einer U nirgends zerlegenden Menge N lokal topologisch in X ab. Daher folgt sofort: $\bar{f}|U - N = 0$ oder $\bar{g}|U - N = 0$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dann auch: $\bar{f}|U = 0$ oder $\bar{g}|U = 0$. Also ist mindestens einer der beiden Keime f, g der Nullkeim.

Wir zeigen weiter, daß $\mathcal{O}_y$ ganz abgeschlossen ist. Sei $h = \frac{f}{g}$, $f, g \in \mathcal{O}_y$, $g \neq 0$, ein Element des Quotientenkörpers von $\mathcal{O}_y$, welches ein Polynom

$$\Omega(w) = w^r + c_1 w^{r-1} + \cdots + c_r, \quad c_1, \ldots, c_r \in \mathcal{O}_y,$$

annulliert. In einer zusammenhängenden Umgebung U von y gibt es holomorphe Repräsentanten $\bar{f}, \bar{g}, \bar{c}_\varrho$ der Keime f, g, c_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, es gilt $\bar{g} \not\equiv 0$. h selbst wird dann von der in U meromorphen Funktion $\bar{h} = \frac{\bar{f}}{\bar{g}}$ induziert. Diese Funktion ist außerhalb der in U analytischen Menge $\{y \in U, \bar{g}(y) = 0\}$ holomorph und bleibt bei Annäherung an dieselbe beschränkt, da sie das Polynom

$$\bar{\Omega}(w; y) = w^r + \bar{c}_1(y)\, w^{r-1} + \cdots + \bar{c}_r(y)$$

annulliert. Also ist $\bar{h}|U - \{y \in U, \bar{g}(y) = 0\}$ nach Satz 12 in ganz U holomorph fortsetzbar. Dann ist aber auch der von $\bar{h}$ in y erzeugte Keim h holomorph, d. h. es gilt: $h \in \mathcal{O}_y$.

Um zu beweisen, daß $\mathcal{O}_y$ noethersch ist, genügt es zu zeigen, da $\mathcal{O}_{\eta(y)}$ nach c) noethersch ist, daß $\mathcal{O}_y$ ein endlicher $\mathcal{O}_{\eta(y)}$-Modul ist. Das aber folgt unmittelbar aus folgendem

Lemma: Es sei Γ ein ganz abgeschlossener noetherscher Integritätsring mit vollkommenem Quotientenkörper. Es sei Δ ein Oberintegritätsring von Γ, es gebe eine natürliche Zahl m, derart, daß jedes Element $\delta \in \Delta$ ganz über Γ höchstens vom Grad m ist. Dann ist Δ ein endlicher Γ-Modul.

Der Beweis dieses Lemmas verläuft analog wie in [34], p. 81. — Die restlichen Aussagen von Satz 14 ergeben sich daher, wenn man setzt: $\Gamma = \mathcal{O}_{\eta(y)}$, $\Delta = \mathcal{O}_y$, $m = b(\mathfrak{Y})$.

Anmerkung: Für die Integritätsringe $\mathcal{O}_y, y \in Y$, gilt im allgemeinen nicht der Satz von der eindeutigen Primelementzerlegung.

5. Analytische Überlagerungen sollen im folgenden Paragraphen zur lokalen Charakterisierung der sog. α-Räume herangezogen werden. Dazu benötigen wir jedoch noch den grundlegenden Begriff der holomorphen Abbildung einer analytischen Überlagerung in eine ebensolche.

Definition 11 (Holomorphe Abbildung): Sind $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ und $\mathfrak{Y}' = (Y' \eta', X')$ zwei analytische Überlagerungen, so heißt eine stetige Abbildung $\tau: W \to Y'$ einer offenen Menge $W \subset Y$ in Y' holomorph, wenn folgendes gilt: Ist f' eine holomorphe Funktion in einer offenen Menge $W' \subset Y'$, so ist $f' \circ \tau$ holomorph in $\overset{-1}{\tau}(W') \subset W$.

Nach dieser Definition sind die holomorphen Funktionen auf $\mathfrak{Y}$ genau die holomorphen Abbildungen von Y in die Zahlenebene C^1.

§ 4. Der Begriff des komplexen α-Raumes

1. Komplexe α-Räume sind Hausdorffsche Räume, die mit einer komplexen α-Struktur versehen sind. Wir führen zunächst den Begriff der α-Karte ein. R bezeichne stets einen Hausdorffschen Raum (vgl. zum folgenden auch [17]).

Definition 12 (α-Karte): *Eine α-Karte auf R ist ein Tripel $(U, \psi, \mathfrak{G})$, wo U eine nichtleere offene Menge in R und ψ eine topologische Abbildung von U auf eine analytische Überlagerung $\mathfrak{G} = (Y, \eta, G)$ eines Gebietes G eines komplexen Zahlenraumes C^n ist.*

Zwischen α-Karten wird eine „Verträglichkeitsbeziehung" definiert.

Definition 13 (Holomorph verträgliche α-Karten): Zwei α-Karten $(U_i, \psi_i, \mathfrak{G}_i)$, $i = 1,2$, auf R heißen holomorph verträglich, wenn $U_1 \cap U_2$ leer ist oder wenn

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(U_1 \cap U_2) \to \psi_2(U_1 \cap U_2)$$

eine biholomorphe (= umkehrbar holomorphe) Abbildung ist.

Holomorph verträgliche α-Karten werden zu α-Atlanten zusammengefaßt.

Definition 14 (α-Atlas): Ein α-Atlas auf R ist eine Kollektion von paarweise miteinander holomorph verträglichen α-Karten $(U_\iota, \psi_\iota, \mathfrak{G}_\iota)$, $\iota \in I$, wobei $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota = R$.

Gibt es auf R einen α-Atlas, so ist R im kleinen einer analytischen Überlagerung homöomorph und somit lokal kompakt und lokal wegzusammenhängend. Daher zerfällt R in kanonischer Weise in zusammenhängende Komponenten $R_\varkappa$, $\varkappa \in K$. Jede solche Komponente $R_\varkappa$ besitzt eine wohlbestimmte komplexe Dimension $d(R_\varkappa) < \infty$. Die Dimension von R selbst wird definiert durch $d(R) = \sup_{\varkappa \in K} d(R_\varkappa)$; offensichtlich kann $d(R)$ unendlich sein. Haben alle Komponenten von R die gleiche Dimension d, so nennt man R rein d-dimensional; man schreibt dann auch: $R = R^d$.

Ein α-Atlas auf R heißt *vollständig*, wenn jede α-Karte auf R, die mit allen α-Karten des Atlas holomorph verträglich ist, zu diesem Atlas gehört. Ein vollständiger α-Atlas auf R heißt auch ein *α-Strukturatlas*.

Man zeigt leicht, daß jeder α-Atlas auf R in eindeutiger Weise vervollständigt werden kann.

Definition 15 (α-Raum): Ein Hausdorffscher Raum R, der mit einem vollständigen α-Atlas versehen ist, heißt ein komplexer α-Raum (kurz: α-Raum).

Der Überlagerungsraum Y einer jeden analytischen Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ einer komplexen Mannigfaltigkeit X, insbesondere also X selbst, kann in kanonischer Weise als α-Raum aufgefaßt werden: man gibt sich eine offene Überdeckung $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$ von X so vor, daß jedes U_ι durch eine biholomorphe Abbildung ψ_ι auf ein Gebiet in einem Zahlenraum abbildbar ist. Dann ist offensichtlich $\{(\overset{-1}{\eta}(U_\iota), j_\iota, \mathfrak{G}_\iota), \iota \in I\}$, wo $\mathfrak{G}_\iota := (\overset{-1}{\eta}(U_\iota), \psi_\iota \circ \eta, \psi_\iota(U_\iota))$ und j_ι die Identität ist, ein α-Atlas auf Y. Derselbe kann zu einem α-Strukturatlas auf Y vervollständigt werden, der ersichtlich unabhängig von der Wahl der Überdeckung $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$ ist.

Definition 16 (Uniformisierbarer Punkt): Ein Punkt r eines α-Raumes R heißt uniformisierbar, wenn es eine α-Karte $(U, \psi, \mathfrak{S})$, $r \in U$, des α-Strukturatlas von R gibt, so daß $\mathfrak{S}$ die triviale Überlagerung eines Gebietes eines Zahlenraumes ist.

Es folgt sofort:

a) *Ein α-Raum R ist genau dann eine komplexe Mannigfaltigkeit, wenn alle Punkte von R uniformisierbar sind.*

Jeder uniformisierbare Punkt ist ein zellularer Punkt; es sind den Verff. keine Beispiele von α-Räumen mit nicht uniformisierbaren Punkten, die zellular sind, bekannt.

Jede nichtleere offene Menge R' eines α-Raumes R ist in natürlicher Weise mit einem α-Strukturatlas versehen und mithin ein α-Raum. Das topologische Produkt zweier α-Räume trägt ebenfalls einen natürlichen α-Strukturatlas (man benutze § 2. a)) und ist daher ein α-Raum.

2. In α-Räumen lassen sich die Grundbegriffe der Funktionentheorie einführen. Mit R werde stets ein α-Raum bezeichnet.

Definition 17 (Holomorphe Funktion): Eine komplex-wertige Funktion f in einer offenen Menge $W \subset R$ heißt holomorph in W, wenn für jede α-Karte $(U, \psi, \mathfrak{Y})$, $U \subset W$, des α-Strukturatlas von R die Funktion $f \circ \psi^{-1}$ in $\psi(U)$ holomorph ist.

Man überlegt sofort: *$f|W$ ist bereits dann holomorph in W, wenn es zu jedem Punkt $r \in W$ eine α-Karte $(U, \psi, \mathfrak{S})$, $r \in U \subset W$, des α-Strukturatlas von R gibt, so daß $f \circ \psi^{-1}$ in $\psi(U)$ holomorph ist.*

Hieraus folgt: *Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung, so ist eine in $W \subset Y$ komplex-wertige Funktion f genau dann holomorph in W im Sinne von Def. 17, wenn sie dort holomorph im Sinne von Def. 8 ist.*

Die Garbe der holomorphen Funktionskeime über einem α-Raum sei wieder mit $\mathcal{O}(R)$ bezeichnet. Wir nennen $\mathcal{O}(R)$ die *α-Strukturgarbe* des α-Raumes R. Aus Satz 14 folgt:

b) *Jeder Halm $\mathcal{O}_r$, $r \in R$, der α-Strukturgarbe $\mathcal{O}(R)$ eines α-Raums R ist ein ganz abgeschlossener noetherscher Integritätsring.*

Nachdem der Begriff der holomorphen Funktion für α-Räume erklärt ist, kann man auch den Begriff der holomorphen Abbildung eines α-Raums in einen anderen einführen. Die Definition 11 kann wörtlich übertragen werden.

3. Es sei R ein α-Raum; mit $\mathfrak{M}_r$ sei der Quotientenkörper von $\mathcal{O}_r$, $r \in R$ bezeichnet. Offensichtlich läßt sich die Menge $\{\mathfrak{M}_r, r \in R\}$ in natürlicher Weise als eine $\mathcal{O}$-Garbe über R auffassen. Wir bezeichnen diese Garbe mit $\mathfrak{M}(R)$ und nennen sie die *Garbe der meromorphen Funktionskeime* über R. $\mathcal{O}(R)$ kann in natürlicher Weise als eine Untergarbe von $\mathfrak{M}(R)$ aufgefaßt werden.

Definition 18 (Meromorphe Funktion): Eine meromorphe Funktion h in einem α-Raum R ist eine Schnittfläche in $\mathfrak{M}(R)$, $h \in H^0(R, \mathfrak{M})$.

Es läßt sich leicht zeigen:

Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung einer komplexen Mannigfaltigkeit X, so kann jede meromorphe Funktion auf Y im Sinne von Def. 18

in natürlicher Weise als eine meromorphe Funktion auf Y im Sinne von Def. 10 aufgefaßt werden und umgekehrt.

Man benötigt wieder den Begriff der analytischen Menge, der analog wie in § 3 hier für α-Räume zu definieren ist. Analytische Mengen in α-Räumen haben lokal dieselbe Struktur wie analytische Mengen in analytischen Überlagerungen; daher gilt insbesondere:

c) *Eine nirgends dichte analytische Menge in einem α-Raum R zerlegt R nirgends.*

§ 5. Geringte Räume

1. Der Begriff des geringten Raumes stellt eine wesentliche Verallgemeinerung des Begriffes des komplexen α-Raumes dar. Wir definieren:

Definition 19 (Geringter Raum): Ein topologischer Raum X heißt ein geringter Raum, wenn X mit einer geringten Struktur versehen ist, d. h. wenn über X eine Untergarbe $\mathfrak{A}$ von Ringen der Garbe der Keime der komplex-wertigen stetigen Funktionen ausgezeichnet ist, die die Garbe Γ der konstanten komplex-wertigen Funktionskeime umfaßt. $\mathfrak{A}$ heißt die Strukturgarbe des geringten Raumes X.

Um anzudeuten, daß X ein geringter Raum mit der Strukturgarbe $\mathfrak{A}$ ist, schreiben wir auch gelegentlich $(X, \mathfrak{A})$ statt X.

Es ist klar, daß jeder α-Raum R zu einem geringten Raum wird, wenn man über R die α-Strukturgarbe $\mathcal{O}$ der Keime der holomorphen Funktionen als geringte Struktur auszeichnet. Wir fassen von nun an jeden α-Raum R als einen geringten Raum, versehen mit seiner α-Strukturgarbe $\mathcal{O}$, auf.

Definition 20 (Morphe Funktion, morpher Funktionskeim): Ist U eine offene Menge in $(X, \mathfrak{A})$, so heißt eine stetige Funktion f in U eine morphe Funktion genau dann, wenn f eine Schnittfläche in $\mathfrak{A}$ über U ist.

Die Elemente eines jeden Halmes $\mathfrak{A}_x$, $x \in X$, heißen morphe Funktionskeime in $x \in X$.

Es folgt sofort:

Die Gesamtheit der in einer offenen Menge U von X morphen Funktionen bildet einen kommutativen Ring mit Einselement.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_x$ den Quotientenring von $\mathfrak{A}_x$ und setzen $\mathfrak{M} := \{\mathfrak{M}_x, x \in X\}$. $\mathfrak{M}$ kann in natürlicher Weise als eine Garbe von Ringen aufgefaßt werden; offensichtlich ist $\mathfrak{A}$ eine Untergarbe von $\mathfrak{M}$.

Definition 21 (Romorphe Funktion, romorpher Funktionskeim): Ist U eine offene Menge in X, so heißt jede Schnittfläche in $\mathfrak{M}$ über U eine romorphe Funktion in U.

Die Elemente eines jeden Halmes $\mathfrak{M}_x$, $x \in X$, heißen romorphe Funktionskeime in $x \in X$, $\mathfrak{M}$ heißt die Garbe der romorphen Funktionskeime über X.

Definition 22 ($\mathfrak{A}$-Menge): Eine abgeschlossene Teilmenge M eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ heißt eine $\mathfrak{A}$-Menge in X, wenn jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung $U(x_0)$ besitzt, so daß $M \cap U(x_0)$ die genaue simultane Nullstellenmenge eines endlichen Systems $\{f_\iota\}$ von in $U(x_0)$ morphen Funktionen f_ι ist.

Die $\mathcal{O}$-Mengen eines komplexen α-Raumes R sind die analytischen Mengen in R.

Zu jeder $\mathfrak{A}$-Menge M eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ gehört eine maximale $\mathfrak{A}$-Idealgarbe $\mathfrak{J}(M) = \mathfrak{J}$; der Halm $\mathfrak{J}_x$, $x \in X$, besteht aus allen morphen Funktionskeimen $f_x \in \mathfrak{A}_x$, die in einer Umgebung $U(x)$ einen Repräsentanten $f_{U(x)} \in H^0(U(x), \mathfrak{A})$ besitzen, der auf $M \cap U(x)$ verschwindet.

2. Mit X, Y, Z seien stets geringte Räume bezeichnet; ihre Strukturgarben seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. Wir führen den Begriff der morphen Abbildung ein:

Definition 23 (Morphe Abbildung): Eine stetige Abbildung $\tau: X \to Y$ von X in Y heißt eine morphe Abbildung, wenn für jeden Punkt $x \in X$ durch die Zuordnung:

$$b_{\tau(x)} \to b_{\tau(x)} \circ \tau, \quad b_{\tau(x)} \in \mathfrak{B}_{\tau(x)},$$

ein Homomorphismus $\tau_x^*: \mathfrak{B}_{\tau(x)} \to \mathfrak{A}_x$ von $\mathfrak{B}_{\tau(x)}$ in $\mathfrak{A}_x$ definiert wird.

Eine morphe Abbildung $\tau: X \to Y$ heißt bimorph, wenn τ eine topologische Abbildung auf Y und $\tau^{-1}: Y \to X$ eine morphe Abbildung ist.

Es sei sofort angemerkt:

a) *Eine stetige Abbildung $\tau: X \to Y$ ist genau dann morph, wenn folgendes gilt: Ist f irgendeine morphe Funktion in einem Teilbereich V von Y, so ist $f \circ \tau$ eine morphe Funktion im Bereich $\overset{-1}{\tau}(V) \subset X$.*

b) *Sind $\tau: X \to Y$ und $\sigma: Y \to Z$ morphe Abbildungen, so ist auch die zusammengesetzte Abbildung $\sigma \circ \tau: X \to Z$ morph.*

Ist die Strukturgarbe $\mathfrak{B}$ des Raumes Y die konstante Garbe Γ der komplexen Zahlen, so ist offensichtlich jede stetige Abbildung $\tau: X \to Y$ morph.

Wir fassen im folgenden die $\mathfrak{A}$-Mengen von X stets als topologische Unterräume von X, versehen mit der Relativtopologie, auf. Dann gilt:

c) *Auf jeder $\mathfrak{A}$-Menge M in X gibt es eine natürliche geringte Struktur, so daß die Injektion $\iota: M \to X$ eine morphe Abbildung ist.*

Beweis: Wir definieren die Strukturgarbe $\mathfrak{A}'$ über M durch ein Garbendatum $\{A'(U'), r_{V'}^{U'}\}$. Für jede offene Menge U' von M sei $A'(U')$ die Menge aller stetigen Funktionen in U', die als Spur einer morphen Funktion $f \in H^0(U, \mathfrak{A})$ auftreten, wobei U irgendeine offene Menge in X mit $U \cap M = U'$ ist. Man hat natürliche Beschränkungen $r_{V'}^{U'}$ mit den bekannten Eigenschaften. Daher ist die Gesamtheit $\{A'(U'), r_{V'}^{U'}\}$ das Datum einer Garbe $\mathfrak{A}'$ von Ringen über M. Zeichnet man $\mathfrak{A}'$ als Strukturgarbe über M aus, so ist offensichtlich $\iota: M \to X$ eine morphe Abbildung.

Auf Grund von c) nennt man die $\mathfrak{A}$-Mengen eines geringten Raumes X auch geringte Unterräume von X.

Bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{A}}'$ die triviale Fortsetzung der Strukturgarbe $\mathfrak{A}'$ eines geringten Unterraumes M von X auf X (es gilt also: $\tilde{\mathfrak{A}}'_x = 0$, falls $x \notin M$; $\tilde{\mathfrak{A}}'_x = \mathfrak{A}'_x$ sonst), und mit $\mathfrak{J}$ die zu M gehörende Idealgarbe, so sieht man unmittelbar, daß $\tilde{\mathfrak{A}}'$ und $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ kanonisch isomorph sind.

Auf dem topologischen Produkt $X \times Y$ zweier geringter Räume $(X, \mathfrak{A})$, $(Y, \mathfrak{B})$ kann in naheliegender Weise eine geringte Struktur definiert werden: sind U bzw. V offene Mengen in X bzw. Y, so zeichne man über $U \times V$ alle diejenigen stetigen Funktionen $f(x, y)$ aus, für die bei festem x_0 bzw. y_0 jeweils gilt:

$$f(x_0, y) \in H^0(V, \mathfrak{B}), \quad f(x, y_0) \in H^0(U, \mathfrak{A}).$$

Die Menge dieser Funktionen bildet einen Ring; da das Mengensystem $\{U \times V, U \subset X$ offen, $V \subset Y$ offen$\}$ eine Basis der offenen Mengen von $X \times Y$ bildet, wird somit eine geringte Struktur auf $X \times Y$ definiert. Diese Struktur ist jedoch für Anwendungen vielfach ungeeignet; sind z. B. X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so stimmt die natürliche differenzierbare Struktur auf $X \times Y$ nicht mit der soeben definierten Produktstruktur überein (vgl. hierzu jedoch § 9).

Eine für die Anwendungen in der komplexen Analysis besonders wichtige Klasse von geringten Räumen sind die geringten Räume vom Typ F.

Definition 24 (Geringter Raum vom Typ F): Ein geringter Raum $(X, \mathfrak{A})$ heißt vom Typ F, wenn der Riemannsche Fortsetzungssatz für morphe Funktionen gilt, das soll heißen: Ist M irgendeine $\mathfrak{A}$-Menge in einer offenen Menge U von X, die nirgends dicht in U liegt, so ist jede in $U - M$ beschränkte morphe Funktion zu einer in ganz U morphen Funktion fortsetzbar.

Nach Satz 12 ist jeder α-Raum $(R, \mathcal{O})$ vom Typ F.

Wir beweisen:

Satz 15: Eine stetige Abbildung $\tau : X \to Y$ eines geringten Raumes $(X, \mathfrak{A})$ vom Typ F in einen geringten Raum $(Y, \mathfrak{B})$, die außerhalb einer in X nirgends dichten $\mathfrak{A}$-Menge M morph ist, ist morph schlechthin.

In der Tat! Sei g irgendeine morphe Funktion in einer offenen Menge U von Y. Dann ist $g \circ \tau$ nach Voraussetzung in $\overset{-1}{\tau}(U) - M$ morph. Da $g \circ \tau$ in ganz $\overset{-1}{\tau}(U)$ stetig und $(X, \mathfrak{A})$ vom Typ F ist, folgt unmittelbar, daß $g \circ \tau$ in ganz $\overset{-1}{\tau}(U)$ morph ist, q.e.d.

Es folgt nun sofort:

Korollar: $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ seien geringte Räume vom Typ F; $\tau : X \to Y$ sei eine topologische Abbildung von X auf Y. Es gebe eine nirgends dichte $\mathfrak{B}$-Menge N in Y, so daß $\tau : X - \overset{-1}{\tau}(N) \to Y - N$ bimorph und $\overset{-1}{\tau}(N)$ eine $\mathfrak{A}$-Menge ist. Dann ist $\tau : X \to Y$ bimorph schlechthin.

3. Über einem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$ kann die Theorie der $\mathfrak{A}$-Garben entwickelt werden[18]) (vgl. [19] sowie [30]). Insbesondere ist der Begriff der kohärenten $\mathfrak{A}$-Garbe wohldefiniert und hat alle aus der analytischen Theorie bekannten elementaren Eigenschaften. Wir definieren nun:

Definition 25 (Freie Garbe): Eine kohärente $\mathfrak{A}$-Garbe $\mathfrak{S}$ über einem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$ heißt frei in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn der Halm $\mathfrak{S}_{x_0}$ ein freier $\mathfrak{A}_{x_0}$-Modul ist, d. h. eine (endliche) Basis besitzt. Eine in jedem Punkt $x_0 \in X$ freie Garbe heißt frei schlechthin.

Wir beweisen sofort:

d) *Ist $\mathfrak{A}$ kohärent, so ist eine kohärente $\mathfrak{A}$-Garbe $\mathfrak{S}$ genau dann frei in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn es eine Umgebung U von x_0 und eine natürliche Zahl $p \geqq 0$ gibt, so daß $\mathfrak{S}(U)$ und $\mathfrak{A}^p(U) := \bigoplus\limits_1^p \mathfrak{A}(U)$ $\mathfrak{A}$-isomorph sind.*

Beweis: Es ist klar, daß die angegebene Bedingung die Freiheit von $\mathfrak{S}$ nach sich zieht. Sei umgekehrt $\mathfrak{S}$ frei in x_0, sei $s_{x_0}^{(1)}, \ldots, s_{x_0}^{(p)}$ eine Basis von $\mathfrak{S}_{x_0}$

[18]) Statt $\mathfrak{A}$-Garbe sagt man auch „morphe Garbe".

über $\mathfrak{A}_{x_0}$. Es gibt dann über einer Umgebung U' von x_0 Schnittflächen $s^{(1)}, \ldots, s^{(p)}$ in $\mathfrak{S}$ mit $s^{(\pi)}(x_0) = s^{(\pi)}_{x_0}$, $\pi = 1, \ldots, p$[19]). Da $\mathfrak{S}$ kohärent ist, kann U' insbesondere so klein gewählt werden, daß $s^{(1)}, \ldots, s^{(p)}$ ganz $\mathfrak{S}(U')$ erzeugen. Der von den $s^{(1)}, \ldots, s^{(p)}$ erzeugte $\mathfrak{A}$-Homomorphismus $\sigma : \mathfrak{A}^p(U') \to \mathfrak{S}(U')$ ist somit surjektiv. Da $\mathfrak{A}$ kohärent ist, ist auch die Garbe *Kern* σ über U' kohärent. Da $(\mathit{Kern}\ \sigma)_{x_0} = 0$, so folgt aus der Kohärenz, daß es eine Umgebung $U \subset U'$ von x_0 mit $(\mathit{Kern}\ \sigma)(U) = 0$ gibt. Daraus folgt aber $\mathfrak{S}(U) \approx \mathfrak{A}^p(U)/\mathit{Kern}\ \sigma(U) \approx \mathfrak{A}^p(U)$, q.e.d.

Die Gesamtheit der Punkte $x_0 \in X$, in denen $\mathfrak{S}$ frei ist, bildet insbesondere eine offene Menge in X. Die Zahl p heißt der *Rang* von $\mathfrak{S}$ in x_0, p ist eindeutig bestimmt und lokal konstant.

Es seien $(X, \mathfrak{A})$, $(Y, \mathfrak{B})$ geringte Räume und $\tau : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist für jede Garbe $\mathfrak{T}$ (von abelschen Gruppen) über Y die topologische Urbildgarbe $\mathfrak{T}^t$ über X wohldefiniert. Ist τ morph, so existiert zu jeder $\mathfrak{B}$-Garbe $\mathfrak{T}$ über Y sogar eine $\mathfrak{A}$-Urbildgarbe $\tau^*(\mathfrak{T})$. In [19] sind die wichtigsten Eigenschaften der $\mathfrak{A}$-Urbildgarben von $\mathfrak{B}$-Garben zusammengestellt; es zeigte sich insbesondere, daß die Kohärenz von $\mathfrak{T}$ die Kohärenz von $\tau^*(\mathfrak{T})$ zur Folge hat, wenn $\mathfrak{A}$ kohärent ist.

Falls $\tau : X \to Y$ morph ist, kann man auch jeder $\mathfrak{A}$-Garbe $\mathfrak{S}$ über X eine Folge $\tau_q(\mathfrak{S})$ von $\mathfrak{B}$-Garben über Y zuordnen, die man die Bilder von $\mathfrak{S}$ bezüglich τ nennt $q = 0, 1, \ldots$. Die Garbe $\tau_q(\mathfrak{S})$ wird dabei durch das $\mathfrak{B}$-Garbendatum $\{H^q(\overset{-1}{\tau}(U), \mathfrak{S})\}$, wo U alle nichtleeren offenen Mengen von Y durchläuft, definiert. Im Falle $q = 0$ zeigt sich, daß dieses Datum das kanonische Datum von $\tau_0(\mathfrak{S})$ ist; die Gruppen $H^0(X, \mathfrak{S})$ und $H^0(Y, \tau_0(\mathfrak{S}))$ sind also kanonisch operatorisomorph[20]) (vgl. [19], Satz 3). Eine wichtige Eigenschaft der Bildgarben sei hier ohne Beweis notiert (vgl. [19], § 2, m)):

e) *Ist* $0 \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0$ *eine exakte* $\mathfrak{A}$*-Sequenz von* $\mathfrak{A}$*-Garben über einem geringten Raum* $(X, \mathfrak{A})$, *und ist* $\tau : X \to Y$ *eine morphe Abbildung von* $(X, \mathfrak{A})$ *in einen geringten Raum* $(Y, \mathfrak{B})$, *so gibt es eine natürliche exakte* $\mathfrak{B}$*-Sequenz*

$$0 \to \tau_0(\mathfrak{S}') \to \tau_0(\mathfrak{S}) \to \tau_0(\mathfrak{S}'') \to \tau_1(\mathfrak{S}') \to \tau_1(\mathfrak{S}) \to \tau_1(\mathfrak{S}'') \to \tau_2(\mathfrak{S}') \to \cdots$$

der Bildgarben.

4. Wir führen in diesem Abschnitt den Begriff des $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündels über einem geringten Raum $(X, \mathfrak{A})$ ein[21]). Mit $GL(q, C)$ sei wie üblich die Gruppe der linearen Automorphismen des q-dimensionalen komplexen Zahlenvektorraumes C^q bezeichnet; $GL(1, C)$ ist in natürlicher Weise zur multiplikativen Gruppe C^* der von Null verschiedenen komplexen Zahlen isomorph.

Es sei nun $(X, \mathfrak{A})$ ein geringter Raum. Ist U irgendeine offene Menge von X, so betrachten wir alle stetigen Abbildungen $x \to g(x)$, $x \in U$, von U in $GL(q, C)$, bei denen $g(x)$ und $g(x)^{-1}$ morphe Matrizen sind[22]). Die Menge aller dieser

[19]) Mit $s^{(\pi)}(x_0)$ werde hier der Wert der Schnittfläche $s^{(\pi)}$ in x_0, also ein Element aus $\mathfrak{S}_{x_0}$, bezeichnet.

[20]) Man beachte, daß $H^0(X, \mathfrak{S})$ ein $H^0(X, \mathfrak{A})$-Modul und $H^0(Y, \tau_0(\mathfrak{S}))$ ein $H^0(Y, \mathfrak{B})$-Modul ist.

[21]) Wir schließen uns weitgehend an die Begriffsbildungen in [20] an.

[22]) Eine Matrix $a(x) = (a_{ik}(x))$ werde morph genannt, wenn alle ihre Elemente $a_{ik}(x)$ morphe Funktionen sind.

Abbildungen bildet eine (für $q > 1$ nichtabelsche) Gruppe; es gibt eine wohlbestimmte Garbe $GL_{\mathfrak{A}}(q, C)$ über X, so daß $H^0(U, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$ genau diese Gruppe ist.

Wir definieren nun:

Definition 26 ((X, C^q)-Karte, $\mathfrak{A}$-verträgliche (X, C^q)-Karten): Eine (X, C^q)-Karte auf einem topologischen Raum W ist ein Tripel ($U, \varphi, V \times C^q$), wo U eine offene Menge in W, V eine offene Menge in X und $\varphi: U \to V \times C^q$ eine topologische Abbildung von U auf $V \times C^q$ ist.

Zwei (X, C^q)-Karten ($U_i, \varphi_i, V_i \times C^q$), $i = 1, 2$, auf W heißen $\mathfrak{A}$-verträglich, wenn $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(U_1 \cap U_2) = (V_1 \cap V_2) \times C^q$ und wenn es ein Element $g_{12} \in H^0(V_1 \cap V_2, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$ gibt, so daß gilt:

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(v \times z) = v \times (g_{12}(v)(z)), \quad v \in V_1 \cap V_2, \ z \in C^q.$$

$\mathfrak{A}$-verträgliche Karten fassen wir zu ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlanten zusammen.

Definition 27 (($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas): Eine Kollektion $\{(U_i, \varphi_i, V_i \times C^q), i \in I\}$ von (X, C^q)-Karten auf einem topologischen Raum W heißt ein ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas auf W, wenn $W = \bigcup_{i \in I} U_i$, $X = \bigcup_{i \in I} V_i$, und zwei beliebige Karten aus der Kollektion stets $\mathfrak{A}$-verträglich sind.

Zu jedem ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas $\{(U_i, \varphi_i, V_i \times C^q), i \in I\}$ auf X gehört offensichtlich ein eindeutig bestimmter Cozyklus $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathfrak{V}, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$ aus der Menge der $\mathfrak{V}$-Cozyklen mit Koeffizienten in $GL_{\mathfrak{A}}(q, C)$, wenn $\mathfrak{V}$ die Überdeckung $\{V_i, i \in I\}$ von X bezeichnet. Man kann umgekehrt zeigen:

f) *Ist $\mathfrak{V} = \{V_i, i \in I\}$ eine offene Überdeckung von X und $\{g_{ij}\} \in Z^1(\mathfrak{V}, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$ irgendein $\mathfrak{V}$-Cozyklus, so gibt es einen topologischen Raum W und einen ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas auf W, zu dem dieser $\mathfrak{V}$-Cozyklus gehört.*

Ist auf W ein ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas gegeben, so gibt es eine natürliche stetige Abbildung $\pi: W \to X$ auf X, derart, daß jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung V besitzt, so daß $\overset{-1}{\pi}(V)$ homöomorph dem Produktraum $V \times C^q$ ist. Man definiert π vermöge der (X, C^q)-Karten des gegebenen ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas; die $\mathfrak{A}$-Verträglichkeit dieser Karten hat zur Konsequenz, daß die Definition von π unabhängig von der Wahl der Karten ist. Wir nennen π die Projektion von W auf X.

Definition 28 (($\mathfrak{A}, C^q$)-Struktur): Ein ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas heißt eine ($\mathfrak{A}, C^q$)-Struktur auf W, wenn der gegebene Atlas vollständig ist, d. h. wenn jede (X, C^q)-Karte auf W, die mit allen (X, C^q)-Karten des ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas $\mathfrak{A}$-verträglich ist, zum ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas gehört.

Offensichtlich kann jeder ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlas auf W in natürlicher Weise zu einer ($\mathfrak{A}, C^q$)-Struktur auf W vervollständigt werden. Zwei ($\mathfrak{A}, C^q$)-Atlanten auf W definieren genau dann dieselbe ($\mathfrak{A}, C^q$)-Struktur auf W, wenn die zu ihnen gehörenden Cozyklen dasselbe Element aus der 1. Cohomologiemenge $H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$ repräsentieren; zu jeder ($\mathfrak{A}, C^q$)-Struktur auf W gehört daher ein eindeutig bestimmtes Element $\xi \in H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$. Wir definieren nun:

Definition 29 (q-rangiges $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel): Ein topologischer Raum W, der mit einer $(\mathfrak{A}, C^q)$*-Struktur versehen ist, heißt ein q-rangiges $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel über X (genauer: über* $(X, \mathfrak{A})$*).*

Ein 1-rangiges $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel über X heißt auch ein $\mathfrak{A}$-*Geradenbündel* über X.

Nach dem Vorstehenden wird offensichtlich jedes q-rangige $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel über X durch ein wohlbestimmtes Element $\xi \in H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$ repräsentiert. Wir nennen zwei q-rangige $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel W und W' über X $\mathfrak{A}$-äquivalent, wenn sie durch dasselbe Element $\xi \in H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$ gegeben werden. Man zeigt leicht:

g) *Zwei q-rangige $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel W, W' über* $(X, \mathfrak{A})$ *mit den* $(\mathfrak{A}, C^q)$*-Strukturen* $\{(U_i, \varphi_i, V_i \times C^q), i \in I\}$, $\{(U'_j, \varphi'_j, V'_j \times C^q), j \in I'\}$ *sind genau dann $\mathfrak{A}$-äquivalent, wenn es eine topologische Abbildung* $\tau: W \to W'$ *von W auf W' gibt, die die* $(\mathfrak{A}, C^q)$*-Struktur von W auf die* $(\mathfrak{A}, C^q)$*-Struktur von W' abbildet:*

$$\{(\tau(U_i), \varphi_i \circ \tau^{-1}, V_i \times C^q), i \in I\} = \{(U'_j, \varphi'_j, V'_j \times C^q), j \in I'\}.$$

Da nach f) zu jedem $\xi \in H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$ ein q-rangiges $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel über $(X, \mathfrak{A})$ gehört, so gilt also:

h) *Die $\mathfrak{A}$-Äquivalenzklassen der q-rangigen $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel über* $(X, \mathfrak{A})$ *entsprechen in kanonischer Weise eineindeutig den Elementen der Cohomologiemenge* $H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$. *Das triviale Bündel* $X \times C^q$ *entspricht dem neutralen Element von* $H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(q, C))$.

Sind W bzw. W' zwei $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel über X vom Rang q bzw. q', so ist ihre Whitneysche Summe $W \oplus W'$ und ihr Tensorprodukt $W \otimes W'$ in natürlicher Weise definiert. Beide Bündel sind wieder $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel; $W \oplus W'$ ist $(q + q')$-rangig, $W \otimes W'$ ist vom Rang qq'.

Insbesondere ist also das Tensorprodukt zweier $\mathfrak{A}$-Geradenbündel F, F' über $(X, \mathfrak{A})$ wieder ein $\mathfrak{A}$-Geradenbündel $F \otimes F'$ über X. Werden F, F' bezüglich einer geeigneten Überdeckung $\mathfrak{B} = \{V_i, i \in I\}$ von X durch Cozyklen $\{g_{ij}\}, \{g'_{ij}\}$ gegeben (hier sind alle g_{ij}, g'_{ij} nirgends verschwindende morphe Funktionen in $V_i \cap V_j$, für die auch $\overset{-1}{g_{ij}}$ bzw. $\overset{-1}{g'_{ij}}$ jeweils morph in $V_i \cap V_j$ ist), so wird $F \otimes F'$ durch den $\mathfrak{B}$-Cozyklus $\{g_{ij} \cdot g'_{ij}\}$ definiert. Da $GL_{\mathfrak{A}}(1, C)$ eine Garbe von abelschen Gruppen ist, so ist $H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(1, C))$ ebenfalls eine abelsche Gruppe; daher gilt:

i) *Die Menge der $\mathfrak{A}$-Äquivalenzklassen von $\mathfrak{A}$-Geradenbündeln über* $(X, \mathfrak{A})$ *bildet bezüglich des Tensorprodukts $\otimes$ eine abelsche Gruppe, die in natürlicher Weise zur Cohomologiegruppe* $H^1(X, GL_{\mathfrak{A}}(1, C))$ *isomorph ist.*

Ist W ein q-rangiges $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel über $(X, \mathfrak{A})$ mit der Projektion $\pi: W \to X$, so heißt eine stetige Abbildung σ einer offenen Menge $V \subset X$ in W eine *Schnittfläche* über V in W, wenn $\pi \circ \sigma$ die Identität ist. *Eine Schnittfläche σ über V in W heißt morph*, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in V$ eine (X, C^q)-Karte $(U', \varphi', V' \times C^q)$ aus dem $(\mathfrak{A}, C^q)$-Strukturatlas von W mit $x_0 \in V' \subset V$ gibt, so daß die Abbildung

$$V' \xrightarrow{\varphi' \circ \sigma} V' \times C^q \to C^q$$

durch q in V' morphe Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ beschrieben werden kann.

Die Gesamtheit der Keime der morphen Schnittflächen in W bildet eine $\mathfrak{A}$-Garbe $\mathfrak{W}$ über X. Ist $\mathfrak{A}$ kohärent, so ist $\mathfrak{W}$ offensichtlich frei vom Range q, denn jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U, so daß $\mathfrak{W}(U)$ zur Garbe $\mathfrak{A}^q(U)$ $\mathfrak{A}$-isomorph ist. Man zeigt nun sofort, daß auch umgekehrt zu jeder über X freien kohärenten $\mathfrak{A}$-Garbe $\mathfrak{W}$ vom Rang q ein q-rangiges $\mathfrak{A}$-Vektorraumbündel W über $(X, \mathfrak{A})$ gehört, so daß $\mathfrak{W}$ $\mathfrak{A}$-isomorph zur Garbe der Keime der morphen Schnittflächen in W ist.

§ 6. Der Begriff des komplexen β-Raumes

1. Jeder Bereich B des C^n ist, versehen mit der Garbe $\mathcal{O}(B)$ der in B holomorphen Funktionskeime, ein geringter Raum. Die analytischen Mengen M in B können nach § 5.2 in natürlicher Weise mit einer Strukturgarbe $\mathcal{O}(M)$ versehen und somit als geringte Unterräume $(M, \mathcal{O}(M))$ von $(B, \mathcal{O}(B))$ aufgefaßt werden; dies soll im folgenden stets geschehen. Man definiert nun:

Definition 30 (β-Raum): Ein geringter Hausdorffscher Raum $(R, \mathcal{O}(R))$ heißt ein komplexer β-Raum (kurz: β-Raum), wenn jeder Punkt $r \in R$ eine Umgebung U besitzt, so daß $(U, \mathcal{O}(U))$ bimorph auf eine analytische Menge $(M, \mathcal{O}(M))$ eines Bereiches eines komplexen Zahlenraumes abbildbar ist.

Die Strukturgarbe $\mathcal{O}(R)$ heißt eine β-Struktur auf R.

Komplexe Mannigfaltigkeiten, versehen mit der Garbe der holomorphen Funktionskeime, sind die einfachsten Beispiele von β-Räumen. Weitere Beispiele sind die analytischen Mengen in einer komplexen Mannigfaltigkeit.

Auf einer lokal irreduziblen analytischen Menge M in einem Polyzylinder $Z := \{|z_1| < a_1, \ldots, |z_n| < a_n\}$, die über $Z^d := \{|z_1| < a_1, \ldots, |z_d| < a_d\}$ ausgebreitet liegt, ist somit neben der in § 4 definierten α-Struktur noch eine β-Struktur definiert. Wir bezeichnen die entsprechenden Strukturgarben mit $\mathcal{O}^{(\alpha)}(M)$ und $\mathcal{O}^{(\beta)}(M)$. Es gilt stets $\mathcal{O}^{(\beta)}(M) \subset \mathcal{O}^{(\alpha)}(M)$; im allgemeinen gilt: $\mathcal{O}^{(\beta)}(M) \neq \mathcal{O}^{(\alpha)}(M)$. Als einfaches Beispiel hierzu betrachten wir im C^2 die durch die Gleichung $z_2^{p_1} - z_1^{p_2} = 0$, $p_1 > 1$, $p_2 > 1$, $(p_2, p_1) = 1$, definierte lokal irreduzible analytische Menge M, die über $C^1(z_1)$ liegt. Der α-Raum $(M, \mathcal{O}^{(\alpha)})$ wird durch die Gleichungen $z_1 = t^{p_1}$, $z_2 = t^{p_2}$ biholomorph auf die komplexe t-Ebene abgebildet. Es gilt: $\mathcal{O}_z^{(\beta)} = \mathcal{O}_z^{(\alpha)}$ für alle $z \neq 0$; dagegen ist $\mathcal{O}_0^{(\beta)}$ echt in $\mathcal{O}_0^{(\alpha)}$ enthalten. Faßt man die Ringe $\mathcal{O}_0^{(\beta)}$ bzw. $\mathcal{O}_0^{(\alpha)}$ als Vektorräume über C auf, so ist leicht zu zeigen, daß der Quotientenvektorraum $\mathcal{O}_0^{(\alpha)}/\mathcal{O}_0^{(\beta)}$ die Dimension $\frac{(p_1-1)(p_2-1)}{2}$ hat[23]).

Wir bezeichnen mit $(R, \mathcal{O}(R))$ im folgenden stets einen β-Raum; statt $(R, \mathcal{O}(R))$ schreiben wir auch kurz wieder R. In β-Räumen sagt man statt morph üblicherweise holomorph, statt romorph meromorph und statt $\mathcal{O}$-Menge analytische Menge. Man beweist unmittelbar, daß jede analytische Menge A in R, versehen mit der induzierten Garbe $\mathcal{O}(A)$, wieder ein β-Raum (genauer: ein β-Unterraum von R) ist. Weiter gilt:

a) *Eine Abbildung $\varphi: R \to C^n$ ist genau dann holomorph, wenn die n Koordinatenfunktionen $z_\nu \circ \varphi$, $\nu = 1, \ldots, n$, holomorph in R sind.*

---

[23]) Eine allgemeine Aussage über die Dimension solcher Quotientenvektorräume für β-Strukturen auf „ebenen Kurven" findet sich in [13].

Wir nennen eine β-Struktur $\mathcal{O}'(R)$ auf R eine *Verfeinerung* einer β-Struktur $\mathcal{O}(R)$, wenn jeder Halm $\mathcal{O}'_r$ ein Oberring von $\mathcal{O}_r$ ist, $r \in R$. Eine β-Struktur heißt *maximal*, wenn sie keine echte Verfeinerung gestattet.

Ist $\mathcal{O}'(R)$ eine Verfeinerung von $\mathcal{O}(R)$, so ist die Identität $i: (R, \mathcal{O}') \to (R, \mathcal{O})$ eine holomorphe Abbildung. Ein bekannter Satz über die holomorphe Umkehrbarkeit von holomorphen Abbildungen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten sagt aus, daß die β-Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit maximal ist.

2. Ein Paar (U, ψ) heißt eine β-Karte auf R, wenn U eine offene Menge in R und ψ eine biholomorphe Abbildung von U auf eine in einem Bereich $B \subset C^n$ analytische Menge $\psi(U)$ ist. Laut Definition gestattet R Überdeckungen $\{U_\iota\}$, so daß U_ι jeweils Träger einer β-Karte auf R ist. Man überlegt sofort:

b) *Ist $\{U_\iota\}$ eine offene Überdeckung eines Hausdorffschen Raumes R und ψ_ι eine topologische Abbildung von U_ι auf eine analytische Menge $\psi_\iota(U_\iota)$ eines Bereiches $B_\iota \subset C^{n_\iota}$, derart, daß alle Abbildungen*

$$\psi_{\iota_1} \circ \psi_{\iota_2}^{-1} : \psi_{\iota_2}(U_{\iota_2} \cap U_{\iota_1}) \to \psi_{\iota_1}(U_{\iota_2} \cap U_{\iota_1})$$

biholomorph sind, so gibt es genau eine β-Struktur $\mathcal{O}(R)$ auf R, so daß die Paare (U_ι, ψ_ι) β-Karten sind.

Das topologische Produkt von β-Räumen kann in natürlicher Weise als ein β-Raum aufgefaßt werden. Es gilt nämlich (vgl. [31]):

c) *Sind R_1, R_2 zwei β-Räume, so gibt es auf dem Produktraum $R_1 \times R_2$ genau eine β-Struktur mit folgenden Eigenschaften: Sind (U_i, ψ_i) β-Karten auf R_i, $i = 1, 2$, so ist $(U_1 \times U_2, \psi_1 \times \psi_2)$ eine β-Karte auf $R_1 \times R_2$.*

Es ist klar, daß es höchstens eine solche β-Struktur auf $R_1 \times R_2$ gibt. Die Existenz selbst ergibt sich sofort aus b), da aus a) unmittelbar folgt: *Sind M_i, M'_i, $i = 1, 2$, analytische Mengen in Bereichen von Zahlenräumen und $\varphi_i : M_i \to M'_i$, $i = 1, 2$, Abbildungen, so ist $\varphi_1 \times \varphi_2 : M_1 \times M_2 \to M'_1 \times M'_2$ genau dann holomorph, wenn φ_1 und φ_2 holomorph sind.*

Ein β-Raum R ist lokal nicht notwendig reindimensional. Aus dem Korollar zu Satz 3 und Satz 4 ergibt sich aber sofort:

d) *Ist R in einer Umgebung eines Punktes $r \in R$ rein d-dimensional, so gibt es eine β-Karte (U, ψ), $r \in U$, auf R, so daß $\psi(U)$ eine analytische Menge in einem Polyzylinder $Z := \{|z_1| < a_1, \ldots, |z_n| < a_n\}$ eines C^n, $n \geq d$ ist, die über $Z^d := \{|z_1| < a_1, \ldots, |z_d| < a_d\}$ ausgebreitet liegt.*

Eine in R analytische Menge A heißt *niederdimensional*, wenn für alle Punkte $r \in A$ gilt: $d_r(A) < d_r(R)$. Ist A niederdimensional, so liegt A nirgends dicht in R, kann R jedoch zerlegen.

3. Wir nehmen eine erste (grobe) Klassifizierung der Punkte eines β-Raumes R vor.

Definition 31 (Gewöhnlicher Punkt): Ein Punkt $r \in R$ heißt ein gewöhnlicher Punkt von R, wenn es eine Umgebung U von r gibt, so daß $(U, \mathcal{O}(U))$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.

Wir zeigen zunächst, daß diese Definition des gewöhnlichen Punktes für analytische Mengen $(M, \mathcal{O}(M))$ mit der früher auf *p.* 256 gegebenen Definition übereinstimmt.

e) *Ist M eine analytische Menge in $B \subset C^n(z)$, so ist ein Punkt $z' \in M$ genau dann ein gewöhnlicher Punkt von M im Sinn der Definition auf p. 256, wenn $(M, \mathcal{O}(M))$ in der Umgebung von z' eine komplexe Mannigfaltigkeit ist.*

Beweis: Sei z' ein gewöhnlicher Punkt von M im Sinn der früheren Definition; es gelte $d_{z'}(M) = m < n$. Dann läßt sich M bei geeigneter Numerierung der $z_1, \ldots, z_n$ in der Umgebung von $z' \in C^n$ durch Gleichungen

$$(*) \qquad z_{m+1} - f_{m+1}(z_1, \ldots, z_m) = 0, \ldots, z_n - f_n(z_1, \ldots, z_m) = 0$$

mit holomorphen Funktionen f_μ darstellen, $\mu = m + 1, \ldots, n$. Die Projektion $z \to (z_1, \ldots, z_m)$ ist, wie ohne weiteres ersichtlich, eine biholomorphe Abbildung einer Umgebung von $z' \in M$ auf eine offene Menge des $C^m(z_1, \ldots, z_m)$.

Sei umgekehrt M in der Umgebung von $z' \in M$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Umgebung W von $z' \in M$ und eine biholomorphe Abbildung φ von W auf eine offene Menge Z eines $C^m(u_1, \ldots, u_m)$. Die Funktion $u_\mu \circ \varphi$ ist in $z' \in M$ holomorph und somit in der Nähe von z' die Beschränkung einer in einer n-dimensionalen Umgebung von $z' \in C^n$ holomorphen Funktion $h_\mu(z_1, \ldots, z_n)$ auf M, $\mu = 1, \ldots, m$. Wird nun $\varphi^{-1}: Z \to W$ durch die n in Z holomorphen Funktionen

$$z_1 = g_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, z_n = g_n(u_1, \ldots, u_m)$$

beschrieben, so ergibt sich für $u_\mu = (u_\mu \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ in der Umgebung von $\varphi(z')$ die Darstellung

$$u_\mu = h_\mu(g_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, g_n(u_1, \ldots, u_m)), \quad \mu = 1, \ldots, m.$$

Aus den Gleichungen

$$\delta_{\mu j} = \frac{\partial h_\mu}{\partial z_\nu} \cdot \frac{\partial g_\nu}{\partial u_j}, \quad \mu, j = 1, \ldots, m,$$

folgt dann, daß die Funktionalmatrix der Abbildung φ^{-1} im Punkt $\tau(z')$ den Rang m hat. Daher kann man bei geeigneter Numerierung der $z_1, \ldots, z_n$ das Funktionensystem $z_1 = g_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, z_m = g_m(u_1, \ldots, u_m)$ in der Umgebung von $\varphi(z')$ holomorph umkehren. Daraus ergibt sich, daß M in der Umgebung von z' durch Gleichungen der Form $(*)$ darstellbar ist, w.z.b.w.

Man zeigt leicht, daß der Begriff des gewöhnlichen Punktes eines β-Raumes biholomorph invariant ist, genauer: *Sind R, S zwei β-Räume und ist $\tau: R \to S$ eine biholomorphe Abbildung von R auf S, so ist $r \in R$ genau dann ein gewöhnlicher Punkt von R, wenn $\tau(r) \in S$ ein gewöhnlicher Punkt von S ist.*

Wir bezeichnen im folgenden stets mit N die Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von R. Dann gilt:

Satz 16: Die Menge N ist eine niederdimensionale analytische Menge in R. Der β-Raum $R - N$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Beweis: Sicher ist N abgeschlossen in R. Wählt man zu jedem Punkt $r \in N$ eine β-Karte (U, ψ), $r \in U$, auf R, so ist $\psi(N \cap U)$ genau die Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von $\psi(U)$. Daher folgt die Behauptung des Satzes aus § 6. e) und § 1. l).

4. Ist r ein beliebiger Punkt eines β-Raumes R, so „erzeugt" R in r endlich viele ausgezeichnete Mengenkeime. Ist nämlich (U, ψ), $r \in R$, eine β-Karte auf R, so erzeugt $\psi(U)$ in $\psi(r)$ endlich viele analytische Primkeime, denen Mengenkeime in $r \in R$ entsprechen. Man überzeugt sich leicht, daß diese Mengenkeime unabhängig von der Wahl der β-Karte (U, ψ) definiert sind. Wir nennen sie die Primkeime von R in r; ihre Anzahl heiße die *Keimzahl* von R in r und werde mit $k(r)$ bezeichnet.

Die Menge aller Primkeime von R gibt, analog wie bei analytischen Mengen, wieder Anlaß zur sog. Normalisierung von R. Wir führen diesen für die allgemeine Theorie der β-Räume grundlegenden Begriff axiomatisch ein.

Definition 32 (Normalisierung eines β-Raumes): Es sei R ein β-Raum, N sei die Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von R. Ein Paar (R^*, ϱ) heißt eine Normalisierung von R, wenn folgendes gilt:

0) *R^* ist ein lokal kompakter, lokal zusammenhängender Raum, $\varrho : R^* \to R$ ist eine stetige nirgends entartete eigentliche Abbildung von R^* auf R.*

1) *$\overset{-1}{\varrho}(N)$ zerlegt R^* nirgends; $\varrho : R^* - \overset{-1}{\varrho}(N) \to R - N$ ist topologisch.*

Wir zeigen sogleich:

Satz 17: Zu jedem β-Raum R existiert eine Normalisierung (R^*, ϱ). Ist $('R^*, '\varrho)$ eine weitere Normalisierung von R, so gibt es eine topologische Abbildung τ von $'R^*$ auf R^* mit $'\varrho = \varrho \circ \tau$.

Beweis: Um die Existenz einer Normalisierung (R^*, ϱ) einzusehen, bezeichnen wir mit R^* die Menge aller Primkeime p_r, $r \in R$. Es gibt eine natürliche Projektion $\varrho : R^* \to R$. Eine Topologie werde in R^* wie folgt eingeführt: Es sei U irgendeine analytische Menge in einer offenen Menge von R; jeder Primkeim p_r^*, den U in irgendeinem Punkt $r \in U$ erzeugt, sei ein Primkeim von R in r. Dann heiße die Menge aller dieser Primkeime $\{p_r^*, r \in U\}$ offen in R^*. Dadurch wird in R^* eine Topologie erzeugt, offensichtlich ist ϱ stetig und nirgends entartet. Da R^* lokal jeweils dem Träger M^* der Normalisierung einer analytischen Menge M in einem Bereich $B \subset C^n$ homöomorph ist, folgt leicht aus § 1 f), daß R^* lokal kompakt und lokal zusammenhängend und ϱ eigentlich ist. Aus Satz 7 ergibt sich weiter, daß $\overset{-1}{\varrho}(N)$ den Raum R^* nirgends zerlegt und $\varrho : R^* - \overset{-1}{\varrho}(N) \to R - N$ topologisch ist.

Die (bis auf Äquivalenz) behauptete Eindeutigkeit von (R^*, ϱ) ergibt sich analog wie im Beweis von Satz 7 aus Satz 2.

Im folgenden bezeichnen wir mit (R^*, ϱ) stets die im Vorstehenden konstruierte Normalisierung von R; wir nennen sie die Normalisierung von R. Es ergibt sich sofort aus § 1 f) und aus der Anmerkung zu Satz 7:

R^* ist lokal wegzusammenhängend, die Menge $\overset{-1}{\varrho}(r)$, $r \in R$, besteht aus genau $k(r)$ Punkten. Ist A eine niederdimensionale analytische Menge in R, so zerlegt $\overset{-1}{\varrho}(A)$ den Raum R^* nirgends.

Der Raum R^* zerfällt insbesondere in natürlicher Weise in zusammenhängende Komponenten $R_\varkappa^*$, $\varkappa \in K$. Wir setzen $R_\varkappa = \varrho(R_\varkappa^*)$ und nennen die Mengen $R_\varkappa$, $\varkappa \in K$, die irreduziblen Komponenten von R. Es gilt:

Satz 18: Jede irreduzible Komponente $R_\varkappa$, $\varkappa \in K$, von R ist ein reindimensionaler β-Unterraum von R. $R_\varkappa - N$ ist eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit. Die Familie $\{R_\varkappa\}$, $\varkappa \in K$, ist eine lokal endliche, abgeschlossene Überdeckung von R.

Der Beweis sei dem Leser überlassen [vgl. auch § 1. h)].

Wir nennen einen β-Raum R *irreduzibel*, wenn jede irreduzible Komponente von R mit R übereinstimmt.

In [27] wurde der folgende Abbildungssatz bewiesen:

Abbildungssatz: Ist $\tau : R_1 \to R_2$ eine eigentliche holomorphe Abbildung eines β-Raumes R_1 in einen β-Raum R_2, so ist $\tau(R_1)$ eine analytische Menge in R_2.

Wir werden diesen Satz im folgenden benutzen für den Fall, daß τ topologisch und holomorph ist.

Ein Spezialfall eines in [27] bewiesenen Satzes sagt aus:

Ist $w = f(r)$ eine holomorphe Funktion auf einen β-Raum R, die in einer Umgebung eines Punktes $r_0 \in R$ nicht konstant ist, so bildet f jede Nachbarschaft von r_0 auf eine Nachbarschaft von $f(r_0) \in C^1(w)$ ab.

In dieser Aussage ist insbesondere das „*Maximumprinzip*" für holomorphe Funktionen auf β-Räumen enthalten.

§ 7. Komplexe β_i-Räume und β_n-Räume

1. Wichtige punktale und lokale Eigenschaften eines β-Raumes R können aus der algebraischen Struktur der Halme $\mathcal{O}_r$ der Strukturgarbe $\mathcal{O}(R)$ abgelesen werden. Wir notieren zunächst:

a) *Jeder Halm $\mathcal{O}_r$, $r \in R$, ist ein Stellenring, d. h. ein noetherscher Ring mit genau einem maximalen Ideal*[24]).

Es ist nur zu zeigen, daß $\mathcal{O}_r$ noethersch ist. Das aber ist trivial, da $\mathcal{O}_r$ homomorphes Bild eines Potenzreihenringes ist.

Wir definieren nun:

Definition 33 (Irreduzibler Punkt, β_i-Raum): Ein Punkt r eines β-Raumes R heißt ein irreduzibler Punkt von R, wenn $\mathcal{O}_r$ ein Integritätsring ist. R heißt ein β_i-Raum, wenn alle Punkte von R irreduzibel sind.

Es gilt:

Satz 19: Der Punkt $r \in R$ ist genau dann irreduzibel, wenn $k(r) = 1$. R ist genau dann ein β_i-Raum, wenn $\varrho : R^* \to R$ topologisch ist.

Beweis: Es sei (U, ψ), $r \in U$, eine β-Karte auf R. Dann ist $\mathcal{O}_r$ in kanonischer Weise zum Ring $\mathcal{O}_{\psi(r)} / \mathfrak{J}_{\psi(r)}$ isomorph, wobei $\mathfrak{J}_{\psi(r)}$ dasjenige Ideal in $\mathcal{O}_{\psi(r)}$ bezeichnet, das durch den von $\psi(U)$ in $\psi(r)$ erzeugten analytischen Mengenkeim definiert wird. Nun ist $\mathcal{O}_{\psi(r)} / \mathfrak{J}_{\psi(r)}$ genau dann nullteilerfrei, wenn $\mathfrak{J}_{\psi(r)}$ ein Primideal ist. Das ist aber nach § 1. e) genau dann der Fall, wenn $\psi(U)$ in $\psi(r)$ irreduzibel ist, d. h. wenn gilt $k(r) = 1$. Die zweite Aussage von Satz 19 ist trivial.

---

[24]) Statt „Stellenring" sagt man auch „lokaler Ring". $\mathcal{O}_x$ ist im übrigen auch eine lokale C-Algebra.

Anmerkung: Eine analytische Menge $(M, \mathcal{O}(M))$ *in einem Bereich* $B \subset C^n$ *ist genau dann ein* β_i*-Raum, wenn sie lokal irreduzibel ist.*

Aus Satz 19 folgt sofort:

b) *Eine niederdimensionale analytische Menge zerlegt einen* β_i*-Raum nirgends.* R *ist genau dann ein* β_i*-Raum, wenn die Menge* N *der nicht gewöhnlichen Punkte* R *nirgends zerlegt.*

Man kann sofort eine Klasse von Hausdorffschen Räumen angeben, auf denen jede β-Struktur eine β_i-Struktur ist. Wir zeigen:

Satz 20: Ist R *eine topologische Mannigfaltigkeit, so ist jede* β*-Struktur* $\mathcal{O}(R)$ *auf* R *eine* β_i*-Struktur.*

Beweis: Wir dürfen R als zusammenhängend voraussetzen. Sei $2m$ die topologische Dimension von R. Dann ist die Menge N der nicht gewöhnlichen Punkte von $(R, \mathcal{O}(R))$ topologisch höchstens $(2m-2)$-dimensional. Aus einem bekannten Satz aus der Theorie der topologischen Mannigfaltigkeiten folgt daher (vgl. [23], p. 48), daß N den Raum R nirgends zerlegt. Mithin ist $(R, \mathcal{O}(R))$ nach b) ein β_i-Raum.

Weiter gilt:

Ist $\mathcal{O}(R)$ *eine* β_i*-Struktur über einem Hausdorffschen Raum* R*, so ist jede* β*-Struktur* $\mathcal{O}'(R)$*, die* $\mathcal{O}(R)$ *verfeinert, eine* β_i*-Struktur.*

Beweis: Wir zeigen, daß die Menge N' der nicht gewöhnlichen Punkte von $(R', \mathcal{O}')$ den Raum R nirgends zerlegt. Die Identität $i: (R, \mathcal{O}') \to (R, \mathcal{O})$ ist topologisch und holomorph. Daher ist $N' = i(N')$ eine niederdimensionale analytische Menge in $(R, \mathcal{O})$ nach dem Abbildungssatz. Dieselbe zerlegt aber den β_i-Raum $(R, \mathcal{O})$ nirgends.

2. Wir führen weiter den Begriff des normalen Punktes ein.

Definition 34 (Normaler Punkt, β_n*-Raum): Ein Punkt* r *eines* β*-Raumes* R *heißt ein normaler Punkt von* R*, wenn* $\mathcal{O}_r$ *ganz abgeschlossen ist.* R *heißt ein* β_n*-Raum, wenn alle Punkte von* R *normal sind.*

Offensichtlich ist jede komplexe Mannigfaltigkeit ein β_n-Raum (vgl. §3. Satz 14).

Wir beweisen zunächst:

Satz 21: Ein normaler Punkt eines β*-Raumes ist irreduzibel. Jeder* β_n*-Raum ist ein* β_i*-Raum.*

Beweis: Angenommen, es gäbe einen normalen Punkt r eines β-Raumes R mit $k(r) > 1$. Dann gibt es eine β-Karte (U, ψ), $r \in U$, auf R, so daß $\psi(U)$ eine in einem Gebiet B eines C^n analytische Menge ist, die in 2 nichtleere verschiedene analytische Mengen M_1, M_2 zerfällt, wobei $\psi(r) \in M_1 \cap M_2$. Es seien f_1 bzw. f_2 in B holomorphe Funktionen mit $f_1(M_1) = 0$, $f_2(M_2) = 0$, dagegen möge f_1 (bzw. f_2) auf keiner irreduziblen Komponente von M_2 (bzw. M_1) durch $\psi(r)$ identisch verschwinden; solche Funktionen existieren bei geeigneter Wahl von B (d. h. U) stets. Wir bezeichnen mit $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ die von f_1, f_2 in $\psi(r)$ auf $\psi(U)$ erzeugten holomorphen Funktionskeime, es gilt $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = 0$. $\bar{f}_1 + \bar{f}_2$ ist nicht Nullteiler in $\mathcal{O}_{\psi(r)}(\psi(U))$, denn die Funktion $f_1 + f_2$ verschwindet auf keiner irreduziblen Komponente von M durch $\psi(r)$ identisch. Daher gehört

$a := \frac{f_1}{f_1 + f_2}$ zum Quotientenring von $\mathcal{O}_{\psi(r)}(\psi(U))$. a ist ganz algebraisch über $\mathcal{O}_{\psi(r)}(\psi(U))$, da a offensichtlich das Polynom $w^2 - w$ annulliert. Daher folgt: $a \in \mathcal{O}_{\psi(r)}(\psi(U))$. Das ist aber unmöglich, da jeder holomorphe Repräsentant von a in der Nähe von $\psi(r)$ auf M_1 identisch verschwinden und auf M_2 identisch 1 sein müßte.

Wir geben nun eine notwendige und hinreichende analytische Bedingung dafür an, daß ein β-Raum ein β_n-Raum ist:

Satz 22: Ein β-Raum R ist genau dann ein β_n-Raum, wenn R vom Typ F ist.

Beweis: a) Sei zunächst R vom Typ F. Es sei $r \in R$ irgendein Punkt und a_r irgendein Element aus dem Quotientenring von $\mathcal{O}_r$, $a_r = \frac{f_r}{g_r}$, welches ganz algebraisch über $\mathcal{O}_r$ ist. Es gibt dann in einer Umgebung U von r holomorphe Funktionen f, g, die in r die Elemente f_r, g_r erzeugen. Es sei P die in U nirgends dichte Nullstellenmenge von g, in $U - P$ ist dann $\frac{f}{g}$ holomorph. Da a_r nach Voraussetzung ganz über $\mathcal{O}_r$ ist, gibt es, falls U hinreichend klein gewählt ist, ein Polynom $\omega(w; r) = w^m + \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu(r) w^{m-\mu}$ mit in U holomorphen Koeffizienten $a_\mu(r)$, so daß ω in $U - P$ von $\frac{f}{g}$ annulliert wird. Dann ist aber $\frac{f}{g}$ in der Nähe eines jeden Punktes von P beschränkt und also, da R nach Voraussetzung vom Typ F ist, in ganz U hinein zu einer holomorphen Funktion h fortsetzbar. Aus Stetigkeitsgründen gilt: $f = h \cdot g$ und mithin $f_r = h_r \cdot g_r$. Also gilt bezüglich der algebraischen Struktur des Quotientenringes die Identität $a_r = h_r$. Daraus folgt aber $a_r \in \mathcal{O}_r$, d. h. r ist ein normaler Punkt von R.

b) Sei nun R ein β_n-Raum. Es ist lediglich zu beweisen, daß der Riemannsche Fortsetzungssatz für holomorphe Funktionen, die in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(r)$ eines beliebigen Punktes $r \in R$ definiert sind, richtig ist. Es sei $U(r)$ so klein gewählt, daß $U(r)$ durch eine biholomorphe Abbildung τ auf eine analytische Menge M in einem Gebiet G eines Zahlenraums abgebildet werden kann; es sei $\mathcal{O}(M)$ die Strukturgarbe über M. Wegen Satz 21 ist M lokal irreduzibel. Wird $U(r)$ hinreichend klein gewählt, so ist M auch irreduzibel in G und daher rein dimensional; es gelte etwa $d(M) = d$. Man kann $U(r)$ sogar so wählen, daß $G = G^d \times G^{n-d}$ ein Produktgebiet des C^n ist und M über G^d ausgebreitet liegt. Nach Satz 9 ist dann $\mathfrak{M} = (M, \gamma, G^d)$, wo γ die Projektion $M \to G^d$ bezeichnet, eine analytische Überlagerung von G^d.

Wir müssen nun folgendes zeigen: Ist N eine mindestens 1-codimensionale analytische Menge in $(M, \mathcal{O})$ und f eine in $M - N$ holomorphe Funktion, die in einer Umgebung eines jeden Punktes von N beschränkt ist, so ist f zu einer in ganz M holomorphen Funktion $\check{f}$ fortsetzbar. Da N sicher auch eine analytische Menge in der analytischen Überlagerung $\mathfrak{M} = (M, \gamma, G^d)$ ist, folgt aus Satz 13, daß f eindeutig zu einer auf $\mathfrak{M}$ holomorphen Funktion $\check{f}$ fortsetzbar ist. Um nun zu zeigen, daß sogar gilt: $\check{f} \in H^0(M, \mathcal{O}(M))$, genügt es nachzuweisen, daß $\check{f}$ in jedem Punkt $z_0 \in M$ einen Keim $\check{f}_{z_0}$ erzeugt, der zum Quotientenkörper

von $\mathcal{O}_{z_0}(M)$ gehört und ganz algebraisch über $\mathcal{O}_{z_0}(M)$ ist. Das letztere ist klar, denn $\check{f}$ selbst annulliert nach Satz 12 ein Pseudopolynom $\omega(w;z) = w^b + \sum_{\beta=1}^{b} a_\beta(z)\, w^{b-\beta}$ mit in G^d holomorphen Koeffizienten $a_\beta(z)$, und jede Funktion $a_\beta(z)$ erzeugt in $z_0 \in M$ ein Element von $\mathcal{O}_{z_0}(M)$. Die Aussage, daß $\check{f}_{z_0}$ zum Quotientenkörper von $\mathcal{O}_{z_0}(M)$ gehört, ergibt sich sofort aus folgendem

Lemma (Osgood): Es sei M eine rein d-dimensionale analytische Menge in einem Produktgebiet $G = G^d \times G^{n-d}$, die über G^d ausgebreitet ist; es sei $\gamma : M \to G^d$ die natürliche Projektion und (M^*, μ) die Normalisierung von M. Ist dann f^* eine holomorphe Funktion in der analytischen Überlagerung $(M^*, \gamma \circ \mu, G^d)$, so gibt es zwei in G holomorphe Funktionen f_1, f_2, so daß $Q^* := \{z^* \in M^*, f_2 \circ \mu(z^*) = 0\}$ in M^* nirgends dicht ist und in $M^* - Q^*$ gilt: $f^* = \dfrac{f_1 \circ \mu}{f_2 \circ \mu}$.

Zum Beweis vgl. [25], p. 116.

Es sei noch angemerkt:

Satz 23: Eine topologische und holomorphe Abbildung $\tau : R_1 \to R_2$ eines β-Raumes R_1 auf einen β_n-Raum R_2 ist biholomorph.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $\tau^{-1} : R_2 \to R_1$ holomorph ist. Seien N_1 bzw. N_2 die Mengen der nicht gewöhnlichen Punkte von R_1 bzw. R_2. Dann ist $\tau(N_1)$ nach dem Abbildungssatz eine niederdimensionale analytische Menge in R_2, weiter ist $\overset{-1}{\tau}(N_2)$ eine niederdimensionale analytische Menge in R_1. Nun ist $\tau^{-1} : R_2 - (N_2 \cup \tau(N_1)) \to R_1 - (\overset{-1}{\tau}(N_2) \cup N_1)$ als Umkehrabbildung einer holomorphen Abbildung zweier komplexer Mannigfaltigkeiten holomorph. Da R_2 nach Satz 22 vom Typ F ist, ist somit nach Satz 15 die Abbildung τ^{-1} überall holomorph, w.z.b.w.

Es folgt jetzt unmittelbar, daß jede β_n-Struktur $\mathcal{O}$ auf einem Hausdorffschen Raum R maximal ist.

Neben dem bisher benutzten Riemannschen Fortsetzungssatz, der zur Charakterisierung der Räume vom Typ F diente, wird auch noch eine schwächere Formulierung des Fortsetzungssatzes gelegentlich benutzt: *Man sagt, daß in einem β-Raum R die schwache Aussage des Riemannschen Fortsetzungssatzes richtig ist, wenn folgendes gilt: Ist $U \subset R$ irgendeine offene Menge, so ist jede in U stetige Funktion, die außerhalb einer in U mindestens 1-codimensionalen analytischen Menge holomorph ist, überall in U holomorph.*

β-Räume mit dieser Eigenschaft sind nicht notwendig vom Typ F; man überlegt sich leicht, daß der nicht normale Raum $R := \{(z_1, z_2) \in C^2, z_1 z_2 = 0\}$ hierfür ein Beispiel liefert. Indessen gilt:

Ein β_i-Raum R ist genau dann normal, wenn in R die schwache Aussage des Riemannschen Fortsetzungssatzes richtig ist.

Es ist nur zu zeigen, daß aus der gegebenen Bedingung die Normalität von R folgt. Dazu zeigen wir, daß R vom Typ F ist. Sei $U \subset R$ offen und $N \subset U$ eine nirgends dichte analytische Menge in U; sei $f \mid U - N$ holomorph und in der Nähe eines jeden Punktes von N beschränkt. Dann ist f offenbar nach Satz 2 stetig und also holomorph in ganz U fortsetzbar, q.e.d.

3. In diesem Abschnitt beweisen wir zunächst:

Satz 24: Ist R ein beliebiger β-Raum und (R^*, ϱ) die Normalisierung von R, so gibt es auf R^* genau eine β_n-Struktur, so daß $\varrho: R^* \to R$ holomorph ist.

Beweis: Zunächst werde die Eindeutigkeit bewiesen. Es seien also $\mathcal{O}(R^*)$, $\mathcal{O}'(R^*)$ zwei solche β_n-Strukturen. Wir bezeichnen mit N die Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von R. $\overset{-1}{\varrho}(N)$ ist sowohl eine analytische Menge in $(R^*, \mathcal{O})$ als auch in $(R^*, \mathcal{O}')$. Da $R - N$ als komplexe Mannigfaltigkeit ein β_n-Raum ist, folgt aus Satz 23, daß $\varrho: R^* - \overset{-1}{\varrho}(N) \to R - N$ sowohl bezüglich der Struktur $\mathcal{O}(R^* - \overset{-1}{\varrho}(N))$ als auch bezüglich $\mathcal{O}'(R^* - \overset{-1}{\varrho}(N))$ biholomorph ist. Die topologische Abbildung $i: (R^*, \mathcal{O}) \to (R^*, \mathcal{O}')$ ist also außerhalb $\overset{-1}{\varrho}(N)$ biholomorph, da dort gilt: $i = \varrho^{-1} \circ \varrho$. Da $(R^*, \mathcal{O})$ und $(R^*, \mathcal{O}')$ vom Typ F sind, ergibt sich aus Satz 15, Korollar, schließlich die Biholomorphie von i, womit $\mathcal{O}(R^*) = \mathcal{O}'(R^*)$ bewiesen ist.

Um zu zeigen, daß es auf R^* wirklich eine β_n-Struktur $\mathcal{O}(R^*)$ mit der behaupteten Eigenschaft gibt, ziehen wir einen tiefliegenden Satz von OKA heran:

Satz von OKA[25]: *Ist M eine analytische Menge in einem Bereich eines komplexen Zahlenraumes und (M^*, μ) die Normalisierung von M, so gibt es zu jedem Punkt $z \in M$ eine Umgebung U und eine topologische Abbildung $\tau: M^* \cap \overset{-1}{\mu}(U) \to \tilde{M}$ von $M^* \cap \overset{-1}{\mu}(U)$ auf eine normale analytische Menge $\tilde{M}$ in einem Bereich eines komplexen Zahlenraumes, so daß $\mu \circ \tau^{-1}: \tilde{M} \to M$ eine holomorphe Abbildung ist.*

Aus diesem Okaschen Satz folgt sofort die Existenz einer β_n-Struktur auf R^* mit der behaupteten Eigenschaft, denn sie existiert jeweils lokal; und auf Grund der bereits bewiesenen Eindeutigkeit verschmelzen sich diese Strukturen zu einer einzigen β_n-Struktur auf R^*, so daß $\varrho: R^* \to R$ holomorph ist.

Von nun an denken wir uns die Normalisierung (R^*, ϱ) eines β-Raumes R stets mit der durch Satz 24 beschriebenen natürlichen β_n-Struktur versehen. Es läßt sich die folgende Verallgemeinerung des Osgoodschen Lemmas beweisen:

Satz 25: Ist R ein β-Raum mit der Normalisierung (R^*, ϱ), so gibt es eine nirgends verschwindende kohärente analytische Untergarbe $\mathfrak{U}$ von $\mathcal{O}(R)$, so daß gilt: $\varrho^*(\mathfrak{U}) \subset \varrho^t(\mathcal{O}(R))$[26].

Man nennt jedes Element $u_r \in \mathfrak{U}_r$, $u_r \neq 0$, einen *universellen Nenner in r.* Auf den Beweis von Satz 25 sei hier verzichtet.

Es folgt nun unmittelbar:

Satz 26: Jede β_t-Struktur $\mathcal{O}$ auf einem Hausdorffschen Raum R ist in eindeutiger Weise zu einer β_n-Struktur $\mathcal{O}'$ auf R verfeinerbar. Jeder Halm $\mathcal{O}'_r$, $r \in R$, ist die ganz abgeschlossene Hülle von $\mathcal{O}_r$.

---

[25]) Vgl. etwa [24].

[26]) $\varrho^*(\mathfrak{U})$ bezeichnet die analytische Urbildgarbe von $\mathfrak{U}$; $\varrho^t(\mathcal{O}(R))$ dagegen die topologische Urbildgarbe von $\mathcal{O}(R)$ bezüglich der Abbildung ϱ. Beide Garben können, da ϱ nirgends entartet und fast überall biholomorph ist, in natürlicher Weise als Untergarben von $\mathcal{O}(R^*)$ aufgefaßt werden.

§ 8. Folgen holomorpher Funktionen und Grenzfunktionen

1. Es seien zunächst zwei in [19] bewiesene Sätze angegeben. Wir bezeichnen mit R einen β-Raum und mit P^n den n-dimensionalen komplex-projektiven Raum, $\alpha: R \times P^n \to R$ sei die natürliche Projektion. P_∞ sei eine ausgezeichnete $(n-1)$-dimensionale analytische Ebene des P^n. Ferner sei F dasjenige komplex-analytische Geradenbündel über $R \times P^n$, das zu dem Divisor $(R \times P_\infty)$ gehört (vgl. [19]). F ist von der Wahl von P_∞ unabhängig und heißt das „ausgezeichnete Geradenbündel" über $R \times P^n$. Mit $\mathfrak{F}$ werde die analytische Garbe der Keime der holomorphen Schnitte in F über $R \times P^n$ bezeichnet. Ist $\mathfrak{S}$ eine analytische Garbe über $R \times P^n$, so werde gesetzt:

$$\mathfrak{S}(k) := \mathfrak{S} \otimes \underbrace{\mathfrak{F} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{F}}_{k\text{-mal}},$$

wobei das Tensorprodukt $\otimes$ bezüglich der Garbe $\mathcal{O}$ der holomorphen Funktionskeime über $R \times P^n$ zu bilden ist. Dann gilt (vgl. [19], § 3):

Satz I: Ist $\mathfrak{S}$ eine kohärente analytische Garbe über $R \times P^n$, so sind alle Bildgarben $\alpha_\nu(\mathfrak{S})$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, kohärente analytische Garben über R.

Satz II: Ist Q^* ein relativ kompakter Teilbereich von R und $\mathfrak{S}$ eine kohärente analytische Garbe über $R \times P^n$, so gilt über Q^* für fast alle k:

$$\alpha_\nu(\mathfrak{S}(k)) = 0\,, \quad \textit{falls } \nu \geq 1\,.$$

Es ergibt sich sofort als einfache Folgerung:

Satz 27: Ist $\pi: R_1 \to R_2$ eine eigentliche nirgends entartete holomorphe Abbildung eines β-Raumes R_1 in einen β-Raum R_2 und ist $\mathfrak{S}$ eine kohärente analytische Garbe, über R_1, so ist $\pi_0(\mathfrak{S})$ kohärent und es gilt $\pi_\nu(\mathfrak{S}) = 0$ für alle $\nu \geq 1$.

Beweis: Es sei $r_2' \in R_2$ ein beliebiger Punkt. Da $\overset{-1}{\pi}(r_2')$ diskret und kompakt ist, besteht $\overset{-1}{\pi}(r_2')$ aus endlich vielen Punkten $r_1^{(1)}, \ldots, r_1^{(s)}$. Es gibt nun, da R_1 ein β-Raum ist, eine Umgebung V_0 der Menge $\bigcup_{\sigma=1}^{s} r_1^{(\sigma)}$, die durch eine biholomorphe Abbildung φ auf eine in einem Gebiet G eines C^m analytische Menge M' bezogen werden kann. Ist nun $U(r_2')$ eine hinreichend kleine Umgebung von r_2', so gilt: $V := \overset{-1}{\pi}(U) \subset V_0$; denn der Urbildfilter des Umgebungsfilters von r_2' kann sich offenbar nur gegen die Punkte $r_1^{(1)}, \ldots, r_1^{(s)}$ von R_1 häufen.

Durch die Zuordnung $r_1 \to (\pi(r_1), \varphi(r_1))$ wird nun eine biholomorphe Abbildung ψ von V auf eine analytische Menge M in $U \times G$ definiert. Faßt man G als Teilgebiet eines P^m auf, so ist M auch in $U \times P^m$ analytisch, da M sich gegen keinen Punkt von $U \times \partial G$ häuft. Die vermöge ψ nach M übertragene Garbe $\mathfrak{S}$ sei mit $\mathfrak{S}_\psi$ bezeichnet, sie läßt sich zu einer über $U \times P^m$ kohärenten analytischen Garbe $'\mathfrak{S}$ trivial fortsetzen: es gilt $'\mathfrak{S} = 0$ über $U \times P^m - M$ und $'\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\psi$ über M. Wie man unmittelbar sieht (vgl. auch [19], § 2), gilt über $U: \pi_\nu(\mathfrak{S}) = \alpha_\nu('\mathfrak{S})$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Aus Satz I folgt deshalb, daß $\pi_0(\mathfrak{S})$ über U kohärent ist. Da $r_2' \in R_2$ beliebig gewählt war, ist also $\pi_0(\mathfrak{S})$ über ganz R_2 kohärent.

Ist $U(r_2')$ ein holomorph vollständiger Raum (zur Def. vgl. [14]), so ist $V = \overset{-1}{\pi}(U)$ sicher K-vollständig und holomorph konvex und mithin wieder

ein holomorph vollständiger Raum. Nach H. CARTAN ([8], théorème B) gilt dann: $H^\nu(V, \mathfrak{S}) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Da es beliebig kleine holomorph vollständige Räume $U(r_2')$ um r_2' gibt, folgt aus der Definition der Bilder der Garben, daß gilt: $\pi_\nu(\mathfrak{S}) = 0$ für alle $\nu \geqq 1$. — Damit ist Satz 27 bewiesen.

2. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

Satz 28: Der Vektorraum $H^0(R, \mathcal{O})$ der in einem β-Raum R holomorphen Funktionen ist, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, ein vollständiger topologischer Vektorraum.

Die Topologie der kompakten Konvergenz ist dabei — wie üblich — auf folgende Weise definiert: Ist K eine kompakte Menge in R, $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl und $f \in H^0(R, \mathcal{O})$ eine in R holomorphe Funktion, so ist

$$U(K, \varepsilon, f) := \left\{ g : g \in H^0(X, \mathcal{O}),\ \max_{r \in K} |f(r) - g(r)| < \varepsilon \right\}$$

eine spezielle offene Menge von $H^0(X, \mathcal{O})$. Die Gesamtheit aller $U(K, \varepsilon, f)$ bildet eine Basis der Topologie der kompakten Konvergenz.

Aus der vorstehenden Definition ergibt sich sofort, daß folgende Aussage zu Satz 28 äquivalent ist:

Satz 28': Ist $\{f_\nu\}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge von in einem β-Raum R holomorphen Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge von R gleichmäßig konvergiert, so ist die Grenzfunktion wieder eine in R holomorphe Funktion.

Der Beweis von Satz 28' erfordert einige Vorbereitungen. Wir zeigen zunächst:

(1) *Besitzt R eine abzählbare Topologie, so ist $H^0(R, \mathcal{O})$ ein metrisierbarer topologischer Vektorraum.*

Beweis: Da R lokal kompakt ist und eine abzählbare Topologie hat, läßt sich R durch eine Folge kompakter Teilmengen K_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ ausschöpfen. Ist $f \in H^0(R, \mathcal{O})$, so sei $\|f\| := \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-\nu} \operatorname{arctg} \sup |f(K_\nu)|$. Weiter sei

$$\operatorname{dist}(f_1, f_2) := \|f_1 - f_2\|$$

die Entfernung zweier Funktionen $f_1, f_2 \in H^0(R, \mathcal{O})$. Offenbar ist $\operatorname{dist}(f_1, f_2)$ eine Metrik und mit der Topologie von $H^0(R, \mathcal{O})$ verträglich, q.e.d.

Es gilt ferner:

(2) *Satz 28' ist für β_n-Räume R richtig.*

Beweis: Nach Satz 16 gibt es eine niederdimensionale analytische Menge $N \subset R$, so daß $R - N$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Konvergiert eine Folge in R holomorpher Funktionen f_ν auf jeder kompakten Teilmenge von R gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion f in R stetig. Nach bekannten Sätzen ist f in $R - N$ sogar holomorph. Aus dem Riemannschen Fortsetzungssatz (Satz 22) folgt daher, daß f in ganz X holomorph ist.

Wir benötigen weiter ein von H. CARTAN hergeleitetes Resultat (vgl. [6] sowie [19]):

(3) *Es sei G ein Gebiet im C^n und $\mathfrak{S}$ eine analytische Untergarbe der Garbe $\mathcal{O}^q$ der Keime von q-tupeln von holomorphen Funktionen über G. (Die Schnittflächen in $\mathfrak{S}$ über G können dann als spezielle q-tupel von in G holomorphen Funktionen*

angesehen werden). Der Vektorraum $H^0(G,\mathfrak{S})$ ist, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz, ein metrisierbarer vollständiger topologischer Vektorraum[27]).

3. In diesem Abschnitt wird Satz 28′ bewiesen.

Es sei (R^*, ϱ) die Normalisierung von R; $\mathcal{O}^*$ bezeichne die Garbe der Keime von holomorphen Funktionen über R^*. Da $\varrho : R^* \to R$ eine eigentliche nirgends entartete holomorphe Abbildung ist, folgt aus Satz 27, daß die Garbe $\tilde{\mathcal{O}} := \varrho_0(\mathcal{O}^*)$ kohärent über R ist. Man kann die Garbe $\mathcal{O}$ der Keime von holomorphen Funktionen über R als analytische Untergarbe von $\tilde{\mathcal{O}}$ ansehen.

Satz 28′ ist lokaler Natur. Man darf deshalb ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß R eine in einem Gebiet $G \subset C^n$ analytische Menge ist und daß es endlich viele Schnittflächen $s^{(1)}, \ldots, s^{(k)}$ in R gibt, die jeden Halm von $\tilde{\mathcal{O}}$ über $R \subset G$ erzeugen. Überdies dürfen wir annehmen, daß G ein Holomorphiegebiet ist; R ist dann ein holomorph vollständiger Raum. Nach H. CARTAN ([8], théorème 5) gilt also: ist s eine Schnittfläche in $\tilde{\mathcal{O}}$ über R, so gibt es k in R holomorphe Funktionen $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$, so daß gilt: $s = \sum_{\varkappa=1}^{k} f^{(\varkappa)} s^{(\varkappa)}$. Die Funktionen $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ lassen sich nach [8], théorème 3, zu in ganz G holomorphen Funktionen $\underline{f}^{(1)}, \ldots, \underline{f}^{(k)}$ fortsetzen. Bezeichnet $H^0(G, \mathcal{O}^k)$ den Vektorraum der k-tupel von in G holomorphen Funktionen, so ist also r: $(f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}) \to s = \sum_{\varkappa=1}^{k} f^{(\varkappa)} s^{(\varkappa)}$ eine stetige lineare Abbildung von $H^0(G, \mathcal{O}^k)$ auf $H^0(R, \tilde{\mathcal{O}}) \approx H^0(R^*, \mathcal{O}^*)$.

Nach § 8.2 sind sowohl $H^0(G, \mathcal{O}^k)$ als auch $H^0(R^*, \mathcal{O}^*)$ metrisierbare und vollständige topologische Vektorräume. Aus einem Satz von BANACH (vgl. [3], p. 34) folgt deshalb, daß r eine offene Abbildung ist. Daraus ergibt sich insbesondere:

(a) *Ist G' ein relativ kompaktes Teilgebiet von G, so gibt es zu G' eine reelle Zahl $K > 0$ mit folgender Eigenschaft: ist $s \in H^0(R, \tilde{\mathcal{O}}) \approx H^0(R^*, \mathcal{O}^*)$ und gilt $|s| < M$ über R, so gibt es k in G holomorphe Funktionen $f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ mit $s = \sum_{\varkappa=1}^{k} f^{(\varkappa)} s^{(\varkappa)}$ und $|f^{(\varkappa)}| < K \cdot M$ in G'.*

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{Q}(R)$ die Quotientengarbe $\tilde{\mathcal{O}}(R)/\mathcal{O}(R)$; weiter seien $'\mathcal{O}(G)$, $'\tilde{\mathcal{O}}(G)$, $'\mathfrak{Q}(G)$ die trivialen Fortsetzungen von $\mathcal{O}(R)$, $\tilde{\mathcal{O}}(R)$, $\mathfrak{Q}(R)$ auf G. Man hat dann über G die exakte Sequenz

$$0 \to {}'\mathcal{O}(G) \to {}'\tilde{\mathcal{O}}(G) \xrightarrow{j} {}'\mathfrak{Q}(G) \to 0 \,.$$

Sind $'s^{(\varkappa)}$ die trivialen Fortsetzungen der Schnittflächen $s^{(\varkappa)}$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, so wird durch

$$(f_z^{(1)}, \ldots, f_z^{(k)}) \to \sum_{\varkappa=1}^{k} f_z^{(\varkappa)} \; {}'s_z^{(\varkappa)}, \quad z \in G \,,$$

[27]) $H^0(G, \mathfrak{S})$ ist sogar ein Fréchetraum, denn er ist offensichtlich lokal konvex.

ein analytischer Homomorphismus $'r : \mathcal{O}^k(G) \to '\tilde{\mathcal{O}}(G)$ von $\mathcal{O}^k(G)$ auf $'\tilde{\mathcal{O}}(G)$ definiert. $\Lambda(G) := Kern\ (j \circ 'r)$ ist dann eine analytische Untergarbe von $\mathcal{O}^k(G)$ mit folgender Eigenschaft: Ein Element $s \in H^0(R, \tilde{\mathcal{O}}) \approx H^0(G, '\tilde{\mathcal{O}})$ mit $s = \sum_{\varkappa=1}^{k} f^{(\varkappa)} s^{(\varkappa)}$ liegt genau dann in $H^0(R, \mathcal{O})$, wenn gilt: $(f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}) \in H^0(G, \Lambda)$.

Es sei nun g_ν eine Folge von in R holomorphen Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge von R gleichmäßig konvergiert. Wegen der lokalen Natur von Satz 28' dürfen wir sogar annehmen, daß die g_ν in ganz R gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion g konvergieren. Nach § 8.2 (2) ist $g \circ \varrho$ holomorph, also gilt: $g \in H^0(R, \tilde{\mathcal{O}})$. Da man $|g| < M$ auf R annehmen darf, folgt aus (a) unmittelbar, wenn $G' \Subset G$ ein beliebiges Teilgebiet von G ist:

(b) *Es gibt eine Folge* $(f_\nu^{(1)}, \ldots, f_\nu^{(k)})$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *von k-tupeln in G holomorpher Funktionen mit* $g_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{k} f_\nu^{(\varkappa)} s^{(\varkappa)}$, *derart, daß die Funktionen* $f_\nu^{(\varkappa)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *in* G' *gleichmäßig gegen in* G' *holomorphe Grenzfunktionen* $f^{(\varkappa)}$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, *konvergieren, so daß über* $R \cap G'$ *gilt*: $g = \sum_{\varkappa=1}^{k} f^{(\varkappa)} s^{(\varkappa)}$.

Nach dem Vorstehenden ist $(f_\nu^{(1)}, \ldots, f_\nu^{(k)})$ eine Schnittfläche in $\Lambda(G)$: $(f_\nu^{(1)}, \ldots, f_\nu^{(k)}) \in H^0(G, \Lambda)$ für alle $\nu = 1, 2, \ldots$. Nach § 8.2 (3) folgt daher: $(f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}) \in H^0(G', \Lambda)$. Das bedeutet aber: $g \mid R \cap G' \in H^0(R \cap G', \mathcal{O})$. Mithin ist g in $R \cap G'$ holomorph. Da $G' \Subset G$ beliebig groß gewählt werden kann, ist also g überall in R holomorph. Damit ist Satz 28' bewiesen.

§ 9. Verallgemeinerung eines Satzes von HARTOGS

1. Ein klassischer Satz von F. HARTOGS sagt aus, daß jede in einem Gebiet $G \subset C^n$ komplex-wertige Funktion, die in jeder einzelnen Veränderlichen holomorph ist, in G schlechthin holomorph ist, d. h. lokal in eine gleichmäßig konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann. Diese Aussage läßt sich offensichtlich, da sie lokaler Natur ist, auch wie folgt formulieren: sind R_1 und R_2 komplexe Mannigfaltigkeiten und ist $f(r_1, r_2)$, $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$, eine in $R_1 \times R_2$ komplex-wertige Funktion, die jeweils für festes $r_1 \in R_1$ holomorph in R_2 und für festes $r_2 \in R_2$ holomorph in R_1 ist, so ist f holomorph in $R_1 \times R_2$.

Wir werden nun in diesem Paragraphen zeigen, daß der Satz von HARTOGS in dieser Fassung für beliebige β-Räume gilt.

Satz 29 (HARTOGS): *Eine im Produkt* $R_1 \times R_2$ *zweier komplexer* β*-Räume* R_1, R_2 *definierte komplex-wertige Funktion* f, *deren Beschränkungen* $f|r_1 \times R_2$ *bzw.* $f|R_1 \times r_2$ *für alle festen* $r_1 \in R_1$ *bzw.* $r_2 \in R_2$ *holomorph sind, ist holomorph in* $R_1 \times R_2$.

2. Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten. In diesem Abschnitt zeigen wir:

(A): *Unter den in Satz 29 gemachten Voraussetzungen ist* f *stetig in* $R_1 \times R_2$.

Wir benutzen folgenden weiter unten bewiesenen

Hilfssatz 4: Ist A eine nirgends dichte analytische Menge in einem β*-Raum R, so gibt es zu jeder kompakten Teilmenge* $K \subset R$ *eine Umgebung U von A und*

einen relativ kompakten Bereich $R' \subset R$ mit $R' \supset K$, so daß $R' - U$ nicht leer ist und für jede in R' holomorphe Funktion f gilt:

$$\sup |f(K)| \leq \sup |f(R' - U)| .$$

Es bezeichne N_ν die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von X_ν; N_ν ist eine in X_ν analytische, nirgends dichte Menge, $\nu = 1, 2$ (vgl. § 6). Wir setzen zunächst einen der beiden Räume, etwa R_2, als eine komplexe Mannigfaltigkeit voraus ($N_2 = 0$). Dann ist f sicher in $(R_1 - N_1) \times R_2$ stetig, da für komplexe Mannigfaltigkeiten der Satz von Hartogs gilt. Sei nun $(r_1', r_2') \in N_1 \times R_2$. Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so sei K_1 eine kompakte Nachbarschaft von r_1', so daß gilt: $\sup\limits_{r_1 \in K_1} |f(r_1, r_2') - f(r_1', r_2')| < \frac{\varepsilon}{2}$; ein solches K_1 existiert, da $f | R_1 \times r_2'$ nach Voraussetzung holomorph ist. Wir bestimmen zu K_1 eine Umgebung U_1 von N_1 und einen relativ kompakten Bereich $R_1' \subset R_1$ mit $K_1 \subset R_1'$ gemäß Hilfssatz 4. Dann gilt also für jedes $r_2 \in R_2$:

$$\sup_{r_1 \in K_1} |f(r_1, r_2) - f(r_1, r_2')| \leq \sup_{r_1 \in R_1' - U_1} |f(r_1, r_2) - f(r_1, r_2')| .$$

Nun liegt $R_1' - U_1$ relativ kompakt in der komplexen Mannigfaltigkeit $R_1 - N_1$. Wegen der Stetigkeit von f auf $(R_1 - N_1) \times R_2$ gibt es daher eine Nachbarschaft K_2 von r_2', so daß gilt: $\sup\limits_{r_2 \in K_2} (\sup\limits_{r_1 \in R_1' - U_1} |f(r_1, r_2) - f(r_1, r_2')|) < \frac{\varepsilon}{2}$. Aus der Ungleichung

$$|f(r_1, r_2) - f(r_1', r_2')| \leq |f(r_1, r_2) - f(r_1, r_2')| + |f(r_1, r_2') - f(r_1', r_2')|$$

folgt jetzt, daß für alle $(r_1, r_2) \in K_1 \times K_2$ gilt: $|f(r_1, r_2) - f(r_1', r_2') < \varepsilon$. Somit ist f in (r_1', r_2') und daher in ganz $R_1 \times R_2$ stetig.

Sei nun auch R_2 beliebig. Wie eben gezeigt, ist f jedenfalls in $R_1 \times (R_2 - N_2)$ stetig, da $R_2 - N_2$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Analog wie vorhin folgt daraus die Stetigkeit von f in ganz $R_1 \times R_2$. — Damit ist (A) bewiesen.

Es werde nunmehr Hilfssatz 4 bewiesen. Wir zeigen zunächst:

(1) *Hilfssatz 4 ist für beliebige β-Räume richtig, wenn er für irreduzible β-Räume richtig ist.*

Es seien R_ι, $\iota \in I$, die irreduziblen Komponenten von R. Sei $A_\iota := A \cap R_\iota$, $K_\iota := K \cap R_\iota$; K_ι liegt kompakt in R_ι und ist für fast alle $\iota \in I$ leer. Nach Voraussetzung gibt es zu der in R_ι nirgends dichten analytischen Menge A_ι eine Umgebung U_ι von A_ι und einen relativ kompakten Bereich $R_\iota' \subset R_\iota$ mit $R_\iota' \supset K_\iota$, so daß $R_\iota' - U_\iota$ nicht leer ist und für jede in R_ι' holomorphe Funktion f_ι gilt: $\sup |f_\iota(K_\iota)| \leq \sup |f_\iota(R_\iota' - U_\iota)|$. Nun bildet die Familie $\{R_\iota\}_{\iota \in I}$ eine lokal endliche, abgeschlossene Überdeckung von R (vgl. Satz 18). Daher enthält $\bigcup\limits_{\iota \in I} U_\iota$ eine Umgebung U der Menge $A \subset X$. Ist $I' \subset I$ eine nichtleere endliche Teilmenge von I, so daß alle K_ι, $\iota \in I - I'$, leer sind, so ist weiter $\bigcup\limits_{\iota \in I'} R_\iota'$ in einem relativ kompakten Teilbereich R' von R, der K umfaßt, enthalten. $R' - U$ ist nicht leer, da $(R' - U) \cap R_\iota \supseteq R_\iota - U_\iota$, $\iota \in I'$. Offenbar gilt für U, R' die im Hilfssatz 4 behauptete Ungleichung für alle in R' holomorphen Funktionen.

Wir beweisen weiter:

(2) *Ist R ein irreduzibler β-Raum, so gibt es zu jedem Punkt $r_0 \in R$ eine relativ kompakte Umgebung V von r_0 und eine Umgebung U von A, so daß $V - U$ nicht leer ist und für jede in V holomorphe Funktion f gilt*: $\sup|f(V)| = \sup|f(V-U)|$.

Als irreduzibler β-Raum ist R reindimensional; es gelte etwa $d(X) = d$. Dann gibt es zu jedem Punkt $r_0 \in R$ eine β-Karte (V', ψ), $r_0 \in V'$, so daß $\psi(V') =: M'$ eine analytische Menge in einem Polyzylinder $Z := \{z : |z_1| < a_1, \ldots, |z_n| < a_n\}$ des C^n, $n \geqq d$ ist, die über $Z^d := \{|z_1| < a_1, \ldots, |z_d| < a_d\}$ ausgebreitet liegt; wir dürfen $\psi(r_0) = O \in C^n$ annehmen (vgl. § 6, d)). Offensichtlich ist nur der Fall $r_0 \in A$ zu behandeln. Man kann durch eine lineare Transformation der $z_1, \ldots, z_d$ allein erreichen, daß die in Z analytische Menge $M^* := \psi(V' \cap A)$ über $Z^{d-1} := \{|z_2| < a_2, \ldots, |z_d| < a_d\}$ liegt (im Falle $d = 1$ besteht M^* nur aus O); man darf sogar annehmen, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{M}^*$ von M^* keinen Punkt mit der Menge $T := \{z \in \overline{Z}, |z_1| = a_1, |z_\delta| = a_\delta, \delta = d+1, \ldots, n\}$ gemeinsam hat. Sei nun $Z^* := \left\{z \in Z, |z_2| < \frac{a_2}{2}, \ldots, |z_d| < \frac{a_d}{2}\right\}$. Wir setzen $V := \overset{-1}{\psi}(M' \cap Z^*)$ und wählen ein Umgebung U von $A \subset R$ so, daß $U^* := \psi(V \cap U)$ sich nicht gegen T häuft; ein solches U existiert offensichtlich. Dann ist $V - U$ nicht leer; wir behaupten, daß für U und V die Aussage (2) gilt. Dazu genügt es zu zeigen, daß für jede in $M := M' \cap Z^*$ holomorphe Funktion f die Gleichung $\sup|f(M)| = \sup|f(M - U^*)|$ besteht. Wäre das für ein f nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt $b = (b_1, \ldots, b_n) \in U^*$ mit $|f(b)| > \sup|f(M - U^*)|$. Wir betrachten dann den Schnitt S von M mit der $(n-d-1)$-dimensionalen analytischen Ebene $\{z : z_2 = b_2, \ldots, z_d = b_d\}$. S ist eine rein 1-dimensionale analytische Menge in Z; für die in S holomorphe Funktion $f|S$ gilt: $|f(b)| > \sup|f(S - S \cap U^*)|$. Da aber $b \in S \cap U^*$ und $S \cap U^*$ nach Wahl von U^* relativ kompakt in S liegt, widerspricht dies dem Maximum-Prinzip.

Nunmehr läßt sich Hilfssatz 4 einfach beweisen. Wegen (1) dürfen wir R als irreduzibel annehmen. Wir wählen gemäß (2) zu jedem Punkt $r \in K$ eine relativ kompakte Umgebung $V(r)$ und eine Umgebung $U(A)$. K wird als kompakte Menge durch endlich viele Umgebungen $V(r)$, etwa $V_1, \ldots, V_s$, überdeckt. Bezeichnen wir mit $U_1, \ldots, U_s$ die zugehörigen Umgebungen von A, so setzen wir: $R' := \bigcup_{\sigma=1}^{s} V_\sigma$, $U := \bigcap_{\sigma=1}^{s} U_\sigma$. Offensichtlich ist $R' - U$ nicht leer, und es gilt für R' und U die im Hilfssatz behauptete Ungleichung für alle in R' holomorphen Funktionen f.

3. Es ist jetzt möglich, in wenigen Schritten den Satz von Hartogs zu beweisen. Wegen der lokalen Natur des Satzes dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Räume R_1 und R_2 eine abzählbare Topologie haben und daß die nach (A) in $R_1 \times R_2$ stetige Funktion f beschränkt in $R_1 \times R_2$ ist. Wir zeigen zunächst:

(a) *Es gibt eine abgeschlossene Nachbarschaft $U_1 \neq R_1$ der Menge N_1 der nicht gewöhnlichen Punkte von R_1, so daß jede Folge $\{g_\nu\}$ von in $R_1 \times S$ holomorphen Funktionen, die in $(R_1 - U_1) \times S$ kompakt konvergiert, auch in $R_1 \times S$ kompakt konvergiert; hierbei ist S irgendein β-Raum*[28]).

Wir schöpfen R_1 durch eine Folge $Q_1, Q_2, \ldots$ von relativ kompakten Teilbereichen aus: $\ldots \subset Q_n \subset Q_{n+1} \subset \ldots$. Wir wählen gemäß Hilfssatz 4 zur kompakten Menge $\overline{Q}_n$ eine Umgebung U_n von N_1 und einen relativ kompakten Bereich $R'_n \subset R$, $R'_n \supset \overline{Q}_n$. Man kann (durch evtl. Fortlassen gewisser Q_ν) erreichen, daß gilt: $Q_{n+1} \supset R'_n$. Dann ist $Q_{n+1} - U_n$ nie leer, und für jede in Q_{n+1} holomorphe Funktion g gilt: $\sup|g(Q_n)| \leqq \sup|g(Q_{n+1} - U_n)|$. Setzt man $U' := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (Q_{k+1} \cap U_1 \cap \cdots \cap U_k)$, so ist U' eine Umgebung von N_1, so daß $Q_{n+1} - U'$ niemals leer ist. Man folgert leicht, daß für jede in R_1 holomorphe Funktion g gilt: $\sup|g(Q_n)| \leqq \sup|g(Q_{n+1} - U')|$, $n = 1, 2, \ldots$. Es hat nun jede in U' enthaltene abgeschlossene Nachbarschaft U_1 von N_1, für die $\partial U' \cap U_1$ leer ist, die in (1) behauptete Eigenschaft: Ist nämlich $\{g_\nu\}$ eine Folge in $R_1 \times S$ holomorpher Funktionen, die in $(R_1 - U_1) \times S$ kompakt konvergiert, und ist B irgendeine in $R_1 \times S$ kompakte Menge, so wähle man ein q und eine in S kompakte Menge L so, daß $B \subset Q_q \times L$. Es gilt für jedes $y \in S$ und alle n, m:

$$\sup_{r_1 \in Q_q} |g_n(r_1, y) - g_m(r_1, y)| \leqq \sup_{r_1 \in Q_{q+1} - U'} |g_n(r_1, y) - g_m(r_1, y)| \,.$$

Da $Q_{q+1} - U'$ relativ kompakt in $R_1 - U_1$ liegt, kann man nach Voraussetzung zu jedem $\varepsilon > 0$ ein p_0 so finden, daß $|g_n(r_1, y) - g_m(r_1, y)| < \varepsilon$, falls $n, m \geqq p_0$ und $(x_1, y) \in (Q_{q+1} - U') \times L$. Mithin gilt erst recht:

$$\sup_{(r_1, y) \in B} |g_n(r_1, y) - g_m(r_1, y)| < \varepsilon \,,$$

falls $n, m \geqq p_0$, w.z.b.w.

Nach bekannten Sätzen gibt es in der komplexen Mannigfaltigkeit $R_1 - U_1$ eine Riemannsche Metrik, so daß $R_1 - U_1$ bezüglich des zugehörigen Oberflächenelementes do einen endlichen Inhalt hat. Es bezeichne H den Vektorraum der in R_1 holomorphen Funktionen g, die in $R_1 - U_1$ in bezug auf do quadratintegrierbar sind $\left(\int\limits_{R_1 - U_1} |g|^2 d\,o < \infty\right)$. In H liegen sicher alle in R_1 beschränkten holomorphen Funktionen. Wir führen vermöge der Gleichung $(g_1, g_2) := \int\limits_{R_1 - U_1} g_1 \bar{g}_2 \, do$, $g_1, g_2 \in H$, in H ein Skalarprodukt ein. Ist $\{g_\nu\}$ eine Cauchyfolge in H (d. h. gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, so daß $(g_\nu - g_\mu, g_\nu - g_\mu) < \varepsilon$ für alle $\nu, \mu > n_0$), so konvergiert — wie sich aus geläufigen Abschätzungen ergibt — die Folge $\{g_\nu\}$ kompakt in $R_1 - U_1$ und nach (a) also auch kompakt in R_1. Aus Satz 28 ergibt sich, daß die Grenzfunktion wieder in R_1 holomorph ist. Da sie überdies in $R_1 - U_1$ auch quadratintegrierbar ist, folgt, daß H ein Hilbertraum ist. Man beweist ferner leicht, daß es ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem $\{g_\nu\}$ in H gibt (vgl. [14], p. 245).

---

[28]) In der Terminologie von [14] ist $R_1 \times S$ also die Konvergenzhülle von $(R_1 - U_1) \times S$.

Wir betrachten nun die vorgegebene, in $R_1 \times R_2$ beschränkte Funktion $f(r_1, r_2)$. Für jedes feste r_2 gilt: $f(r_1, r_2) \in H$ und somit:

$$f(r_1, r_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(r_2)\, g_\nu(r_1)\,, \quad a_\nu(r_2) := (f(r_1, r_2)\,,\, g_\nu(r_1))\,.$$

Jedes Integral $(f(r_1, r_2), g_\nu(r_1))$ läßt sich durch eine Folge $\{s_\nu^{(\varrho)}\}$, $\varrho = 1, 2, \ldots$ Riemannscher Summen approximieren. Da alle $s_\nu^{(\varrho)}$ in R_2 holomorph sind und diese Approximation in jeder kompakten Menge von R_2 gleichmäßig ist, folgt aus Satz 28, daß alle Funktionen $a_\nu(r_2)$ in R_2 holomorph sind. Man zeigt nun leicht, daß auf jeder kompakten Menge $Q \subset R_2$ das Quadratintegral

$$\left(f(r_1, r_2) - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(r_2)\, g_\nu(r_1)\,,\; f(r_1, r_2) - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(r_2)\, g_\nu(r_1)\right) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu(r_2)|^2$$

mit wachsendem n beliebig klein wird. Daher konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(r_2)\, g_\nu(r_1)$ in $(R_1 - U_1) \times R_2$ und mithin nach (a) auch in $R_1 \times R_2$ kompakt. Hieraus folgt durch nochmalige Anwendung von Satz 28 die Holomorphie von f in $R_1 \times R_2$, w.z.b.w.

§ 10. Beziehungen zwischen α- und β-Räumen

1. Wir stellen in diesem Paragraphen eine erste Verbindung her zwischen den Begriffen des α-Raumes und β-Raumes. Wir nennen einen β-Raum R einen α-Raum (bzw. umgekehrt), wenn die β-Strukturgarbe über R eine α-Strukturgarbe über R ist (bzw. umgekehrt). Wir beweisen zunächst:

Satz 30: *Jeder β_n-Raum R ist ein α-Raum.*

Beweis: Wir brauchen nur zu zeigen, daß jeder Punkt $r \in R$ eine Umgebung U besitzt, so daß die Beschränkung $\mathcal{O}(U)$ der β_n-Strukturgarbe $\mathcal{O}(R)$ von R auf U eine α-Strukturgarbe über U ist. Wir wählen um r eine β_n-Karte (U, ψ) gemäß § 6. d) und setzen $M = \psi(U)$. Bezeichnet $\gamma: M \to Z^d$ die Projektion von M auf Z^d (Bezeichnungen wie in § 6. d)), so ist $\mathfrak{M} = (M, \gamma, Z^d)$ eine analytische Überlagerung von Z^d gemäß Satz 9, da M lokal irreduzibel ist. Das Tripel $(U, \psi, \mathfrak{M})$ ist dann eine α-Karte, die auf U eine α-Strukturgarbe $\mathcal{O}'(U)$ definiert. Wir behaupten: $\mathcal{O}'(U) = \mathcal{O}(U)$.

Es sei $A \neq Z^d$ eine analytische Menge in Z^d, über der alle Verzweigungspunkte von $\mathfrak{M}$ liegen. Dann umfaßt $\overset{-1}{\gamma}(A)$ insbesondere die nichtgewöhnlichen Punkte von M. Setzen wir $D := \overset{-1}{\psi}(\overset{-1}{\gamma}(A))$, so ist D eine mindestens 1-codimensionale analytische Menge in U bezüglich der beiden Strukturgarben $\mathcal{O}(U)$ und $\mathcal{O}'(U)$. Wir zeigen nun zunächst: $\mathcal{O}(U - D) = \mathcal{O}'(U - D)$. Die Inklusion $\mathcal{O}(U - D) \subset \mathcal{O}'(U - D)$ ist trivial. Aber auch umgekehrt ist jede in einer offenen Menge W von $M - \overset{-1}{\gamma}(A)$ holomorphe Funktion (im Sinne der Holomorphie auf analytischen Überlagerungen) ein Element aus $H^0(W, \mathcal{O}(W))$, da alle Punkte von W gewöhnliche Punkte von M sind, und somit jede holomorphe Funktion aus $H^0(W, \mathcal{O}'(W))$ lokal als Spur einer holomorphen Funktion aus dem umgebenden Zahlenraum darstellbar ist. Also gilt: $\mathcal{O}(U - D) = \mathcal{O}'(U - D)$.

Die Identität $\iota: U \to U$ bildet somit den β_n-Raum U außerhalb D biholomorph auf den α-Raum U ab. Dann folgt aber aus dem Korollar zu Satz 15, da D sowohl bezüglich $\mathcal{O}(U)$ als auch $\mathcal{O}'(U)$ eine analytische Menge in U ist und beide Räume $(U, \mathcal{O}(U))$, $(U, \mathcal{O}'(U))$ vom Typ F sind, daß $\iota: U \to U$ schlechthin biholomorph ist. Somit ist gezeigt: $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}'(U)$, w.z.b.w.

2. Wir wollen in diesem Abschnitt α-Strukturen, die zugleich β_n-Strukturen sind, durch eine besonders einfache Eigenschaft charakterisieren. Zunächst sei definiert:

Definition 35 (Algebroide Überlagerung): Eine analytische Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ heißt eine algebroide Überlagerung, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U gibt, derart, daß in $\overset{-1}{\eta}(U)$ eine holomorphe Funktion f existiert mit $[f : I(U)] = b(\mathfrak{Y})$.

Definition 36 (Komplexer α_c-Raum): Ein α-Raum R heißt ein α_c-Raum, wenn es zu jedem Punkt $r \in R$ eine α-Karte $(U, \psi, \mathfrak{S})$, $r \in U$, aus dem α-Strukturatlas von R gibt, so daß $\mathfrak{S}$ eine algebroide Überlagerung ist. Die Strukturgarbe eines α_c-Raumes R heißt eine α_c-Strukturgarbe über R.

Wir zeigen nun:

Satz 31: Eine geringte Struktur $\mathcal{O}(R)$ auf einem Hausdorffschen Raum R ist genau dann eine β_n-Struktur, wenn sie eine α_c-Struktur ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß jede β_n-Struktur $\mathcal{O}(R)$ über R eine α_c-Struktur ist. Nach Satz 30 wissen wir bereits, daß $\mathcal{O}(R)$ eine α-Struktur ist. Sei dann $r_0 \in R$ irgendein Punkt und $(U, \psi, \mathfrak{S})$ eine α-Karte mit $r_0 \in U$. U sei so klein gewählt, daß es eine biholomorphe Abbildung φ von U auf eine in einem Gebiet des $C^n(z_1, \ldots, z_n)$ normale analytische Menge gibt. φ werde durch die holomorphen Funktionen $z_1 = f_1^*(r), \ldots, z_n = f_n^*(r)$, $r \in U$, gegeben. Gilt nun $\mathfrak{S} = (Y, \eta, G)$, so werde gesetzt: $f_\nu(y) := f_\nu^* \circ \psi^{-1}$, $\nu = 1, \ldots, n$, (es ist $\psi: U \to Y$ biholomorph!). Da φ eineindeutig abbildet, gibt es zu zwei verschiedenen Punkten $y_1, y_2 \in Y$ stets ein ν_0, so daß gilt: $f_{\nu_0}(y_1) \neq f_{\nu_0}(y_2)$. Dann gibt es aber auch eine in Y holomorphe Funktion f, die in allen Punkten $y \in \overset{-1}{\eta}(z_0)$, wo $z_0 \in G$ geeignet gewählt ist, paarweise verschiedene Werte besitzt (Satz vom primitiven Element). Offensichtlich gilt mit diesem f die Gleichung: $[f : I(G)] = b(\mathfrak{S})$. Daher ist $\mathfrak{S}$ eine algebroide Überlagerung; es ist bewiesen, daß jede β_n-Struktur über R eine α_c-Struktur ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß auch jede α_c-Struktur $\mathcal{O}(R)$ über R eine β_n-Struktur ist. Es sei wieder $r_0 \in R$ ein beliebiger Punkt; $(U, \psi, \mathfrak{S})$ sei eine α-Karte mit $r_0 \in U$, so daß $\mathfrak{S} = (Y, \eta, G)$ eine algebroide Überlagerung mit der α-Strukturgarbe $\mathcal{O}(Y)$ ist. Es werde G so klein gewählt, daß auf Y eine holomorphe Funktion f existiert mit $[f : I(G)] = b(\mathfrak{S})$. f annuliert ein Polynom $\omega(w; z)$ mit in G holomorphen Koeffizienten. Die holomorphe Produktabbildung $\varphi := \eta \times \{w = f(y)\}$ bildet dann Y auf die in $G \times C^1(w)$ analytische Menge $M := \{\omega(w, z) = 0\}$ ab. Ist $D \subset G$ die Diskriminantenmenge von $\omega(w; z)$, so ist φ eine biholomorphe Abbildung von $Y_0 := Y - \overset{-1}{\eta}(D)$ auf die komplexe Mannigfaltigkeit $M_0 := M - D \times C^1(w)$. Da $D \times C^1(w)$ eine mindestens

1-codimensionale analytische Menge in M ist, φ eigentlich und nirgends entartet abbildet, und jede mindestens 1-codimensionale analytische Menge in einem Teilbereich von Y diesen Teilbereich nirgends zerlegt, so folgt, daß (Y, φ) eine Normalisierung von M ist. Nach Satz 24 gibt es auf Y genau eine β_n-Struktur $\mathcal{O}'(Y)$, so daß $\varphi:(Y, \mathcal{O}'(Y)) \to (M, \mathcal{O}(M))$ holomorph ist. Die Identität $i:(Y, \mathcal{O}'(Y)) \to (Y, \mathcal{O}(Y))$ ist dann, beschränkt auf Y_0, biholomorph. Da β_n-Räume und α_c-Räume vom Typ F sind, ist dann i sogar biholomorph schlechthin. Mithin ist die α_c-Struktur $\mathcal{O}(U)$ über U auch eine β_n-Struktur.

3. Wir werden in den restlichen Paragraphen dieser Arbeit den folgenden Hauptsatz beweisen:

Satz 32: Jeder α-Raum ist ein β_n-Raum.

Hierzu genügt es, auf Grund von Satz 31, folgendes zu zeigen:

Satz 33: Jede analytische Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ einer komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine algebroide Überlagerung.

Der Beweis dieser Aussage wird in mehreren Schritten geführt.

§ 11. Typen analytischer Überlagerungen

1. Um eine bequeme Ausdrucksweise zu gewinnen, wollen wir auch analytische Überlagerungen von α-Räumen betrachten.

Definition 37 (Analytische Überlagerung eines α-Raumes): Es sei R ein α-Raum. Ein Tripel $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, R)$ heißt eine analytische Überlagerung von R, wenn

1) Y ein lokal kompakter Raum und $\eta: Y \to R$ eine stetige eigentliche und nirgends entartete Abbildung von Y auf R ist,

2) es eine analytische Menge A in R gibt, so daß $\overset{-1}{\eta}(A)$ den Raum Y nirgends zerlegt und $\eta: Y - \overset{-1}{\eta}(A) \to R - A$ lokal topologisch ist.

Die in § 2 für analytische Überlagerungen komplexer Mannigfaltigkeiten eingeführten Begriffe übertragen sich unmittelbar; insbesondere kann man holomorphe Funktionen in offenen Mengen von Y betrachten und somit die Garbe $\mathcal{O}(Y)$ der Keime von holomorphen Funktionen in Y definieren. Man zeigt leicht:

Der Raum Y ist, versehen mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}(Y)$, ein α-Raum, die Abbildung $\eta: Y \to R$ ist holomorph. $\mathcal{O}(Y)$ ist die einzige α-Struktur auf Y, so daß η holomorph ist.

η induziert wieder eine Einbettung von $I(R)$ in den Ring $I(Y)$ der in Y holomorphen Funktionen. Wie in § 2 zeigt man:

$$(I(Y):I(R)) \leq b(\mathfrak{Y}) = \text{Blätterzahl von } \mathfrak{Y}^{29)}\,.$$

2. Mit G werde fortan ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet im C^n der komplexen Veränderlichen $z = (z_1, \ldots, z_n)$ bezeichnet. P^1 sei die

[29]) Wir setzen: $(I(Y):I(R)) := \max\limits_{f \in I(Y)} (f:I(R))$.

Riemannsche Zahlenkugel mit der inhomogenen Veränderlichen w; der unendlich ferne Punkt von P^1 heiße p_∞. A sei eine rein n-dimensionale analytische Menge in $B := G \times P^1$; wir wollen stets $A \subset B_1 := G \times \{w, |w| < 1\}$ voraussetzen. Dann gilt, wie leicht einzusehen (vgl. Satz 3):

Es gibt ein Polynom $\omega(w; z) = w^k + a_1(z)\, w^{k-1} + \cdots + a_k(z)$ mit in G holomorphen Koeffizienten $a_\varkappa(z)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, das keine mehrfachen Faktoren enthält, so daß A die genaue Nullstellenmenge von $\omega(w; z)$ ist.

Es werde definiert:

Definition 38 (a-Überlagerung): Eine analytische Überlagerung von $B = G \times P^1$ heißt eine a-Überlagerung, wenn sie höchstens über einer in $B_1 = G \times \times \{w, |w| < 1\}$ enthaltenen analytischen Menge A verzweigt ist.

Ist $\mathfrak{P} = (P, \pi, B)$ eine b-blättrige a-Überlagerung von B, so besteht die Beschränkung $\mathfrak{P} \mid B_2 = (\overset{-1}{\pi}(B_2), \pi, B_2)$ von $\mathfrak{P}$ auf $B_2 := G \times (\{w, |w| > 1\} \cup p_\infty)$ aus genau b schlichten, nicht zusammenhängenden Blättern; denn B_2 ist einfach zusammenhängend.

Der folgende elementare Satz zeigt, daß jede analytische Überlagerung „lokal“ als Teil einer a-Überlagerung aufgefaßt werden kann.

Satz 34: Es sei $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine analytische Überlagerung einer rein $(n+1)$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X. Dann gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine komplexe Karte (U, ψ) mit $x_0 \in U$ und eine a-Überlagerung $\mathfrak{P} = (P, \pi, B)$ eines Gebietes $B = G \times P^1(w)$, $G \subset C^n(z)$ mit folgender Eigenschaft: die Menge $V := \psi(U)$ ist in B enthalten; es gibt eine biholomorphe Abbildung $\Phi : \overset{-1}{\eta}(U) \to \overset{-1}{\pi}(V)$, so daß $\psi \circ \eta = \pi \circ \Phi$.

Beweis: Es sei M eine rein n-dimensionale analytische Menge in X, über der alle Verzweigungspunkte von $\mathfrak{Y}$ liegen. Gilt $x_0 \notin M$, so ist $\mathfrak{Y}$ über x_0 unverzweigt, und die Aussage des Satzes ist trivial. Sei also $x_0 \in M$. Man kann dann eine relativ kompakte Umgebung U von x_0 und eine biholomorphe Abbildung ψ von $\overline{U}$ auf eine Menge $\overline{V}$ des $C^{n+1}(z_1, \ldots, z_n, w)$ mit $\psi(x_0) = O$ finden, so daß das „Ebenenstück“ $\{x \in U,\ z_\nu \circ \psi(x) = 0,\ \nu = 1, \ldots, n\}$ die Menge M in x_0 punkthaft schneidet; (U, ψ) ist ersichtlich eine komplexe Karte auf X mit $x_0 \in U$. Offensichtlich kann man U so wählen, daß gilt:

$$V = G \times K, \text{ wo } G := \{z, |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}, \; K := \left\{w, |w| < \frac{1}{2}\right\},$$

und $\psi(M) \cap (G \times \partial K)$ leer ist.

Die Abbildung ψ induziert eine Überlagerung $\mathfrak{P}'$ von $\overline{V}$, die über $G \times \partial K$ unverzweigt ist. Wir fassen nun w als inhomogene Koordinate einer Riemannschen Zahlenkugel P^1 auf und ziehen den folgenden, weiter unten bewiesenen Hilfssatz heran:

Hilfssatz 5: Es sei T ein Gebiet des C^n und S ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand ∂S in einer Riemannschen Zahlenkugel. Dann läßt sich jede endlich-blättrige, unverzweigte und unbegrenzte Überlagerung von $T \times \partial S$ zu einer analytischen Überlagerung von $T \times \overline{S}$ fortsetzen, die höchstens über einer Ebene $T \times p_0$ verzweigt ist; dabei ist $p_0 \in S$ ein beliebig wählbarer Punkt.

In unserem Falle sei $T := G$, $S := \left(\left\{w, |w| > \frac{1}{2}\right\} \cup p_\infty\right) \subset P^1$, und p_0 der Punkt $w = \frac{2}{3}$. Die Überlagerung $\mathfrak{P}'$ von V kann dann zu einer analytischen Überlagerung $\mathfrak{P} = (P, \pi, B)$ von $B = G \times P^1$ fortgesetzt werden, die höchstens über der analytischen Menge $A := (\psi(M) \cap G \times K) \cup \left(G \times \frac{2}{3}\right) \subset \subset G \times \{w, |w| < 1\}$ verzweigt ist. Mithin ist $\mathfrak{P}$ eine a-Überlagerung, die Existenz einer biholomorphen Abbildung $\Phi : \overset{-1}{\eta}(U) \to \overset{-1}{\pi}(V)$ mit $\psi \circ \eta = \pi \circ \Phi$ ist offensichtlich. Damit ist Satz 34 bewiesen.

Es ist noch der Beweis des Hilfssatzes nachzutragen. Wegen des Riemannschen Abbildungssatzes kann man S als Einheitskreis $\{w, |w| < 1\}$ und p_0 als Nullpunkt $w = 0$ voraussetzen. Durch die Abbildung $\varrho : (t, re^{i\vartheta}) \to (t, e^{i\vartheta})$ wird $T \times (\bar{S} - 0)$ stetig auf $T \times \partial S$ abgebildet. Bezeichnet daher $\mathfrak{Z} = (Z, \zeta, T \times \partial S)$ die vorgelegte Überlagerung von $T \times \partial S$, so ist $\tilde{\mathfrak{Z}} = (Z \times \{r, 0 < < r \leq 1\}, \tilde{\zeta}, T \times (\bar{S} - 0))$, wo $\tilde{\zeta}(x, r) = (t, r\, e^{i\vartheta})$, falls $\zeta(x) = (t, e^{i\vartheta})$, eine Fortsetzung von $\mathfrak{Z}$ zu einer unverzweigten analytischen Überlagerung von $T \times \times (\bar{S} - 0)$. Diese Überlagerung läßt sich nach dem Fortsetzungssatz weiter zu einer analytischen Überlagerung von $T \times \bar{S}$ fortsetzen, q.e.d.

Wir werden später zeigen, daß jede a-Überlagerung algebroid ist. Aus dem soeben bewiesenen Satz folgt dann, daß jede analytische Überlagerung einer komplexen Mannigfaltigkeit eine algebroide Überlagerung ist.

3. Der Beweis des Hauptsatzes 33 braucht nur für zusammenhängende Überlagerungen erbracht zu werden. Es gilt nämlich:

Satz 35: Es sei $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine beliebige analytische Überlagerung einer zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeit X. $\mathfrak{Y}$ zerfalle in die zusammenhängenden Komponenten $\mathfrak{Y}_\varkappa = (Y_\varkappa, \eta_\varkappa, X)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Dann ist $\mathfrak{Y}$ genau dann eine algebroide Überlagerung von X, wenn jedes $\mathfrak{Y}_\varkappa$ eine algebroide Überlagerung von X ist.

Beweis: Gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung U und in $V := \overset{-1}{\eta}(U)$ eine holomorphe Funktion f mit $(f : I(U)) = b(\mathfrak{Y})$, so gilt für die in $V \cap Y_\varkappa$ holomorphe Funktion $f_\varkappa := f | V \cap Y_\varkappa$ offensichtlich: $(f_\varkappa : I(U)) = b(\mathfrak{Y}_\varkappa)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Ist also $\mathfrak{Y}$ algebroid, so auch jede Überlagerung $\mathfrak{Y}_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Sei nun umgekehrt jedes $\mathfrak{Y}_\varkappa$ eine algebroide Überlagerung. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ eine Umgebung U und in $V_\varkappa =: V \cap Y_\varkappa$, $V := \overset{-1}{\eta}(U)$, eine holomorphe Funktion $f_\varkappa$ mit $(f_\varkappa : I(U)) = b(\mathfrak{Y}_\varkappa)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Die Funktionen $f_\varkappa$ können offenbar so gewählt werden, daß jeder Durchschnitt $f_{\varkappa_1}(V_{\varkappa_1}) \cap f_{\varkappa_2}(V_{\varkappa_2})$, $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, leer ist. Diese $f_\varkappa$ definieren aber eine holomorphe Funktion f in V mit $(f : I(U)) = b(\mathfrak{Y}) = \sum_{\varkappa=1}^{k} b(\mathfrak{Y}_\varkappa)$, w.z.b.w.

Als Corollar zu Satz 35 ergibt sich sofort:

Jede analytische Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$, deren Verzweigungspunkte sämtlich Windungspunkte sind, ist eine algebroide Überlagerung.

In der Tat! Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung U, so daß jede zusammenhängende Komponente $\mathfrak{Y}_\varkappa$ von $\mathfrak{Y} | U$ äquivalent zu einer Überlagerung $\mathfrak{W}_{b_\varkappa}(U) = (W_{b_\varkappa}, \gamma, U)$ ist, $\varkappa = 1, \ldots, k$ (vgl. § 2. Beispiel 1; U kann

so gewählt werden, daß U bezüglich geeigneter holomorpher Koordinaten ein Polyzylinder ist). Jede Überlagerung $\mathfrak{W}_{b_\varkappa}(U)$ ist aber algebroid, da $\sqrt[b_\varkappa]{z_1}$ als holomorphe Funktion auf $W_{b_\varkappa}$ definiert werden kann, die über $I(U)$ den Grad $b_\varkappa$ hat, $\varkappa = 1, \ldots, k$. Mithin ist auch $\mathfrak{Y} | U$ und daher $\mathfrak{Y}$ selbst eine algebroide Überlagerung.

4. In den folgenden beiden Abschnitten werden zwei weitere Typen von analytischen Überlagerungen untersucht. X sei eine rein n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und M eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in X.

Definition 39 (b-Menge): M heißt eine b-Menge, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in M$ eine Umgebung U mit lokalen Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n) = z$ gibt, so daß folgendes gilt:

1) *Es gibt ein Pseudopolynom* $\omega(z_1; z_2, \ldots, z_n) = z_1^k + \sum_{\varkappa=0}^{k-1} A_\varkappa(z_2, \ldots, z_n) \cdot z_1^\varkappa$ *mit in U holomorphen Koeffizienten $A_\varkappa(z_2, \ldots, z_n)$, $\varkappa = 0, \ldots, k-1$, so daß*

$$U \cap M = \{z \in U\,,\ \omega(z) = 0\}\,.$$

2) *Die Menge* $U \cap M \cap \{z \in U, \frac{\partial \omega}{\partial z_1}(z) = 0, z_2 \neq 0\}$ *ist leer.*

Nach dieser Definition ist jede rein 1-dimensionale analytische Menge in einer rein 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit offensichtlich eine b-Menge. Weiter ist im Falle beliebiger Dimension n sicher jede rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge, die nur gewöhnliche Punkte besitzt, eine b-Menge.

Wir definieren nun

Definition 40 (b-Überlagerung): Eine analytische Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ über einer rein dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X heißt eine b-Überlagerung, wenn es eine b-Menge in X gibt, so daß $\mathfrak{Y}$ höchstens über M verzweigt ist.

Es folgt sofort, daß jede analytische Überlagerung einer rein 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit eine b-Überlagerung ist.

Wir zeigen im folgenden Satz, daß jede a-Überlagerung außerhalb einer speziellen $(n-1)$-dimensionalen analytischen Menge eine b-Überlagerung ist. $\mathfrak{P} = (P, \pi, B)$, $B = G \times P^1$, $G \subset C^n$ sei irgendeine a-Überlagerung; $A \subset G \times \times \{w, |w| < 1\}$ eine rein n-dimensionale analytische Menge, über der alle Verzweigungspunkte von $\mathfrak{P}$ liegen. $\omega(w; z)$ sei wie früher ein Polynom in w ohne mehrfache Faktoren, dessen genaue Nullstellenmenge A ist. D sei die Diskriminantenmenge von ω, D ist leer oder rein $(n-1)$-dimensional. Wir bezeichnen mit N die höchstens $(n-2)$-dimensionale analytische Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von D und behaupten:

Satz 36: Die Überlagerung

$$\mathfrak{P} | (G - N) \times P^1 = \left(\overset{-1}{\pi}(G - N) \times P^1, \pi, (G - N) \times P^1\right)$$

ist eine b-Überlagerung.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß $A - (N \times P^1)$ eine b-Menge in $(G \times P^1) - (N \times P^1)$ ist. Bezeichnet K die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte

von A, so ist, da A in jedem gewöhnlichen Punkt eine b-Menge ist, nur zu zeigen, daß A in jedem Punkt $(w_0, z_0) \in K - N \times P^1$ eine b-Menge ist. Sicher gilt $z_0 \in D$, da zu jedem $z \notin D$ nur gewöhnliche Punkte (w, z) von A gehören. Nach Voraussetzung ist z_0 ein gewöhnlicher Punkt von D; daher gibt es eine Umgebung $V(z_0)$ von z_0, in der sich vermöge einer biholomorphen Transformation so komplexe Koordinaten $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ einführen lassen, daß V bezüglich der $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ ein Polyzylinder wird und überdies gilt: $z_0 = (0, \ldots, 0)$, $V \cap D = \{\hat{z} \in V, \hat{z}_1 = 0\}$. Schreiben wir $\omega(w; z)$ über $V \times (P^1 - p_\infty)$ als Polynom $\mu(w, \hat{z})$ in den neuen Koordinaten, so sind für $U := V \times (P^1 - p_\infty)$ und $\mu(w; \hat{z})$ die Forderungen von Definition 39 erfüllt. Mithin ist A auch in allen Punkten $(w_0, z_0) \in K - N \times P^1$ eine b-Menge, w.z.b.w.

Anmerkung: Da alle Verzweigungspunkte von $\mathfrak{P} = (P, \pi, B)$ über A liegen, so ist sogar $\mathfrak{P} \mid (G \times P^1) - A \cap (N \times P^1) = \left(\overset{-1}{\pi}(G \times P^1) - A \cap (N \times P^1), \pi, (G \times P^1) - A \cap (N \times P^1)\right)$ eine b-Überlagerung. Da $A \cap (N \times P^1)$ höchstens $(n-2)$-dimensional in $G \times P^1$ ist, ist also jede $(n+1)$-dimensionale a-Überlagerung $\mathfrak{P} = (P, \pi, B)$, $B = G \times P^1$, $G \subset C^n$, sogar außerhalb einer $(n-2)$-dimensionalen Menge eine b-Überlagerung.

5. Wir definieren in diesem Abschnitt c-Mengen und c-Überlagerungen. X sei wieder eine rein n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und M eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in X.

Definition 41 (c-Menge): M heißt eine c-Menge, wenn jede irreduzible Komponente von M und die Menge K der nichtgewöhnlichen Punkte von M nur aus gewöhnlichen Punkten besteht.

Definition 42 (c-Überlagerung): Eine analytische Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ heißt eine c-Überlagerung, wenn $\mathfrak{Y}$ höchstens über einer c-Menge $M \subset X$ verzweigt ist.

Wir beweisen den wichtigen

Satz 37: Es sei $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ irgendeine b-Überlagerung von X, die höchstens über der b-Menge $M \subset X$ verzweigt ist. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung $D = D(x)$, eine c-Überlagerung $\mathfrak{Y}^* = (Y^*, \eta^*, D^*)$ eines Gebietes $D^* \subset C^n$ und holomorphe Abbildungen $\hat{\alpha}: Y^* \to V := \overset{-1}{\eta}(D)$, $\alpha: D^* \to D$, so daß folgendes gilt:

1) *$\mathfrak{D} = (D^*, \alpha, D)$ ist eine algebroide Überlagerung von D; $\hat{\mathfrak{D}} = (Y^*, \hat{\alpha}, V)$ ist eine analytische Überlagerung von V.*

2) $b(\hat{\mathfrak{D}}) = b(\mathfrak{D})$, $b(\mathfrak{Y}^*) = b(\mathfrak{Y})$.

3) $\eta \circ \hat{\alpha} = \alpha \circ \eta^*$.

Anmerkung: Die Mengen D^*, Y^*, tragen zunächst zwei komplexe Strukturen. Die durch die Überlagerung $\mathfrak{D}$ in D^* definierte komplexe Struktur stimmt jedoch mit der komplexen Struktur des Gebietes $D^* \subset C^n$ überein, da α holomorph ist. Ebenso stimmen die in Y^* durch die Überlagerungen $\mathfrak{Y}^*$ und $\hat{\mathfrak{D}}$ definierten komplexen Strukturen überein, da $\alpha \circ \eta^* = \eta \circ \hat{\alpha}$ holomorph ist.

Beweis von Satz 37: Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es nach Voraussetzung eine Umgebung U mit lokalen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ und ein Pseudopolynom

$\mu(z_1; z_2, \ldots, z_n) = z_1^k + \sum_{\varkappa=0}^{k-1} A_\varkappa(z_2, \ldots, z_n) \cdot z_1^\varkappa$ mit in U holomorphen Koeffizienten, so daß gilt:

$$M \cap U = \{z \in U, \mu(z) = 0\}, \; M \cap \left\{z \in U, \frac{\partial}{\partial z_1}\mu(z) = 0, z_2 \neq 0\right\} = \text{leer}.$$

Wir dürfen $x = (0, \ldots, 0)$ annehmen. Dann gibt es, da $\mu(z_1; 0, \ldots, 0) \not\equiv 0$, einen in U enthaltenen Polyzylinder
$D := D_1 \times D_2$, $D_1 := \{z_1, |z_1| < \varepsilon_1\}$, $D_2 := \{(z_2, \ldots, z_n), |z_2| < \varepsilon_2, \ldots, |z_n| < \varepsilon_n\}$, so daß $M \cap (\partial D_1 \times D_2)$ leer ist. Die Koeffizienten $A_\varkappa$ von μ sind in D_2 holomorph, durch evtl. Abspalten eines Faktors von μ läßt sich noch erreichen, daß alle Nullstellen z_1 von μ für einen Punkt $(z_2, \ldots, z_n) \in D_2$ in D_1 liegen.

Wir betrachten nun im $C^n(z_1^*, \ldots, z_n^*)$ den Polyzylinder

$$D^* := D_1^* \times D_2^*, \; D_1^* := \{z_1^*, |z_1^*| < \varepsilon_1\}, \; D_2^* := \Big\{(z_2^*, \ldots, z_n^*), |z_2^*| < \sqrt[s]{\varepsilon_2},$$
$$|z_3^*| < \varepsilon_3, \ldots, |z_n^*| < \varepsilon_n\Big\},$$

wobei s eine noch zu bestimmende natürliche Zahl ist. Durch die Gleichungen

$$z_1 = z_1^*, \; z_2 = (z_2^*)^s, \; z_3 = z_3^*, \ldots, z_n = z_n^*$$

wird eine holomorphe Abbildung $\alpha: D^* \to D$ vermittelt. Offensichtlich ist das Tripel $\mathfrak{D} = (D^*, \alpha, D)$ eine analytische Überlagerung von D, die überdies als das Existenzgebiet der algebroiden Funktion $\sqrt[s]{z_2}$ eine algebroide Überlagerung ist.

Das Pseudopolynom $\mu^*(z_1^*; z_2^*, \ldots, z_n^*) = \mu(\alpha(z^*))$ zerfällt bei geeigneter Wahl von s über D_2^* in endlich viele Linearfaktoren $\mu_\varkappa^* = z_1^* - C_\varkappa(z_2^*, \ldots, z_n^*)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$; dies folgt, da die Menge $\left\{z, \mu(z) = 0, \frac{\partial}{\partial z_1}\mu(z) = 0\right\}$ in der Ebene $\{z_2 = 0\}$ enthalten ist, sofort aus dem weiter unten angeführten und bewiesenen Hilfssatz 6. Wir denken uns s in dieser Weise gewählt und setzen: $M_\varkappa^* := \{z^* \in D^*, \mu_\varkappa^*(z^*) = 0\}$, $\varkappa = 1, \ldots, k$. $M_\varkappa^*$ ist stets eine irreduzible analytische Menge in D^*, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht. Der Durchschnitt $M_{\varkappa_1}^* \cap M_{\varkappa_2}^*$ zweier solcher Mengen ist jeweils leer oder eine rein $(n-2)$-dimensionale singularitätenfreie analytische Menge in D^*; denn die Funktionen $\mu_\varkappa^*(z^*)$ haben höchstens auf der Ebene $\{z_2^* = 0\}$ gemeinsame Nullstellen. Daher ist $M^* := \{z^* \in D^*, \mu^*(z^*) = 0\}$ eine c-Menge in D^*.

Sei nun Y^* die Menge aller Paare (y, z^*), $y \in V := \overset{-1}{\eta}(D)$, $z^* \in \overset{-1}{\alpha}(\eta(y))$. Wir versehen Y^* mit der natürlichen Topologie und bezeichnen mit $\eta^*: Y^* \to D^*$ die Projektion $(y, z^*) \to z^*$ von Y^* auf D^*. Das Tripel $\mathfrak{Y}^* = (Y^*, \eta^*, D^*)$ ist dann offensichtlich eine analytische Überlagerung von D^*, die höchstens über M^* verzweigt und mithin eine c-Überlagerung ist. Bezeichnet weiter $\hat{\alpha}: Y^* \to V$ die ersichtlich holomorphe Projektion $(y, z^*) \to y$ von Y^* auf V, so ist auch $\hat{\mathfrak{D}} = (Y^*, \hat{\alpha}, V)$ eine analytische Überlagerung. Da $\eta \circ \hat{\alpha} = \alpha \circ \eta^*$ und $b(\hat{\mathfrak{D}}) = b(\mathfrak{D})$, $b(\mathfrak{Y}^*) = b(\mathfrak{Y})$, so ist Satz 37 bewiesen.

Wir formulieren und beweisen nun den benutzten

Hilfssatz 6: Es seien $\omega_\varrho(z_1; z_2, \ldots, z_n)$ *Pseudopolynome in* z_1 *mit im Polyzylinder* $D_2 := \{(z_2, \ldots, z_n), |z_2| < \varepsilon_2, \ldots, |z_n| < \varepsilon_n\}$ *holomorphen Koeffizienten,* $\varrho = 1, \ldots, r$. ω_ϱ *sei irreduzibel über* D_2 *und vom Grade* k_ϱ *in* z_1, $\varrho = 1, \ldots, r$; *für das Produkt* $\omega := \prod_{\varrho=1}^{r} \omega_\varrho$ *gelte:*

$$\left\{z, \omega(z) = 0, \frac{\partial \omega}{\partial z_1}(z) = 0\right\} \subset E := \{z, z_2 = 0\}.$$

Wird dann die natürliche Zahl s von allen Zahlen $k_1, \ldots, k_r$ *geteilt, so zerfällt das Pseudopolynom*

$$\omega^*(z_1^*; z_2^*, \ldots, z_n^*) = \omega(\alpha(z^*)),$$

wobei $\alpha: z^* \to z$ *die Abbildung* $z_1 = z_1^*$, $z_2 = (z_2^*)^s$, $z_3 = z_3^*, \ldots, z_n = z_n^*$ *ist, über dem Polyzylinder* $D_2^* := \{(z_2^*, \ldots, z_n^*), |z_2^*| < \sqrt[s]{\varepsilon_2}, |z_3^*| < \varepsilon_3, \ldots, |z_n^*| < \varepsilon_n\}$ *in Linearfaktoren.*

Beweis: Ist der Hilfssatz für ein s richtig, so auch für jedes ganze Vielfache desselben. Wir dürfen daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\omega(z)$ selbst als irreduzibel über D_2 voraussetzen und $s = k$ annehmen, wenn k der Grad von ω in z_1 ist. Es sei dann $Y' := \{z, \omega(z) = 0\}$ und $\eta: Y' \to D_2$ die Projektion $z \to (z_2, \ldots, z_n)$. Das Tripel $\mathfrak{Y}' = (Y' - \overset{-1}{\eta}(E), \eta, D_2 - E)$ ist eine s-blättrige unverzweigte Überlagerung von $D_2 - E$, die zusammenhängend ist, da ω irreduzibel ist. $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, D_2)$ sei die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $\mathfrak{Y}'$ zu einer analytischen Überlagerung von D_2. Die Funktion $z_1 = f(y) | Y$, die man durch holomorphe Fortsetzung der Funktion $z_1 | Y' - \overset{-1}{\eta}(E)$ erhält, genügt der Gleichung $\omega = 0$. Da $\mathfrak{Y}$ äquivalent zur Windungsüberlagerung $\mathfrak{W}$, ist (vgl. § 2), kann f als eindeutige Funktion $f\left(\sqrt[s]{z_2}, z_3, \ldots, z_n\right)$ aufgefaßt werden. Die Menge $\{z^* \in D_2^*, \omega^*(z^*) = 0\}$ ist daher die Vereinigungsmenge der Graphen der Funktionen $z_1^* = f(\varepsilon^\sigma z_2^*, z_3^*, \ldots, z_n^*)$, $\sigma = 1, \ldots, s$, wobei ε eine primitive s-te Einheitswurzel ist. Somit folgt:

$$\omega^*(z^*) = \prod_{\sigma=1}^{s} (z_1^* - f(\varepsilon^\sigma z_2^*, z_3^*, \ldots, z_n^*)),$$

w.z.b.w.

6. In § 14 werden wir zeigen, daß jede c-Überlagerung eine algebroide Überlagerung ist. Daraus folgt, daß auch jede b-Überlagerung algebroid ist, denn wir zeigen jetzt unter Benutzung des letzten Satzes:

Satz 38: Ist jede c-Überlagerung algebroid, so ist auch jede b-Überlagerung algebroid.

Beweis: Sei $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ eine b-Überlagerung, die höchstens über der b-Menge $M \subset X$ verzweigt ist. Es ist nur zu zeigen, daß jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung D besitzt, so daß $\mathfrak{Y} | D$ algebroid ist. D, $\mathfrak{Y}^* = (Y^*, \eta, D^*)$, $\mathfrak{D} = (D^*, \alpha, D)$, $\hat{\mathfrak{D}} = (Y^*, \hat{\alpha}, V)$ seien gemäß Satz 37 gewählt. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{Y}^*$ eine algebroide Überlagerung. Werden D und D^* hinreichend klein gewählt, so gilt sogar:

$$(I(Y^*) : I(D^*)) = b(\mathfrak{Y}^*), \quad (I(D^*) : I(D)) = b(\mathfrak{D}) \; (= s).$$

Aus der Gleichung

$$(I(Y^*):I(D)) = (I(Y^*):I(D^*))\cdot(I(D^*):I(D)) = (I(Y^*):I(V))\,(I(V):I(D))$$

folgt nun wegen $b(\mathfrak{Y}^*) = b(\mathfrak{Y})$ und $b(\hat{\mathfrak{D}}) = b(\mathfrak{D})$:

$$(I(Y^*):I(V))\cdot(I(V):I(D)) = b(\hat{\mathfrak{D}})\cdot b(\mathfrak{Y})\,.$$

Da sicher $(I(Y^*):I(V)) \leq b(\hat{\mathfrak{D}})$, $(I(V):I(D)) \leq b(\mathfrak{Y})$, so muß gelten: $(I(V):I(D)) = b(\mathfrak{Y})$. Mithin ist $\mathfrak{Y}\,|\,D$ eine algebroide Überlagerung, w.z.b.w.

Aus Satz 38 ergibt sich sofort, wenn man voraussetzt, daß jede c-Überlagerung algebroid ist:

Satz 39: Jede analytische Überlagerung einer rein 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit ist eine algebroide Überlagerung. Ist $\mathfrak{P} = (P, \pi, B)$, $B = G \times P^1$, $G \subset C^n$, eine a-Überlagerung, so gibt es eine $(n-2)$-dimensionale analytische Menge N in G, so daß $\mathfrak{P}\,|\,(G-N)\times P^1 = \left(\overset{-1}{\pi}((G-N)\times P^1), \pi, (G-N)\times P^1\right)$ eine algebroide Überlagerung ist.

§ 12. Bildgarben

1. Es sei X eine beliebige zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{S}$ eine kohärente analytische Garbe über X. Wir bezeichnen mit $r_x(\mathfrak{S})$ den Rang (die Dimension) des Moduls $\mathfrak{S}_x$ über $\mathcal{O}_x$, $x \in X$[30]).

Satz 40: $r_x(\mathfrak{S})$ ist von $x \in X$ unabhängig.

Beweis: Da $\mathfrak{S}$ kohärent ist, gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine zusammenhängende Umgebung $U(x_0)$, in der eine exakte Sequenz $\mathcal{O}^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\beta} \mathfrak{S} \to 0$ definiert werden kann. Offensichtlich gilt in jedem Punkte $x \in U$ die Gleichung $r_x(\mathfrak{S}) = q - r_x(\mathfrak{M})$, wobei $\mathfrak{M} \subset \mathcal{O}^q$ die Garbe $\alpha(\mathcal{O}^p)$ bezeichnet. Die Garbe $\mathfrak{M}$ hat aber in jedem Punkte $x \in U$ den gleichen Rang $r_x(\mathfrak{M})$: bezeichnen wir nämlich mit $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ die q-tupel holomorpher Funktionen, die vermöge α Bild der p-tupel $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots 0, 1)$ konstanter Funktionen sind, so wird jeder Halm von $\mathfrak{M}$ über U durch die Schnittflächen $f_1(x), \ldots, f_p(x)$ erzeugt, so daß $r_x(\mathfrak{M})$, $x \in U$, immer gleich dem Maximum des Ranges $rg(f_1(x), \ldots, f_p(x))$ der Matrix $(f_1(x), \ldots, f_p(x))$, $x \in U$, ist. Dadurch ist Satz 40 bewiesen.

Definition 43 (Rang): $r(\mathfrak{S}) := r_x(\mathfrak{S})$ heißt der Rang der Garbe $\mathfrak{S}$ über X.

Bei freien Garben ist $r(\mathfrak{S})$ gleich dem in § 5 definierten Rang.

2. Wir betrachten Untergarben der Garbe $\mathcal{O}^q$ der Keime von holomorphen Funktionen.

Definition 44 (Freie Untergarbe): Es sei X eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{S}$ eine Untergarbe von $\mathcal{O}^q$ über X. Dann heißt $\mathfrak{S}$ in einem Punkt $x_0 \in X$ eine freie Untergarbe von $\mathcal{O}^q$, wenn in einer Umgebung $U(x_0)$ die Garbe $\mathfrak{S}$ und die Quotientengarbe $\mathcal{O}^q/\mathfrak{S}$ freie Garben sind. $\mathfrak{S}$ heißt eine freie Untergarbe über X, wenn $\mathfrak{S}$ in jedem Punkte $x \in X$ eine freie Untergarbe ist.

---

[30]) Unter dem Rang von $\mathfrak{S}_x$ über $\mathcal{O}_x$ werde wie üblich die Maximalzahl linear unabhängiger Elemente verstanden.

Es folgt sofort:

Hilfssatz 7: Es sei $\mathfrak{S}$ eine kohärente Untergarbe der Garbe $\mathcal{O}^q$ über einer beliebigen rein n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X. Dann gibt es eine höchstens $(n-1)$-dimensionale analytische Menge $K \subset X$, so daß $\mathfrak{S}$ über $X - K$ eine freie Untergarbe von $\mathcal{O}^q$ ist.

Beweis: Ist $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt, so gibt es eine zusammenhängende Umgebung $U(x_0) \subset X$ und endlich viele q-tupel $f_1, \ldots, f_t$ in U holomorpher Funktionen, die über U jeden Halm der Garbe $\mathfrak{S}$ erzeugen. Es sei $r(\mathfrak{S}) = \sup rg(f_1(x), \ldots, f_t(x))$ der Rang von $\mathfrak{S}$. Bekanntlich ist $K(f) := \{x \in U, rg(f_1(x), \ldots, f_t(x)) < r(\mathfrak{S})\}$ eine höchstens $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in U, in $U - K(f)$ ist $\mathfrak{S}$ offensichtlich eine freie Untergarbe. Sind $f'_1, \ldots, f'_t$ weitere q-tupel von Funktionen, die in einer zusammenhängenden Umgebung $U'(x_0)$ holomorph sind und in U' jeden Halm der Garbe $\mathfrak{S}$ erzeugen, so gelten in der Nähe von x_0 Gleichungen: $f_\nu = \Sigma\, a'_{\nu\mu} f'_\mu$, $f'_\mu = \Sigma\, a_{\mu\nu} f_\nu$ mit in x_0 holomorphen Funktionen $a_{\mu\nu}, a'_{\nu\mu}$. Es gilt offensichtlich: $K(f) \cap V(x_0) = K(f') \cap V(x_0)$, wenn $V(x_0) \subset U \cap U'$ eine hinreichend kleine Umgebung von x_0 und $K(f')$ analog wie $K(f)$ definiert ist. Die q-tupel f'_ν definieren also in x_0 den gleichen analytischen Mengenkeim wie die q-tupel f_ν, $\nu = 1, \ldots, t$. Es ist also zu jedem Punkt $x \in X$ ein analytischer Mengenkeim K_x festgelegt. Die K_x definieren eine höchstens $(n-1)$-dimensionale analytische Menge $K \subset X$; in $X - K$ ist $\mathfrak{S}$ eine freie Untergarbe.

3. Es sei eine Folgerung aus Satz 27 angegeben:

Hilfssatz 8: Ist $\mathfrak{Y} = (Y, \varphi, D)$ eine algebroide Überlagerung eines Gebietes $D \subset C^n$ und $\mathfrak{S}$ eine kohärente analytische Garbe über Y, so ist $\varphi_0(\mathfrak{S})$ kohärent und es gilt $\varphi_\nu(\mathfrak{S}) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Beweis: Nach § 10 ist Y ein β-Raum, $\varphi: Y \to D$ eine eigentliche nirgends entartete holomorphe Abbildung. Also folgt unser Hilfssatz als Spezialfall von Satz 27.

4. Es sei fortan $\mathfrak{P} = (P, \pi, B)$ eine a-Überlagerung über einer komplexen Mannigfaltigkeit $B = G \times P^1$. Die Zusammensetzung der Projektion $\alpha: G \times P^1 \to G$ und $\pi: P \to B$ sei mit τ bezeichnet. Ist $\mathfrak{S}$ eine analytische Garbe über P, so gilt stets $\tau_0(\mathfrak{S}) = \alpha_0(\pi_0(\mathfrak{S}))$. Ist $\mathfrak{P}$ eine algebroide Überlagerung und $\mathfrak{S}$ eine kohärente Garbe, so hat man wegen $\pi_\nu(\mathfrak{S}) = 0$, $\nu > 0$, sogar: $\tau_\nu(\mathfrak{S}) = \alpha_\nu(\pi_0(\mathfrak{S}))$ (vgl. [19], § 2). Nach Satz I sind dann alle $\tau_\nu(\mathfrak{S})$ über G kohärent.

Das ausgezeichnete Geradenbündel F über $G \times P^1$ hat eine holomorphe Schnittfläche h, die genau $G \times p_\infty$ zur Nullstellenfläche 1. Ordnung hat. Wir „liften" F vermöge π nach P und erhalten über P ein komplex-analytisches Geradenbündel $\hat{F} := F \circ \pi$. h nach P geliftet wird zu einer holomorphen Schnittfläche $\hat{h}$ von $\hat{F}$, die genau auf den b n-dimensionalen Flächen $E^{(1)}, \ldots, E^{(b)}$ über $G \times p_\infty$ von 1. Ordnung verschwindet ($b = b(\mathfrak{P})$). Die Garbe der Keime von holomorphen Schnitten in F bzw. $\hat{F}$ sei mit $\mathfrak{F}$ bzw. $\hat{\mathfrak{F}}$ bezeichnet.

Es sei nun E_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ eine Folge von paarweise verschiedenen $(n-1)$-dimensionalen analytischen Mengen, die durch π topologisch auf

paarweise verschiedene Ebenen $G \times w_\nu$, $1 < |w_\nu| < \infty$ abgebildet werden. Es sei H das komplex-analytische Geradenbündel über P, das zu dem Divisor (E_0) gehört. H besitzt eine holomorphe Schnittfläche $\tilde{h}$, die genau auf E_0 in 1. Ordnung verschwindet. Wir betrachten die Tensorprodukte $H_{r,s} := H^r \otimes \hat{F}^s$, $r = 0, 1, 2, \ldots, s = 0, 1, 2, \ldots$ und bezeichnen mit $\mathfrak{H}_{r,s} := \mathfrak{H}^r \otimes \hat{\mathfrak{F}}^s$ die Garbe der Keime von holomorphen Schnitten in $H_{r,s}$[31]). Die globalen Schnittflächen in der Garbe $\mathfrak{H}_{r,s}$ deuten wir in der üblichen Weise als holomorphe Schnittflächen im Geradenbündel $H_{r,s}$. $H_{r,s}$ besitzt eine kanonische holomorphe Schnittfläche $h_{r,s} := \tilde{h}^r \otimes \hat{h}^s$, die auf E_0 von der Ordnung r, auf $E^{(\beta)}$, $\beta = 1, \ldots, b$, von der Ordnung s und sonst nirgends verschwindet.

5. Es gilt folgender

Hilfssatz 9: Es gibt über G einen Monomorphismus γ von $\tau_0(\mathfrak{H}_{r,s})$ in die freie Garbe $\mathcal{O}^q$ mit $q := r + b\,s + 1$.

Beweis: Es werden zunächst gewissen Schnittflächen in $\mathfrak{H}_{r,s}$ q-tupel holomorpher Funktionen zugeordnet. Ist U ein Teilbereich von G und h eine Schnittfläche in $\mathfrak{H}_{r,s}$ über $V := \overset{-1}{\tau}(U)$, so sei $\hat{\gamma}(h) := (f_1, \ldots, f_q)$. Dabei sind f_ν, $\nu = 1, \ldots, q$, in U holomorphe Funktionen, die wie folgt definiert sind: Der Quotient $\hat{f} := \frac{h}{h_{rs}}$ ist als Quotient zweier Schnittflächen in einem Geradenbündel eine meromorphe Funktion in V. Da h_{rs} auf keiner Fläche E_ν, $\nu \geqq 1$, verschwindet, ist $\hat{f}_\nu := \hat{f} \,|\, E_\nu$ in E_ν holomorph, $\nu \geqq 1$. Wir setzen nun $f_\nu := \hat{f}_\nu \circ \tau_\nu^{-1}$, wobei τ_ν die Beschränkung von τ auf E_ν bezeichnet; ersichtlich ist $\tau_\nu : E_\nu \to G$ biholomorph, $\nu \geqq 1$. Die Funktionen $f_1, \ldots, f_q$ sind also in U holomorph; es sei $\hat{\gamma}(h) = (f_1, \ldots, f_q)$.

$\hat{\gamma}$ ist ein Homomorphismus des kanonischen Garbendatums von $\tau_0(\mathfrak{H}_{r,s})$ in das kanonische Garbendatum von $\mathcal{O}^q$. Wir zeigen, daß $\hat{\gamma}$ injektiv ist. Ist nämlich $\hat{\gamma}(h) = 0$, so verschwindet die meromorphe Funktion $\hat{f} = h/h_{r,s}$ auf allen Flächen $\overset{-1}{\tau}(U) \cap E_\nu$, $\nu = 1, \ldots, q$. Andererseits aber hat $\hat{f}$ nur die Flächen E_0 und $\overset{-1}{\pi}(G \times p_\infty)$ zu Polstellenflächen von höchstens der Ordnung r bzw. s. Ist D die Diskriminantenmenge des zu $\mathfrak{P}$ gehörigen Pseudopolynoms $\omega(w; z)$[32]) und $z_0 \in G - D$, so gilt nach [16], Hilfssatz 3: $\mathfrak{P} \,|\, z_0 \times P^1 = (R, \pi, z_0 \times P^1)$ *mit* $R := \overset{-1}{\pi}(z_0 \times P^1)$ *ist eine zusammenhängende kompakte Riemannsche Fläche über* $z_0 \times P^1$. Wählen wir $z_0 \in U - D$, so ist $\hat{f}/R$ eine meromorphe Funktion, die Nullstellen mindestens der Ordnung q, aber Polstellen höchstens der Ordnung $r + bs < q$ hat. Das ist nur möglich, wenn $\hat{f} = 0$, d. h. $h = 0$.

Nun erzeugt jeder Monomorphismus zwischen kanonischen Garbendaten einen Monomorphismus der zugehörigen Garben. Also ist Hilfssatz 9 bewiesen.

---

[31]) Die Garbe $\mathfrak{H}_{r,s}$ ist offensichtlich kanonisch isomorph zum Tensorprodukt der Garben der Keime von holomorphen Schnitten in H^r und $\hat{F}^s$.

[32]) $\omega(w; z)$ ist gemäß § 11.2 zu bestimmen, D ist als Nullstellenmenge der holomorphen Diskriminante von ω eine analytische Menge in G.

6. Es sei nun $\mathfrak{S} := \gamma(\tau_0(\mathfrak{H}_{r,s}))$ und $N \subset G$ eine höchstens $(n-2)$-dimensionale analytische Menge, so daß $\mathfrak{P}|(G-N) \times P_1$ eine algebroide Überlagerung und mithin $\mathfrak{S}$ über $G-N$ kohärent ist.

Hilfssatz 10: Ist $p := r(\mathfrak{S})$ der Rang der Garbe $\mathfrak{S}$ über $G-N$, so gibt es einen Monomorphismus $\lambda : \mathfrak{S} \to \mathcal{O}^p$.

Beweis: Wir bezeichnen mit $s_z = (s_z^{(1)}, \ldots, s_z^{(q)})$ die Elemente der Garbe $\mathfrak{S}$ über den Punkten $z \in G$ und definieren λ als Abbildung $s_z \to s_z' := (s_z^{(1)}, \ldots, s_z^{(p)}) \in \mathcal{O}^p$, wobei die Indexreihenfolge noch bestimmt wird. Offenbar ist λ ein Garbenhomomorphismus. — Da $\mathfrak{S}$ über $G-N$ kohärent ist, gibt es nach Hilfssatz 7 eine höchstens $(n-1)$-dimensionale analytische Menge $K \subset G-N$, so daß $\mathfrak{S}$ über $G' := G-N-K$ eine freie Untergarbe von $\mathcal{O}^q$ ist. Liegt z in G', so lassen sich in z also q Keime $f_1, \ldots, f_q$ von q-tupeln holomorpher Funktionen finden, derart, daß die $f_1, \ldots, f_q$ den Halm der Garbe $\mathcal{O}^q$ und die $f_1, \ldots, f_p$ den Halm der Garbe $\mathfrak{S}$ über z erzeugen: Jedes Element $s_z \in \mathfrak{S}_z$ läßt sich eindeutig als Summe $s_z = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu f_\nu$ darstellen, wobei die a_ν Keime in z holomorpher Funktionen sind. Wir setzen $f_\nu = (f_\nu^{(1)}, \ldots, f_\nu^{(q)})$, $f_\nu' := (f_\nu^{(1)}, \ldots, f_\nu^{(p)})$. Da die Vektoren $f_1(z), \ldots, f_q(z)$ linear unabhängig sind, ist bei geeigneter q-tupel-Numerierung die Determinante $\|f_1', \ldots, f_p'\|$ um z nicht $\equiv 0$. In z ist die Abbildung $\lambda : s_z \to \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu f_\nu'$ mithin injektiv. Wählt man an Stelle der q-tupel $f_1, \ldots, f_q$ q andere q-tupel $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_r$ mit obigen Eigenschaften, so gilt in $z : \tilde{f}_\nu = \sum_{\mu=1}^{p} a_{\nu\mu} f_\mu$, $\nu = 1, \ldots, p$, also bei gleicher Numerierung: $\|\tilde{f}_1', \ldots, \tilde{f}_p'\| \not\equiv 0$ um z, wenn $\tilde{f}_\nu = (\tilde{f}_\nu^{(1)}, \ldots, \tilde{f}_\nu^{(q)})$ und $\tilde{f}_\nu' := (\tilde{f}_\nu^{(1)}, \ldots, \tilde{f}_\nu^{(p)})$ gesetzt wird.

Es sei nun die q-tupel-Numerierung der Elemente aus $\mathcal{O}^q$ so festgelegt, daß um einem festen Punkt $z_0 \in G'$ gilt: $\|f_1', \ldots, f_p'\| \not\equiv 0$. Da G' zusammenhängend ist, folgt dann, daß dieses für jeden Punkt $z \in G'$ gilt. Mithin ist λ über G' injektiv. Daraus ergibt sich, weil die $s_z \in \mathfrak{S}$ Keime von q-tupeln stetiger Funktionen sind und die Menge $G - G'$ nirgends dicht in G liegt, daß λ über ganz G ein Monomorphismus ist, q. e. d.

Nach § 12.2 muß $\lambda(\mathfrak{S})$ fast überall mit $\mathcal{O}^p$ übereinstimmen. Es ist also folgender Satz bewiesen:

Satz 41: Zu allen r, s gibt es eine natürliche Zahl $p = r(\tau_0(\mathfrak{H}_{r,s}))$ und einen Monomorphismus λ von $\tau_0(\mathfrak{H}_{r,s})$ auf eine analytische Untergarbe $\mathfrak{S} \subset \mathcal{O}^p$; es gibt eine nirgends dichte Menge $M \subset G$, so daß über $G-M$ gilt: $\mathfrak{S} = \mathcal{O}^p$.

§ 13. Der Beweis des Hauptresultates

1. Wir beweisen nun das Hauptresultat unserer Arbeit, daß jede analytische Überlagerung über einem Gebiet $G \subset C^n$ algebroid ist.

Wegen Satz 34 brauchen wir nur zu zeigen

Satz 42: Jede a-Überlagerung $\mathfrak{P} = (P, \pi, G \times P^1)$ ist eine algebroide Überlagerung.

2. Es sei fortan immer $\lambda = \lambda_{r,s}$ ein Isomorphismus von $\tau_0(\mathfrak{H}_{r,s})$ auf eine Untergarbe $\mathfrak{S}$ von $\mathcal{O}^p$ gemäß Satz 41; es gelte $p = p(r,s) = r(\tau_0(\mathfrak{H}_{r,s}))$ in $G - N$, dabei sei N gemäß Satz 36 gewählt. Wir zeigen zunächst:

Hilfssatz 11: Ist $\mathfrak{P}' = (P', \pi', G' \times P^1)$ eine a-Überlagerung, die zugleich eine algebroide Überlagerung ist, so gibt es zu jeder Schnittfläche f in $\mathcal{O}^p$ genau eine meromorphe Schnittfläche $\hat{f} = (\lambda \circ \tau_0)^{-1}(f)$ in $H_{r,s}$, so daß folgendes gilt:

1) *Die Polstellenmenge S von $\hat{f}$ ist bezüglich τ saturiert, d. h. es ist $\overset{-1}{\tau}(\tau(S)) = S$.*

2) *$\hat{f} \mid P' - S$ wird vermöge $\lambda \circ \tau_0$ auf $f \mid G' - \tau(S)$ abgebildet.*

Beweis: Da die Zuordnung der Schnittflächen aus $H^0(\overset{-1}{\tau}(U), \mathfrak{H}_{r,s})$ und $H^0(U, \mathfrak{S})$ für alle offenen Mengen $U \subset G'$ eineindeutig ist, folgt zunächst, daß $\hat{f}$ eindeutig bestimmt ist. Wir zeigen die Existenz.

$\mathfrak{S}$ ist wie $\tau_0(\mathfrak{H}_{r,s})$ kohärent. Es gibt daher zu jedem Punkt $z_0 \in G'$ eine Umgebung $U(z_0)$ und endlich viele p-tupel $f_1, \ldots, f_t$ in U holomorpher Funktionen, die über U jeden Halm von $\mathfrak{S}$ erzeugen, $t \geq p$. Bei richtiger Numerierung sind die Vektoren $f_1(z), \ldots, f_p(z)$ fast überall in U linear unabhängig, es ist also die Determinante $\Delta = \|f_1(z), \ldots, f_p(z)\| \not\equiv 0$. Zu den Funktionen $f_\nu(z)$ gehören nach Konstruktion von $\mathfrak{S}$ holomorphe Schnittflächen s_ν in $H_{r,s}$ über $\overset{-1}{\tau}(U)$, die durch $\lambda \circ \tau_0$ auf f_ν abgebildet werden. Ist f ein beliebiges p-tupel in G' holomorpher Funktionen, so gilt, da $\Delta \not\equiv 0$: $f = \sum_{\mu=1}^{p} a_\mu f_\mu$ mit in U meromorphen Funktionen a_μ. $\hat{f} := \sum_{\mu=1}^{p} (a_\mu \circ \tau)\, s_\mu$ hat dann in bezug auf U, $\overset{-1}{\tau}(U)$ die in Hilfssatz 11 verlangten Eigenschaften. Da $\hat{f}$ von der Wahl der $f_1, \ldots, f_p$ unabhängig ist, so kann man diese Konstruktion für jedes $z_0 \in G'$ durchführen und erhält so die Schnittfläche $\hat{f}$ über ganz P' mit den verlangten Eigenschaften.

Korollar: Hilfssatz 11 gilt für jede a-Überlagerung $\mathfrak{P} = (P, \pi, G \times P^1)$.

Beweis: Es sei wieder $N \subset G$ eine höchstens $(n-2)$-dimensionale analytische Menge, so daß $\mathfrak{P} \mid (G - N) \times P^1$ eine algebroide Überlagerung ist. Ist dann f ein p-tupel holomorpher Funktionen in G und $f' := f \mid G - N$ die Beschränkung von f auf $G - N$, so ist $\hat{f}' := (\lambda \circ \tau_0)^{-1}(f')$ nach Hilfssatz 11 eine meromorphe Schnittfläche über $\overset{-1}{\tau}(G - N)$, deren Polstellenmenge S' bezüglich τ saturiert ist. Nach dem Fortsetzungslemma [§ 3, b)] läßt sich die meromorphe Funktion $\frac{\hat{f}'}{h_{r,s}}$ zu einer meromorphen Funktion g über ganz P fortsetzen. $\hat{f} := g \cdot h_{r,s}$ ist eine meromorphe Fortsetzung von $\hat{f}'$. Da die Polstellenmenge S von $\hat{f}$ die abgeschlossene Hülle der Polstellenmenge S' ist, so folgt, daß auch S bezüglich τ saturiert ist. Ebenso hat $\hat{f}$ die Eigenschaft 2) von Hilfssatz 11. Es gilt also Hilfssatz 11 für beliebige a-Überlagerungen, w.z.b.w.— Offenbar ist $(\lambda \circ \tau_0)^{-1}$ ein injektiver Homomorphismus des $I(G)$-Moduls $H^0(G, \mathcal{O}^p)$ in den $I(G)$-Modul der meromorphen Schnittflächen in $H_{r,s}$.

Wir zeigen nun:

Satz 43: Ist G ein Holomorphiegebiet, so gilt: $\dim_{I(G)} H^0(P, \mathfrak{H}_{r,s}) = p(r,s)$.

Beweis: Es werde gesetzt: $f_1 := (1, 0, \ldots, 0)$, $f_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, f_p := (0, \ldots, 0, 1)$ und $\mathfrak{f}_\nu := (\lambda \circ \tau_0)^{-1} (f_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, p$. Es bezeichne S die Vereinigung der Polstellenmengen der $\mathfrak{f}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, p$. Da S bezüglich τ saturiert ist, muß $Q := \tau(S) = \tau(S \cap E_0)$ eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in G sein, die — da G Holomorphiegebiet ist — in dem Nullstellengebilde einer in G holomorphen Funktion $g \not\equiv 0$ enthalten ist. Verschwindet g auf den irreduziblen Komponenten von Q hinreichend stark — was man stets erreichen kann —, so ist $(g \circ \tau) \cdot \mathfrak{f}_\nu =: \tilde{\mathfrak{f}}_\nu$ eine holomorphe Schnittfläche in $H_{r,s}, \nu = 1, \ldots, p$. Da die f_ν über $I(G)$ unabhängig sind und $(\lambda \circ \tau_0)^{-1}$ eine Injektion ist, sind auch die Schnittflächen $\mathfrak{f}_\nu$ und mithin $\tilde{\mathfrak{f}}_\nu$ über $I(G)$ unabhängig. Also ist $\dim_{I(G)} H^0(P, \mathfrak{H}_{r,s}) \geqq p(r, s)$; da $\mathfrak{S}$ eine Untergarbe von $\mathcal{O}^p$ ist, gilt andererseits: $\dim_{I(G)} H^0(P, \mathfrak{H}_{r,s}) = \dim_{I(G)} H^0(G, \mathfrak{S}) \leqq p(r, s)$. Somit ist $\dim_{I(G)} H^0(P, \mathfrak{H}_{r,s}) = p(r, s)$, q. e. d.

3. Es seien in diesem Abschnitt die Garben $\mathfrak{H}(k) := \mathfrak{H}_{1,k}$ und $\hat{\mathfrak{F}}^k$ untersucht. Durch die Zuordnung $f_x \to h_{1,0} \otimes f_x$, wo $h_{1,0} = \tilde{h}$, erhält man einen Monomorphismus $\delta: \hat{\mathfrak{F}}^k \to \mathfrak{H}(k)$. δ ist auf $P - E_0$ ein Isomorphismus. Wir bezeichnen mit Q die Beschränkung von $H(k) := H_{1,k}$ auf E_0 und erhalten die exakte Sequenz:

$$0 \to \hat{\mathfrak{F}}^k \xrightarrow{\delta} \mathfrak{H}(k) \to \mathfrak{Q} \to 0\,, \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{Q}$ die triviale Fortsetzung der Garbe der lokalen holomorphen Schnitte in Q bezeichnet. Wie man leicht sieht, ist das Bündel Q analytisch trivial, so daß $\mathfrak{Q}$ also die triviale Fortsetzung der Garbe $\mathcal{O}^1(E_0)$ ist. Man hat deshalb nach § 5, e) die folgende exakte Sequenz der Bilder:

$$0 \to \tau_0(\hat{\mathfrak{F}}^k) \to \tau_0(\mathfrak{H}(k)) \to \mathcal{O}^1 \to \tau_1(\hat{\mathfrak{F}}^k) \to \cdots \tag{2}$$

Wir behaupten nun:

Hilfssatz 12: Ist $\mathfrak{P} = (P, \pi, G \times P^1)$ *algebroid, so gilt:*

$$\tau_1(\hat{\mathfrak{F}}^k) = \alpha_1(\pi_0(\mathcal{O}(P)) \otimes \mathfrak{F}^k)\,,$$

wenn $\alpha: G \times P^1 \to G$.

Beweis: Nach § 12, 4. gilt: $\tau_1(\hat{\mathfrak{F}}^k) = \alpha_1(\pi_0(\hat{\mathfrak{F}}^k))$. Es ist also nur die Gleichung $\pi_0(\hat{\mathfrak{F}}^k) = \pi_0(\mathcal{O}^1(P)) \otimes \mathfrak{F}^k$ zu verifizieren. Es sei $p \in G \times P^1$ ein beliebiger Punkt und s_p ein beliebiges Element des Halmes der Garbe $\pi_0(\hat{\mathfrak{F}}^k)$ über p. Wir können s_p als einen Keim einer holomorphen Schnittfläche in $\hat{F}^k$ über der endlichen Menge $\overset{-1}{\pi}(p)$ ansehen. s_p wird deshalb durch ein Tensorprodukt $f_p \otimes \hat{g}_p$ gegeben, wobei f_p ein Keim einer holomorphen Funktion in $\overset{-1}{\pi}(p)$ ist und $\hat{g}_p$ über $\overset{-1}{\pi}(p)$ einen Keim einer holomorphen Schnittfläche in $\hat{F}^k$ bezeichnet, der durch „Liften" eines über p definierten Keims g_p einer holomorphen Schnittfläche in F^k entstanden ist (man beachte, daß man $\hat{F}^k$ durch Liften von F^k erhält). Ordnen wir nun s_p das Produkt $f_p \otimes g_p \in (\pi_0(\mathcal{O}^1(P)) \otimes \mathfrak{F}^k)_p$ zu, so erhalten wir einen natürlichen Isomorphismus $\pi_0(\hat{\mathfrak{F}}^k) \approx \pi_0(\mathcal{O}^1(P)) \otimes \mathfrak{F}^k$, q.e.d.

Nach Satz II gibt es zu jedem relativ kompakten Teilbereich $B \subset G - N$ eine natürliche Zahl k_0, so daß über B gilt: $\alpha_1\big(\pi_0(\mathcal{O}^1(P)) \otimes \mathfrak{F}^k\big) = 0$, falls

$k \geq k_0$. Nach Hilfssatz 12 ist dann in B auch $\tau_1(\hat{\mathfrak{F}}^k) = 0$, $k \geq k_0$, und man hat dort die exakte Sequenz:

$$0 \to \tau_0(\hat{\mathfrak{F}}^{k_0}) \to \tau_0(\mathfrak{H}(k_0)) \to \mathcal{O}^1 \to 0\,. \tag{3}$$

Ist $0 \to \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'' \to 0$ eine beliebige exakte Sequenz von kohärenten analytischen Garben, so gilt stets $r(\mathfrak{S}) = r(\mathfrak{S}') + r(\mathfrak{S}'')$. In unserem Falle folgt für B und mithin für $G - N$:

$$r\big(\tau_0(\mathfrak{H}(k_0))\big) = r(\tau_0(\hat{\mathfrak{F}}^{k_0})) + 1\,.$$

4. Da unser Problem lokaler Natur ist und es beliebig kleine Holomorphiegebiete gibt, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß G ein Holomorphiegebiet ist. Aus Satz 43 folgt also:

$$\dim_{I(G)} H^0(P, \hat{\mathfrak{F}}^{k_0}) + 1 = \dim_{I(G)} H^0(P, \mathfrak{H}(k_0))\,,$$

d. h. es gibt eine holomorphe Schnittfläche s in $H(k_0)$, die in (1) nicht δ-Urbild einer holomorphen Schnittfläche in $\hat{\mathfrak{F}}^{k_0}$ ist: $\delta^{-1}(s)$ ist daher eine meromorphe Schnittfläche in $\hat{F}^{k_0}$, die genau E_0 zur Polstellenfläche 1. Ordnung hat. $g := \frac{s}{h_{1,k_0}} = \frac{\delta^{-1}(s)}{h_{0,k_0}}$ muß mithin eine in P meromorphe Funktion sein, die auf E_0 und evtl. auf der Fläche $E^{(k_0)}$ Polstellen hat. Ist nun P zusammenhängend, so folgt:

Hilfssatz 13: Ist $p \in G \times P^1 - A$, wo $A := \{\omega(w; z) = 0\}$ eine kritische Menge der Überlagerung $\mathfrak{P}$ ist, so hat g in den b verschiedenen Punkten $p_1, \ldots, p_b$ von $\overset{-1}{\pi}(p)$ b verschiedene Funktionselemente, d. h. sind $V_\beta(p_\beta)$ Umgebungen, die durch π biholomorph auf eine Umgebung $U(p)$ abgebildet werden, und bezeichnet π_β^{-1} die Umkehrabbildung von $\pi: V_\beta \to U$, so erzeugen die Funktionen $g_\beta := g \circ \pi_\beta^{-1}$ in p paarweise verschiedene Funktionskeime, $\beta = 1, \ldots, b$.

Beweis: Angenommen, die Aussage wäre für den Punkt p falsch. Bei geeigneter Numerierung hat dann g in p_1 und p_2 gleiche Funktionskeime. Wir verbinden p_1 in $P - \overset{-1}{\pi}(A)$ durch eine Kurve $c(t)$, $0 \leq t \leq 1$, mit einem Punkt $\tilde{p} \in E_0$ (d. h. $c(0) = p_1$, $c(1) = \tilde{p}$). Es gibt dann in $P - \overset{-1}{\pi}(A)$ eine Kurve $c^*(t)$, so daß gilt: $c^*(0) = p_2$, $\pi \circ c(t) = \pi \circ c^*(t)$, $0 \leq t \leq 1$ (covering homotopy theorem). Es muß notwendig gelten: $c^*(t) \neq c(t)$ für alle t. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen müssen jedoch die Funktionselemente von g in $c(t)$ und $c^*(t)$ stets gleich sein. Also hätte g auch in $c^*(1) \notin E_0 \cup \bigcup_\nu E^{(\nu)}$ einen Pol im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ist $U \subset G \times P^r$ eine offene Menge und g' die Beschränkung von g auf $\overset{-1}{\pi}(U)$, so gilt wegen Hilfssatz 13 stets: $(g' : I(U)) = b$. Da g in $\overset{-1}{\pi}(B_1)$, $B_1 := G \times \times \{w, |w| < 1\}$, holomorph ist, folgt somit, daß $\mathfrak{P}$ über B_1 eine algebroide Überlagerung ist. Über $\overline{B}_2 := G \times P^1 - B_1$ ist jedoch $\mathfrak{P}$ unverzweigt und mithin erst recht algebroid. Also ist jede zusammenhängende und wegen Satz 35 auch jede beliebige a-Überlagerung algebroid und Satz 42 bewiesen. Wegen Satz 34 ist sogar gezeigt, daß jede analytische Überlagerung über einem Gebiete des C^n algebroid ist. Unser Hauptresultat ist damit bewiesen.

§ 14. Der Hopfsche σ-Prozeß und c-Überlagerungen

1. In diesem Paragraphen soll bewiesen werden, daß jede c-Überlagerung algebroid ist. Der Beweis stützt sich wesentlich auf die Tatsache, daß man „einfache Singularitäten" analytischer Mengen durch Modifikationen auflösen kann. Wir verwenden ausschließlich den verallgemeinerten Hopfschen σ-Prozeß[33]).

Es sei X stets eine rein n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $K \subset X$ eine rein $(n-k)$-dimensionale analytische Menge in X, die nur aus gewöhnlichen Punkten besteht, $2 \leqq k \leqq n$. Durch Anwendung des σ-Prozesses in K läßt sich dann eine komplexe Mannigfaltigkeit $'X$ gewinnen, die durch eine natürliche eigentliche holomorphe Projektion π: $'X \to X$ auf X abgebildet ist und durch folgende Eigenschaften charakterisiert werden kann:

1) $\pi \,|\, 'X - 'K$, *wo* $'K := \overset{-1}{\pi}(K)$, *ist eine biholomorphe Abbildung von* $'X - 'K$ *auf* $X - K$.

2) *Zu jedem Punkt* $x_0 \in K$ *gibt es eine Umgebung* U *mit holomorphen Koordinaten* $z_1, \ldots, z_n$, *so daß gilt:*

a) $U \cap K = \{z \in U,\ z_1 = \cdots = z_k = 0\}$,

b) *Es gibt eine biholomorphe Abbildung* ψ *von* $\overset{-1}{\pi}(U)$ *auf die in* $U \times P^{k-1}$ *(singularitätenfreie) analytische Menge* $\sigma(U) := \{(z, u_1, \ldots, u_k) \in U \times P^{k-1},$ $z_\varkappa u_\lambda - z_\lambda u_\varkappa = 0,\ \varkappa, \lambda = 1, \ldots, k\}$ *mit* $\tau \circ \psi = \pi$; *dabei sind* $u_1, \ldots, u_k$ *homogene Koordinaten in* P^{k-1}, *mit* τ *wird die Produktprojektion* $U \times P^{k-1} \to U$ *bezeichnet.*

Man sieht unmittelbar, daß $\overset{-1}{\pi}(x)$, $x \in K$, stets ein $(k-1)$-dimensionaler komplex-projektiver Raum ist; daher ist $'K$ ein komplex-analytisches Faserbündel über K mit dem P^{k-1} als Faser.

Es gilt nun:

Satz 44: Ist $\mathfrak{S}$ *eine kohärente analytische Garbe über* $'X$, *so sind die Bilder* $\pi_\nu(\mathfrak{S})$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ *kohärente analytische Garben über* X.

Beweis: Da $\pi : 'X - 'K \to X - K$ biholomorph abbildet, ist $\pi_0(\mathfrak{S}('X - 'K))$ kohärent, und es gilt: $\pi_\nu(\mathfrak{S}('X - 'K)) = 0$ für $\nu \geqq 1$. Sei nun $x_0 \in K$ irgendein Punkt. Wir wählen gemäß 2) eine Umgebung U von x_0 und übertragen $\mathfrak{S}(\overset{-1}{\pi}(U))$ vermöge der biholomorphen Abbildung ψ nach $\sigma(U)$; dadurch erhalten wir die kohärente analytische Garbe $\hat{\mathfrak{S}} := \psi_0(\mathfrak{S})$ über $\sigma(U)$. Offensichtlich gilt: $\tau_\nu(\hat{\mathfrak{S}}) = \pi_\nu(\mathfrak{S})$ für alle $\nu \geqq 0$. Setzt man $\hat{\mathfrak{S}}$ trivial zu einer kohärenten analytischen Garbe $\hat{\mathfrak{S}}'$ über ganz $U \times P^{k-1}$ fort, so folgt: $\pi_\nu(\mathfrak{S}) = \tau_\nu(\hat{\mathfrak{S}}')$ für alle $\nu \geqq 0$. Nach Satz I ist aber $\tau_\nu(\hat{\mathfrak{S}}')$ stets kohärent über U. Da $x_0 \in K$ beliebig gewählt wurde, ist somit bewiesen, daß alle π-Bilder von $\mathfrak{S}$ kohärent über X sind, w.z.b.w.

In der komplexen Mannigfaltigkeit $'X$, die durch einen σ-Prozeß aus der komplexen Mannigfaltigkeit X erzeugt ist, kann man wiederum auf eine mindestens 2-codimensionale analytische Menge den σ-Prozeß anwenden. Man

[33]) Derselbe ist in der algebraischen Geometrie unter dem Namen „monoidale Transformation" bekannt; vgl. hierzu etwa [21].

erhält dann eine komplexe Mannigfaltigkeit $''X$, auf die man wieder den σ-Prozeß anwenden kann usw. Hat man durch q-malige Anwendung des σ-Prozesses die komplexe Mannigfaltigkeit ${}^{(q)}X$ erhalten, so sagt man, daß ${}^{(q)}X$ durch einen q-fach iterierten σ-Prozeß aus X entsteht. Bezeichnet man die Projektion ${}^{(\nu)}X \to {}^{(\nu-1)}X$ mit $\pi^{(\nu)}$, $\nu = 1, \ldots, q$, und setzt man: $\pi := \pi^{(1)} \circ \pi^{(2)} \circ \cdots \circ \pi^{(q)}$, so folgt unmittelbar aus Satz 44:

Satz 45: Ist $\mathfrak{S}$ eine kohärente analytische Garbe über ${}^{(q)}X$, so ist das Bild $\pi_0(\mathfrak{S})$ eine kohärente analytische Garbe über X.

2. Es sei nun $M \subset X$ irgendeine c-Menge. N bezeichne die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von M. Ist N nicht leer, so ist N eine rein $(n-2)$-dimensionale analytische Menge in X. Wir beweisen zunächst:

Satz 46: Ist $'X$ durch Anwendung des σ-Prozesses in N aus X entstanden, so ist auch $'M := \overset{-1}{\pi}(M)$ eine c-Menge (π bezeichnet die natürliche Projektion $'X \to X$).

Beweis: Es sei $N \neq 0$, es seien M_ν bzw. N_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die irreduziblen Komponenten von M bzw. N. Zu jedem M_ν gibt es eine irreduzible $(n-1)$-dimensionale Komponente $'M_\nu$ von $'M$, die vermöge π eineindeutig auf M_ν abgebildet wird. Jede Menge $'N_\nu := \overset{-1}{\pi}(N_\nu)$ ist irreduzibel und besteht nur aus gewöhnlichen Punkten: zwei Mengen $'N_\nu$, $'N_\mu$, $\nu \neq \mu$, sind disjunkt. Es gilt: $'M = \bigcup\limits_\nu {'M_\nu} \cup {'N}$, $'N := \bigcup\limits_\nu {'N_\nu} = \overset{-1}{\pi}(N)$. Da alle Punkte von M_ν gewöhnlich sind, ist auch $'M_\nu$ singularitätenfrei.

Man verifiziert alle diese Aussagen leicht, indem man zu jedem Punkt $x_0 \in N$ eine Umgebung $U(x_0)$ mit in U holomorphen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ so wählt, daß gilt:

$$x_0 = (0, \ldots, 0)\,, \quad U \cap N = \{z \in U, z_1 = z_2 = 0\},$$
$$U \cap M = \left\{z \in U, \prod_{\sigma=1}^{s} (z_1 - f_\sigma(z_2, \ldots, z_n) = 0)\right\};$$

dabei sind $f_1, \ldots, f_s$ in U holomorphe Funktionen in $z_2, \ldots, z_n$ mit $f_\sigma(0, z_3, \ldots, z_n) \equiv 0$, $\sigma = 1, \ldots, s$. Offensichtlich kann man stets Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ mit diesen Eigenschaften finden. Bei geeigneter Numerierung gilt:

$$M_\sigma \cap U = \{z \in U, z_1 = f_\sigma(z_2, \ldots, z_n)\}\,, \quad \sigma = 1, \ldots, s\,.$$

Wählt man nun eine inhomogene Koordinate w in P^1, so kann $\overset{-1}{\pi}(U)$ mit der in $U \times P^1$ analytischen Menge $\sigma(U) = \{(w, z), z \in U, z_2 \cdot w - z_1 = 0\}$ identifiziert werden. Alsdann gilt:

$$'M_\sigma \cap \overset{-1}{\pi}(U) = \{(w, z), z \in U, w = g_\sigma(z_2, \ldots, z_n), z_1 = f_\sigma(z_2, \ldots, z_n)\}\,,$$

wo $g_\sigma(z_2, \ldots, z_n) := \overset{-1}{z}_2 \cdot f_\sigma(z_2, \ldots, z_n)$ in $z_2, \ldots, z_n$ holomorph ist. Da $(w, z_2, \ldots, z_n)$ (bzw. $(w^{-1}, z_2, \ldots, z_n)$) holomorphe Koordinaten auf $\sigma(U)$ sind, sieht man sofort, daß $'M_\sigma$ in $\overset{-1}{\pi}(U)$ singularitätenfrei liegt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Menge $\bar{K}$ der nichtgewöhnlichen Punkte von $'M$ nur aus gewöhnlichen Punkten besteht. Es gilt:

$$\bar{K} = \left(\bigcup_\nu 'M_\nu\right) \cap 'N = \bigcup_\nu ('M_\nu \cap 'N).$$

Da $'N \cap \overset{-1}{\pi}(U) = (N \cap U) \times P^1$, so folgt:

$$\bar{K} \cap \overset{-1}{\pi}(U) = \bigcup_{\sigma=1}^{s} K_\sigma, \text{ wo } K_\sigma := \bigcup_{\sigma=1}^{s} \{(w, z_2, \ldots, z_n),\ z_2 = 0,\ w = g_\sigma(0, z_3, \ldots, z_n)\}.$$

Jede Menge K_σ besteht offensichtlich nur aus gewöhnlichen Punkten. Zwei Mengen $K_{\sigma_1}, K_{\sigma_2}$ sind aber stets identisch oder punktfremd; denn jede der in $(N \cap U) \times P^1$ enthaltenen Schnittmengen $'M_{\sigma_1} \cap 'M_{\sigma_2} \cap \overset{-1}{\pi}(U)$ ist leer oder rein $(n-2)$-dimensional, so daß auf $N \cap U$ in der Umgebung eines jeden Punktes gilt:

$$g_{\sigma_1}(0, z_3, \ldots, z_n) = g_{\sigma_2}(0, z_3, \ldots, z_n) \text{ oder } g_{\sigma_1}(0, z_3, \ldots, z_n) \neq g_{\sigma_2}(0, z_3, \ldots, z_n)$$

für alle zulässigen $z_3, \ldots, z_n$. Also besteht $\bar{K} \cap \overset{-1}{\pi}(U)$ nur aus gewöhnlichen Punkten. Mithin ist $'M$ eine c-Menge, w.z.b.w.

3. Es seien M_1, M_2 zwei 1-codimensionale gewöhnliche analytische Mengenkeime in einem Punkt $x_0 \in X$. Es gibt dann einen holomorphen Funktionskeim f_ν in x_0, so daß $df_\nu(x_0) \neq 0$ und M_ν durch die Gleichung $\{f_\nu(x) = 0\}$ definiert wird, $\nu = 1, 2$. Die Funktionskeime $f_1 | M_2$ bzw. $f_2 | M_1$ sind beide holomorph in $x_0 \in M_2$ bzw. $x_0 \in M_1$ und verschwinden dort. Ist s_1 bzw. s_2 die Ordnung der Nullstelle von $f_1 | M_2$ bzw. $f_2 | M_1$ in x_0, so zeigt eine leichte Rechnung, daß gilt: $s_1 = s_2$. Die Zahl

$$s(M_1, M_2, x_0) = s_1 = s_2$$

ist ersichtlich invariant (unabhängig von der Wahl der Funktionskeime f_1, f_2) definiert; wir nennen sie die Schnittzahl von M_1 und M_2 in x_0.

Es sei nun auf die Bezeichnungsweise von Satz 46 zurückgegriffen. Da M als c-Menge in jedem Punkt $x_0 \in M$ nur gewöhnliche analytische Mengenkeime erzeugt, und zwar genauso viele wie es irreduzible Komponenten M_ν von M durch x_0 gibt, so ist die Zahl

$$s(x_0, M) = (\underset{x_0 \in M_\nu}{\text{Anzahl}}\, M_\nu - 1) \cdot (\max_{\nu \neq \mu} s(M_\nu, M_\mu, x_0))^2$$

wohldefiniert, wenn man setzt $s(M_\nu, M_\mu, x_0) = 0$, falls $x_0 \notin M_\nu$ bzw. $x_0 \notin M_\mu$. Nun gilt $'M_\sigma \cap \overset{-1}{\pi}(U) = \{(w, z_2, \ldots, z_n),\ w = \overset{-1}{z}_2 \cdot f_\sigma(z_2, \ldots, z_n)\}$, falls $M_\sigma \cap U = \{(z_1, \ldots, z_n),\ z_1 = f_\sigma(z_2, \ldots, z_n)\}$. Daraus folgt unmittelbar für jeden Punkt $'x_0 \in \overset{-1}{\pi}(x_0) \subset 'M$:

$$s('M_\nu, 'M_\mu, 'x_0) < s(M_\nu, M_\mu, x_0), \quad \text{wenn} \quad s(M_\nu, M_\mu, x_0) \neq 0.$$

Da überdies für alle $'x_0 \in 'M \cap \overset{-1}{\pi}(U \cap N)$ gilt: $s(\overset{-1}{\pi}(U \cap N), 'M_\nu, 'x_0) = 1$, so haben wir das

Korollar zu Satz 46: Ist $x_0 \in M$ ein beliebiger Punkt und $'x_0 \in \overset{-1}{\pi}(x_0) \subset 'M$ irgendwie gewählt, so gilt stets: $s('x_0, 'M) < \max(2, s(x_0, M))$.

Es werde nun definiert:

Definition 44 (Primitive c-Menge): Eine c-Menge M in einer komplexen Mannigfaltigkeit X heißt primitiv, wenn für alle Punkte $x \in M$ gilt: $s(x, M) \leq 1$.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich unmittelbar:

Satz 47: Ist M eine c-Menge in einer komplexen Mannigfaltigkeit X und gilt: $\sup_{x \in M} s(x, M) < \infty$, so läßt sich X durch einen iterierten σ-Prozeß in eine komplexe Mannigfaltigkeit $'X$ überführen, so daß $'M := \overset{-1}{\pi}(M)$ eine primitive c-Menge ist (π bezeichnet die natürliche Projektion $'X \to X$).

Primitive c-Mengen können in einfacher Weise charakterisiert werden. Wir zeigen:

Satz 48: Eine c-Menge M in X ist genau dann primitiv, wenn es zu jedem nichtgewöhnlichen Punkt $x_0 \in M$ eine Umgebung $U(x_0)$ mit holomorphen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ gibt, so daß: $M \cap U = \{z \in U, z_1 z_2 = 0\}$.

Beweis: Es sei N die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von M; nach Definition gilt $s(x, M) = 0$ für alle $x \notin N$. Sei also $x \in N$. Ist dann die Bedingung des Satzes erfüllt, so gibt es eine Umgebung $U(x)$ mit holomorphen Koordinaten, so daß $U \cap M = \{z \in U, z_1 z_2 = 0\}$. Dann gilt aber $s(x, M) = 1$, so daß M primitiv ist.

Sei umgekehrt M eine primitive c-Menge. Nur im Fall, daß N nicht leer ist, ist etwas zu beweisen. In jedem Punkt $x \in N$ schneiden sich mindestens zwei Komponenten von M. Daher gilt $s(x, M) \geq 1$ und also sogar $s(x, M) = 1$. Mithin müssen sich genau zwei Komponenten M_1 und M_2 von M in x schneiden; ihre Schnittzahl ist gerade 1. Man kann nun eine Umgebung von x mit holomorphen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ so wählen, daß $x = (0, \ldots, 0)$, $N \cap U = \{z \in U, z_1 = z_2 = 0\}$, und $M_\nu \cap U = \{z \in U, z_1 = f_\nu(z_2, \ldots, z_n)\}$, dabei sind f_ν in U holomorph, $\nu = 1, 2$. Es gilt notwendig: $f_1(0, z_2, \ldots, z_n) \equiv f_2(0, z_2, \ldots, z_n) \equiv 0$; da $s(M_1, M_2, x) = 1$, so ist $E = \{(z_2, \ldots, z_n), z_2 = 0\}$ eine Nullstellenfläche 1. Ordnung von $f_1 - f_2$. Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1^* &= z_1 - f_1(z_2, \ldots, z_n) \\ z_2^* &= z_1 - f_2(z_2, \ldots, z_n) \\ z_\nu^* &= z_\nu \qquad , \ \nu = 3, \ldots, n \end{aligned}$$

werden deshalb in einer Umgebung von x neue holomorphe Koordinaten $z_1^*, \ldots, z_n^*$ eingeführt. Da in dieser Umgebung M durch die Gleichung $\{z_1^* \cdot z_2^* = 0\}$ beschrieben wird, ist der Satz bewiesen.

4. Wir untersuchen nun c-Überlagerungen.

Definition 45 (Primitive c-Überlagerung): Eine analytische Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ einer komplexen Mannigfaltigkeit X heißt primitiv, wenn es eine primitive c-Menge $M \subset X$ gibt, so daß $\mathfrak{Y}$ höchstens über M verzweigt ist.

Wir beweisen zunächst:

Satz 49: Jede primitive Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ ist eine algebroide Überlagerung.

Beweis: Es sei M eine primitive c-Menge in X, über der alle Verzweigungspunkte von $\mathfrak{Y}$ liegen, N sei wieder die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte

von M. Dann besitzt zunächst jeder Punkt $x \notin N$ eine Umgebung U, so daß jede Komponente von $\mathfrak{Y} | U$ als Verzweigungspunkte nur Windungspunkte besitzt. Solche Überlagerungen sind aber stets algebroid; daher ist nach Satz 35 auch $\mathfrak{Y} | U$ eine algebroide Überlagerung.

Sei nun $x \in N$. Es gibt dann nach Voraussetzung eine Polyzylinderumgebung U von x mit holomorphen Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$, so daß $U \cap M = \{z \in U, z_1 z_2 = 0\}$. Wegen Satz 35 dürfen wir $\overset{-1}{\eta}(U)$ als zusammenhängend voraussetzen. Die Beschränkung $\mathfrak{Y}_\nu(c)$ von $\mathfrak{Y}$ auf ein Ebenenstück $E_\nu := \{z \in U, z_\nu = c\}$, $\nu = 1, 2$, $c \neq 0$, ist dann — wie ohne weiteres ersichtlich — stets eine analytische Überlagerung. Die Anzahl der zusammenhängenden Komponenten von $\mathfrak{Y}_\nu(c)$ sei mit b_ν bezeichnet; offensichtlich ist b_ν unabhängig von c, $\nu = 1, 2$. Setzt man noch $b := b(\mathfrak{Y} | U)$, so zeigt eine einfache Rechnung, daß $f_1 := \sqrt[b]{z_1^{b_2} z_2^{b_1}}$ und $f_2 := \sqrt[b_1]{z_1}$ als (eindeutige) holomorphe Funktionen auf $\overset{-1}{\eta}(U)$ definiert werden können und daß eine geeignete Linearkombination $f := a_1 f_1 + a_2 f_2$ über einem geeigneten Punkt $\bar{x} \in U$ sicher b verschiedene Werte und damit den Grad b über $I(U)$ hat. Also ist $\mathfrak{Y}$ über einer Umgebung eines jeden Punkts $x \in X$ algebroid und mithin algebroid schlechthin.

Wir zeigen nun als letzten Satz dieses Paragraphen:

Satz 50: Jede c-Überlagerung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta, X)$ *einer komplexen Mannigfaltigkeit* X *ist eine algebroide Überlagerung.*

Beweis: Es sei M eine c-Menge in X, über der alle Verzweigungspunkte von $\mathfrak{Y}$ liegen. Da die Aussage des Satzes lokaler Natur und für offene relativ kompakte Mengen U von X der Ausdruck $\sup_{x \in U} s(x, M)$ stets endlich ist, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen: $\sup_{x \in X} s(x, M) < \infty$. Nach Satz 47 kann man dann durch einen iterierten σ-Prozeß eine komplexe Mannigfaltigkeit $'X$ gewinnen, so daß $'M := \overset{-1}{\pi}(M)$ primitiv ist (π bezeichne die natürliche Projektion $'X \to X$).

Wir beschränken $\mathfrak{Y}$ auf $X - M$. Die Überlagerung $\mathfrak{Y} | X - M$ gibt, da $\pi : 'X - 'M \to X - M$ biholomorph ist, Anlaß zu einer unverzweigten Überlagerung von $'X - 'M$, die nach Satz 8 zu einer analytischen Überlagerung $'\mathfrak{Y} = ('Y, '\eta, 'X)$ von ganz $'X$ fortsetzbar ist. $'\mathfrak{Y}$ ist eine c-Überlagerung; es gibt eine holomorphe Abbildung $\lambda : 'Y \to Y$ mit $\pi \circ '\eta = \eta \circ \lambda$, die $'Y - \overset{-1}{'\eta}('M)$ biholomorph auf $Y - \overset{-1}{\eta}(M)$ abbildet (man benutze Satz 2).

Da $'\mathfrak{Y}$ nach Satz 49 algebroid ist, ist die nullte Bildgarbe $\pi_0('\eta_0(\mathcal{O}('Y)))$ der Strukturgarbe von $'Y$ bezüglich der Abbildung $\pi \circ '\eta$ nach Satz 27 und Satz 45 eine kohärente analytische Garbe $'\mathfrak{S}$ über X. Wir behaupten nun, daß auch $\mathfrak{S} := \eta_0(\mathcal{O}(Y))$ über X kohärent ist. Zu dem Zweck genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{S}$ und $'\mathfrak{S}$ kanonisch isomorph sind. Das wird bewiesen sein, wenn man zu jeder offenen Menge $U \subset X$ einen natürlichen Isomorphismus $\lambda^*: H^0(U, \mathfrak{S}) \to H^0(U, '\mathfrak{S})$ angibt. Jede Schnittfläche über U in $'\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}$ kann als eine holomorphe Funktion in $(\pi \circ '\eta)^{-1}(U)$ bzw. $\overset{-1}{\eta}(U)$ gedeutet werden. Es induziert $\lambda : (\pi \circ '\eta)^{-1}(U) \to \overset{-1}{\eta}(U)$ aber einen Ringhomomorphismus

$\lambda^*: I(\overset{-1}{\eta}(U)) \to I((\pi \circ {}'\eta)^{-1}(U))$, der sogar ein Isomorphismus ist, da λ außerhalb $'\overset{-1}{\eta}('M)$ biholomorph ist. λ^* gibt Anlaß zum gesuchten Isomorphismus von $H^0(U,\mathfrak{S})$ auf $H^0(U,'\mathfrak{S})$.

Da die Garbe $\mathfrak{S} = \eta_0(\mathcal{O}(Y))$ mithin kohärent ist, besitzt jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung U, so daß endlich viele Schnittflächen $s^{(1)}, \ldots, s^{(r)}$ in $\mathfrak{S}(U)$ alle Halme von $\mathfrak{S}(U)$ erzeugen. Ist also $s_{x_1} \in \mathfrak{S}_{x_1}$, $x_1 \in U - M$, ein beliebiger Keim einer in $\overset{-1}{\eta}(x_1)$ holomorphen Funktion, so gibt es r holomorphe Funktionskeime $g_{x_1}^{(\varrho)}$ in $x_1 \in X$, $\varrho = 1, \ldots, r$, so daß gilt: $s_{x_1} = \sum_{\varrho=1}^{r} g_{x_1}^{(\varrho)} \cdot s_{x_1}^{(\varrho)}$, dabei bezeichnet $s_{x_1}^{(\varrho)}$ den von $s^{(\varrho)}$ in x_1 erzeugten Keim. Wir wählen nun für s_{x_1} insbesondere einen solchen in $\overset{-1}{\eta}(x_1)$ holomorphen Funktionskeim, der in den $b(\mathfrak{Y})$ verschiedenen Punkten von $\overset{-1}{\eta}(x_1)$ paarweise verschiedene Werte hat. Dann hat auch die in $\overset{-1}{\eta}(U)$ holomorphe Funktion $f = \sum_{\varrho=1}^{r} g_{x_1}^{(\varrho)}(x_1) \cdot s^{(\varrho)}$, wo $g_{x_1}^{(\varrho)}(x_1)$ der Zahlenwert des Keimes $g_{x_1}^{(\varrho)}$ in x_1 ist, $\varrho = 1, \ldots, r$, in $\overset{-1}{\eta}(x_1)$ paarweise verschiedene Werte. Also gilt: $(f : I(U)) = b(\mathfrak{Y})$, so daß $\mathfrak{Y}$ eine algebroide Überlagerung ist.

Literatur

[1] Behnke, H., u. K. Stein: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1—16 (1951). — [2] Bourbaki, N.: Topologie Générale. Chap. I, II. Paris: Hermann u. Cie. 1951. — [3] Bourbaki, N.: Espace vectoriels topologiques. Chap. I, II. Paris: Hermann u. Cie. 1953. — [4] Carathéodory, C.: Über die analytischen Abbildungen von mehrdimensionalen Räumen. Verh. int. Math. Congr. Zürich 1932, vol. I, S. 93—101. — [5] Cartan, H., u. P. Thullen: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. **106**, 617—647 (1932). — [6] Cartan, H.: Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. Ecole norm. sup. **61**, 149—197 (1944). — [7] Cartan, H.: Séminaire E. N. S. 1951/52 (hektographiert). — [8] Cartan, H.: Variétés analytiques complexes et cohomologie. Coll. de Bruxelles, 41—55 (1953). — [9] Cartan, H.: Séminaire E. N. S. 1953/54 (hektographiert). — [10] Cartan, H.: Zur Theorie der analytisch vollständigen Räume (Ref. über [14] im Séminaire Bourbaki). Mai 1955. — [11] Chevalley, C.: Theory of Lie groups. Princeton University Press 1946. — [12] Dieudonné, J.: Une généralisation des espaces compacts. J. Math. Pure Appl. **23**, 65—76 (1944). — [13] Gorenstein, D.: An arithmetic theory of adjoint plane curves. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 414—436 (1952). — [14] Grauert, H.: Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233—259 (1955). — [15] Grauert, H., u. R. Remmert: Zur Theorie der Modifikationen I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **129**, 274—296 (1955). — [16] Grauert, H., u. R. Remmert: Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen. Math. Z. **65**, 175—194 (1956). — [17] Grauert, H., u. R. Remmert: Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete. Math. Z. **67**, 103—128 (1957). — [18] Grauert, H., u. R. Remmert: Sur les revêtements analytiques des variétés analytiques. C. R. Acad. Sci. (Paris) **245**, 918—921 (1957). — [19] Grauert, H., u. R. Remmert: Bilder und Urbilder analytischer Garben. Ann. of Math. (1958). — [20] Hirzebruch, F.: Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. Erg. Math. Berlin: Springer 1956. — [21] Hodge, W. V. D., and D. Pedoe: Methods of Algebraic Geometry III. Cambridge University Press 1954. — [22] Hopf, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant.

New York 1948, p. 167—185. — [23] HUREWICZ, W., and H. WALLMANN: Dimension Theory. Princeton University Press 1948. — [24] OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VIII. Lemme fondamental. J. Math. Soc. Japan 3, 204—214 und 259—278 (1951). — [25] OSGOOD, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1. Berlin und Leipzig: C. G. Teubner 1929. — [26] REMMERT, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. 130, 410—441 (1956). — [27] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133, 328—370 (1957). — [28] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126, 263—306 (1953). — [29] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig und Berlin: C. G. Teubner 1934. — [30] SERRE, J. P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. 61, 197—278 (1955). — [31] SERRE, J. P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier 6, 1—42 (1955/56). — [32] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. 132, 63—93 (1956). — [33] TEICHMÜLLER, O.: Veränderliche Riemannsche Flächen. Dtsch. Math. 1944, 344 bis 359. — [34] WAERDEN, B. L. VAN DER: Algebra II, 3. Aufl. Berlin: Springer 1955. — [35] WEYL, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. 1. Aufl. Leipzig: C. G. Teubner 1913.

Zusatz bei der Korrektur: Wie wir durch briefliche Mitteilung erfahren, hat inzwischen auch R. KAWAI mit völlig anderen Methoden das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit (Satz 33) bewiesen. — Im § 9 wurden Methoden von S. BERGMAN verwandt; vgl. S. BERGMAN: The Kernel Function and Conformal Mapping, New York 1950.

(Eingegangen am 10. Mai 1958)

ENGEL, W.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 319—325 (1958)

Ganze Cremona-Transformationen von Primzahlgrad in der Ebene

Von

WOLFGANG ENGEL in Halle (Saale)

Es seien $g(x, y)$ und $h(x, y)$ zwei Polynome in zwei Unbestimmten x, y mit Koeffizienten aus dem Körper der komplexen Zahlen, die eine konstante von Null verschiedene Funktionaldeterminante besitzen. Im Band 130 dieser Zeitschrift habe ich gezeigt [1], daß diese Polynome eine ganze Cremona-Transformation der Ebene definieren, d. h. setzt man $x' = g(x, y)$, $y' = h(x, y)$, so sind auch x und y Polynome in x' und y'. Man kann nun fragen, wie die Koeffizienten in diesen Polynomen aussehen. Die Antwort lautet für ganze Cremona-Transformationen von Primzahlgrad:

Damit zwei Polynome $g(x, y)$, $h(x, y)$ eine ganze Cremona-Transformation von Primzahlgrad p definieren, ist notwendig und hinreichend, daß für sie

$$(1)\quad \begin{aligned} x' &= g_0 + g_{10}x + g_{01}y + \beta \sum_{\varkappa=2}^{p} a_\varkappa [(\alpha g_{10} - \beta h_{10})x + (\alpha g_{01} - \beta h_{01})y]^\varkappa, \\ y' &= h_0 + h_{10}x + h_{01}y + \alpha \sum_{\varkappa=2}^{p} a_\varkappa [(\alpha g_{10} - \beta h_{10})x + (\alpha g_{01} - \beta h_{01})y]^\varkappa \end{aligned}$$

mit $g_{10}h_{01} - g_{01}h_{10} \neq 0$ gilt.

Zunächst zeigen wir, daß zwischen den Gradzahlen von zwei Polynomen in zwei Unbestimmten mit konstanter von Null verschiedener Funktionaldeterminante eine Relation besteht. Es seien

$$g(x, y) = \sum_{\varkappa=0}^{k} g_\varkappa(x, y), \qquad g_k(x, y) \not\equiv 0,$$

$$h(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m} h_\mu(x, y), \qquad h_m(x, y) \not\equiv 0$$

die gegebenen Polynome, wobei die $g_\varkappa(x, y)$ bzw. $h_\mu(x, y)$ Formen vom $\varkappa^{\text{ten}}$ bzw. μ^{ten} Grad bedeuten. Wir nennen k den Grad von $g(x, y)$ und m den Grad von $h(x, y)$. Die Polynome seien so angeordnet, daß $k \geq m$ ist.

Fassen wir x und y als Koordinaten eines Punktes der komplexen affinen Ebene A_2 auf, so definieren die Gleichungen

$$(2)\qquad x' = g(x, y), \quad y' = h(x, y)$$

eine ganzrationale Transformation der affinen Ebene von der Ordnung k. Fügen wir zu den Punkten der affinen Ebene A_2 noch die Punkte mit den Koordinaten (∞, y), (x, ∞), (∞, ∞) hinzu, so erhalten wir die funktionentheoretische Ebene F_2.

Die Kurven der Büschel $g(x, y) - s = 0, h(x, y) - t = 0$ mit den Parametern s bzw. t besitzen in der affinen Ebene A_2 keinen singulären Punkt, denn in diesem würden $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ bzw. $\frac{\partial h}{\partial x}$ und $\frac{\partial h}{\partial y}$ gleichzeitig verschwinden und damit die Funktionaldeterminante Null werden, was der gemachten Voraussetzung widerspricht. Ferner können sich zwei Kurven $g(x, y) - s_0 = 0$ und $h(x, y) - t_0 = 0$ nirgends in der Ebene A_2 berühren, denn im Berührungspunkt wäre im Widerspruch zur Voraussetzung

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} = 0 .$$

Die gegebene Transformation kann man sich erzeugt denken aus einer affinen Transformation mit Fixpunkt (0, 0)

$$\begin{aligned} x'' &= a_{11}x + a_{12}y, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0, \\ y'' &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned} \tag{3}$$

aus einer ganzrationalen Transformation mit dem Fixpunkt (0, 0)

$$\tilde{x} = g''(x'', y''), \qquad \tilde{y} = h''(x'', y'') \tag{4}$$

und der Translation

$$x' = \tilde{x} + g_0, \qquad y' = \tilde{y} + h_0 . \tag{5}$$

Wählt man die a_{ik} in (3) so, daß $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}$ ist, so besitzt die Transformation (4) die Funktionaldeterminante 1. Durch geeignete Wahl der a_{ik} kann man noch erreichen, daß sowohl in $g''(x'', y'')$ die Glieder x''^k und y''^k wie in $h''(x'', y'')$ die Glieder x''^m und y''^m auftreten. Ferner läßt es sich einrichten, daß die Koeffizienten von x'' und y'' in den Polynomen $g''(x'', y'')$ und $h''(x'', y'')$ nicht verschwinden.

Wir betrachten nun die Transformation (4), lassen aber die Akzente wieder weg. Dann haben die Kurvenbüschel $g(x, y) - s = 0$ und $h(x, y) - t = 0$ nur den Punkt (∞, ∞) als Basispunkt. Beachtet man, daß die Zeuthen-Segresche Invariante $Z = \delta - 4q - N$ der Kurvenbüschel in der funktionentheoretischen Ebene F_2 den Wert Null hat (δ ist die nach JUNG verallgemeinerte Anzahl der Doppelpunkte, q das Geschlecht der allgemeinen Kurve und N die nach JUNG verallgemeinerte Anzahl der Basispunkte eines der Büschel [3]), so findet man, wie ich in der Arbeit [1] gezeigt habe, daß die Geschlechter der allgemeinen Kurven von $g(x, y) - s = 0$ und $h(x, y) - t = 0$ gleich Null sind. Ferner ergibt sich, daß die Zahl der Zweige einer allgemeinen Büschelkurve im Punkt (∞, ∞) gleich eins ist. In der genannten Arbeit habe ich dann die Puiseux-Entwicklungen von $v = y^{-1}$ in der Umgebung von (∞, ∞) aus

$$\mathfrak{G}(u, v) = u^k v^k g(u^{-1}, v^{-1}) - s\, u^k v^k = 0$$

hergeleitet. Sie sind

$$v = v_i(u, s) = e_1 u + \sum_{j=2}^{2k-1} e_{ij} u^{\frac{k+j-1}{k}} + e_{i(2k)}(s) u^{\frac{3k-1}{k}} + \cdots, \tag{6}$$
$$i = 1, 2, \ldots, k$$

und entsprechend für

$$\mathfrak{H}(u, v) = u^m v^m h(u^{-1}, v^{-1}) - t u^m v^m = 0:$$

$$(7)\qquad v = w_i(u,t) = f_1 u + \sum_{j=2}^{2m-1} f_{ij} u^{\frac{m+j-1}{m}} + f_{i(2m)}(t) u^{\frac{3m-1}{m}} + \cdots, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Dabei sind $e_{i(2k)}(s)$ bzw. $f_{i(2m)}(t)$ die ersten Koeffizienten, deren Ableitungen nach s bzw. t nicht identisch verschwinden. Hiermit läßt sich die Zahl der Schnittpunkte der allgemeinen Kurve von $g(x, y) - s = 0$ mit der allgemeinen Kurve von $h(x, y) - t = 0$ im Punkt (∞, ∞) berechnen. Sie erweist sich als um eins kleiner als die Gesamtzahl der Schnittpunkte in der funktionentheoretischen Ebene F_2. Also besitzen zwei Kurven $g(x, y) - s_0 = 0$ und $h(x, y) - t_0 = 0$ in der affinen Ebene A_2 genau einen Schnittpunkt. Daraus ergibt sich dann, daß x und y Polynome in x' und y' sind:

$$(8)\qquad \begin{aligned} x &= g'(x'y') = \sum_{\varkappa=0}^{k'} \sum_{\lambda=0}^{l'} g'_{\varkappa\lambda} x'^{\varkappa} y'^{\lambda}, \\ y &= h'(x'y') = \sum_{\mu=0}^{m'} \sum_{\nu=0}^{n'} h'_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu}, \end{aligned}$$

die Transformation (4) also eine ganze Cremona-Transformation (vom Grad k) ist. Da die Transformation (2) aus (4) durch die linearen Transformationen (3) und (5) hervorgeht, ist auch (2) eine ganze Cremona-Transformation, die nur im Punkt (∞, ∞) einen Fundamentalpunkt hat.

In $g'(x', y')$ sei mindestens ein Koeffizient $g'_{k'\lambda}(0 \leqq \lambda \leqq l')$ und mindestens ein Koeffizient $g'_{\varkappa l'}$ $(0 \leqq \varkappa \leqq k')$ von Null verschieden. Entsprechendes gelte von $h'(x', y')$. Dann ist mit $x = u^{-1}$, $y = v^{-1}$, $x' = s$, $y' = v'^{-1}$

$$(9)\qquad \begin{aligned} u\left[\sum_{\varkappa=0}^{k'} g'_{\varkappa l'} s^{\varkappa} + v' \sum_{\varkappa=0}^{k'} g'_{\varkappa(l'-1)} s^{\varkappa} + \cdots\right] - v'^{l'} &= 0, \\ v\left[\sum_{\mu=0}^{m'} h'_{\mu n'} s^{\mu} + v' \sum_{\mu=0}^{m'} h'_{\mu(n'-1)} s^{\mu} + \cdots\right] - v'^{n'} &= 0. \end{aligned}$$

Die Puiseux-Entwicklungen von v' aus der ersten Gleichung von (9) ergeben sich als Potenzreihen in $u^{\frac{1}{l'}}$, die mit der ersten Potenz beginnen. Setzt man eine solche Entwicklung in die zweite Gleichung ein, so bekommt man für v eine gewöhnliche Potenzreihe in $u^{\frac{1}{l'}}$, die mit $u^{\frac{n'}{l'}}$ beginnt. Da diese mit einer Entwicklung (6) übereinstimmen muß, ist $n' = l' = k$ und analog $k' = m' = m$.

Auch die Kurven der Büschel $g'(x', y') - s = 0$ und $h'(x', y') - t = 0$ haben, da sie eine ganze Cremona-Transformation definieren, nur je einen durch den Punkt (∞, ∞) gehenden Zweig und im Punkt (∞, ∞) $2km - 1$ Schnittpunkte. Daher sind die für $x' = u'^{-1}$, $y' = v'^{-1}$ aus

$$\mathfrak{G}'(u', v') = u'^m v'^k g'(u'^{-1}, v'^{-1}) - s\, u'^m v'^k = a'(u', s) \prod_{\varkappa=1}^{k} [v' - v'_{\varkappa}(u', s)],$$

bzw.

$$\mathfrak{H}'(u',v') = u'^m v'^k h'(u'^{-1}, v'^{-1}) - t u'^m v'^k = b'(u',t) \prod_{\varkappa=1}^{k} [v' - w'_\varkappa(u',t)]$$

($a'(u',s)$, $b'(u',t)$ sind Polynome mit der Eigenschaft $a'(0,s) \not\equiv 0$, $b'(0,t) \not\equiv 0$) zu gewinnenden Puiseux-Entwicklungen

$$(10) \qquad v' = v'_\varkappa(u',s) = \sum_{j=1}^{\gamma-1} e'_{\varkappa j} u'^{\frac{m+j-1}{k}} + e'_{\varkappa\gamma}(s)\, u'^{\frac{m+\gamma-1}{k}} + \cdots, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k$$

und

$$(11) \qquad v' = w'_\varkappa(u',t) = \sum_{j=1}^{\delta-1} f'_{\varkappa j} u'^{\frac{m+j-1}{k}} + f'_{\varkappa\delta}(t)\, u'^{\frac{m+\delta-1}{k}} + \cdots, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k,$$

wo $e'_{\varkappa\gamma}(s)$ bzw. $f'_{\varkappa\delta}(t)$ die ersten tatsächlich von s bzw. t abhängenden Koeffizienten sind.

Wegen der Birationalität der Transformation haben zwei verschiedene Kurven aus $g'(x',y') - s = 0$ bzw. $h'(x' y') - t = 0$ nur im Punkt (∞, ∞) Schnittpunkte, und zwar $2\,km$. Die Ordnungen $2\sigma(\mathfrak{G}')$ bzw. $2\sigma(\mathfrak{H}')$ der Divisoren der mehrfachen Stellen einer allgemeinen Kurve von $g'(x',y') - s = 0$ bzw. $h'(x',y') - t = 0$ sind wegen des verschwindenden Geschlechts nach [3]

$$(12) \qquad 2\sigma = 2\sigma(\mathfrak{G}') = 2\sigma(\mathfrak{H}') = 2(k-1)(m-1)\,.$$

Ersetzen wir in (10) s durch $\tilde{s}$, so erhalten wir

$$(13) \qquad \mathfrak{G}'(u', v'_1(u',\tilde{s})) = a'(u',s) \prod_{\varkappa=1}^{k} [v'_1(u',\tilde{s}) - v'_\varkappa(u',s)] = u'^{\frac{2km}{k}}\, \mathfrak{E}_1$$

und

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial v'} \mathfrak{G}'(u', v'_1(u',s)) = k a'(u',s) \prod_{\varkappa=2}^{k} [v'_1(u',s) - v'_\varkappa(u',s)] = u'^{\frac{2\sigma+k-1}{k}}\, \mathfrak{E}_2$$

mit Potenzreihen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$, die Einheiten in bezug auf u' sind. $v'_1(u',\tilde{s}) - - v'_\varkappa(u',s)$ und $v'_1(u',s) - v'_\varkappa(u',s)$ sind für $\varkappa > 1$ durch dieselbe Potenz von u' teilbar, denn in keiner Reihe $v'_\varkappa(u',s)$ können die γ ersten Glieder (einschließlich $e'_{\varkappa\gamma}(s)$) mit den γ ersten Gliedern von $v_1(u',s)$ übereinstimmen ([3], S. 61). Da $v'_1(u',\tilde{s}) - v'_1(u',s) = (e'_{1\gamma}(\tilde{s}) - e'_{1\gamma}(s))\, u'^{\frac{m+\gamma-1}{k}}$ ist, findet man durch Vergleich von (13) und (14) und Berücksichtigung von (12)

$$2km = 2\sigma + k - 1 + m + \gamma - 1 = 2(k-1)(m-1) + k - 1 + m + \gamma - 1\,,$$

also

$$(15) \qquad \gamma = k + m\,.$$

Besitzen k und m den größten gemeinsamen Teiler $d \geq 1$, so beginnen genau d von den Potenzreihen $v'_\varkappa(u',s)$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ mit demselben Glied wie $v'_1(u',s)$. Von den Reihen $v'_1(u',\tilde{s}) - v'_\varkappa(u',s)$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ sind also genau d durch eine höhere Potenz von $u'^{\frac{1}{k}}$ als die m^{te} Potenz teilbar. Weil sie andererseits höchstens durch die $(k + 2m - 1)^{\text{te}}$ Potenz teilbar sein können, gilt nach (13)

$$d(k + 2m - 1) + (k - d)\, m \geq 2km$$

oder

$$\left(\frac{k}{d}-1\right)\left(\frac{m}{d}-1\right) \leq 1-\frac{1}{d} < 1\,,$$

also $k = d$ oder $m = d$. Wegen $k \geq m$ ist dann

(16) $$k = m k_0 .$$

Da sich der Grad der Polynome bei den affinen Transformationen (3) und (5) nicht ändert, haben wir den Satz:

Sind zwei Polynome in zwei Unbestimmten mit konstanter von Null verschiedener Funktionaldeterminante gegeben, so ist notwendig der Grad des einen Polynoms ein Vielfaches des Grades des anderen Polynoms.

Es ist nach (6)

(17) $$\mathfrak{G}(u,v) = a(u,s) \prod_{\varkappa=1}^{k} [v - v_\varkappa(u,s)]\,.$$

Dabei bedeutet $a(u,s)$ ein Polynom mit $a(0,s) \not\equiv 0$. Weil

(18) $$\mathfrak{G}(u, w_1(u,t)) = a(u,s) \prod_{\varkappa=1}^{k} [w_1(u,t) - v_\varkappa(u,s)] = u^{\frac{2km-1}{k}}\,\mathfrak{E}$$

ist, gilt $e_1 = f_1 = e$. Führt man die Multiplikation auf der rechten Seite von (17) aus, so erhält man als Glieder mit der niedrigsten Exponentensumme $g_{k0}(v - eu)^k$. Entsprechendes gilt von $\mathfrak{H}(u,v)$. Also ist

$$\mathfrak{G}(u,v) = g_{k0}(v - eu)^k + \sum_{\varkappa+\lambda>k}\sum g_{(k-\varkappa)\,(k-\lambda)}\, u^\varkappa v^\lambda - s u^k v^k\,,$$

$$\mathfrak{H}(u,v) = h_{m0}(v - eu)^m + \sum_{\mu+\nu>m}\sum h_{(m-\mu)\,(m-\nu)}\, u^\mu v^\nu - t u^m v^m$$

oder

(19) $$\begin{aligned} g(x,y) &= g_{k0}(x - ey)^k + \sum_{\varkappa+\lambda<k}\sum g_{\varkappa\lambda}\, x^\varkappa y^\lambda,\\ h(x,y) &= h_{m0}(x - ey)^m + \sum_{\mu+\nu<m}\sum h_{\mu\nu}\, x^\mu y^\nu. \end{aligned}$$

Geht man wieder durch die affinen Transformationen (3) und (5) zu der allgemeinen Transformation über, so erhält man den Satz:

In zwei Polynomen $g(x,y) = \sum_{\varkappa=0}^{k} g_\varkappa(x,y)$, $h(x,y) = \sum_{\mu=0}^{m} h_\mu(x,y)$ mit konstanter und von Null verschiedener Funktionaldeterminante sind die Glieder $g_k(x,y)$ und $h_m(x,y)$ bis auf konstante Faktoren Potenzen ein und derselben Linearform $f(x,y)$.

Nun findet man leicht:

Wird durch $x' = g(x,y)$, $y' = h(x,y)$ eine ganze Cremona-Transformation vom Grad $k \geq 2$ definiert, so läßt sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems in der affinen Ebene erreichen, daß der Grad von $h(x,y)$ kleiner als der Grad von $g(x,y)$ ist.

Ist nämlich der Grad von $h(x,y)$ größer als der Grad von $g(x,y)$, so vertauschen wir x mit y und x' mit y' und sind fertig. Sind aber die beiden Gradzahlen einander gleich, also gleich k, so folgt aus dem eben bewiesenen

Satz, daß zwei von Null verschiedene Zahlen α und β existieren, derart daß

$$\alpha g_k(x,y) - \beta h_k(x,y) \equiv 0$$

ist. Dann wird nach der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= x', & \tilde{x} &= x, \\ \tilde{y}' &= \alpha x' - \beta y', & \tilde{y} &= \alpha x - \beta y \end{aligned}$$

die vorgegebene Transformation zu $\tilde{x}' = \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{y}' = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{y})$ mit Polynomen $\tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y})$ und $\tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{y})$, die die gewünschte Eigenschaft haben.

Weiter gilt:

Ist $x' = g(x, y)$, $y' = h(x, y)$ eine ganze Cremona-Transformation vom Grad $k \geqq 2$ und ist der Grad k von $g(x, y)$ größer als der Grad m von $h(x, y)$, so ist $k = m k_0$ und

$$\begin{aligned} x' &= \hat{g}(x, y) + \sum_{\varkappa=2}^{k_0} a_\varkappa [h(x, y)]^\varkappa, \\ y' &= h(x, y). \end{aligned} \tag{20}$$

Dabei ist $x' = \hat{g}(x, y)$, $y' = h(x, y)$ eine ganze Cremona-Transformation vom Grad m.

Die Glieder höchster Ordnung in $g(x, y)$ bzw. $h(x, y)$ sind nämlich wegen (19)

$$g_k(x, y) = \beta\,[f(x, y)]^k, \quad h_m(x, y) = \alpha\,[f(x, y)]^m.$$

Durch Zusammensetzen der gegebenen ganzen Cremona-Transformation mit der ganzen Cremona-Transformation

$$x'' = x' - \frac{\beta}{\alpha} y'^{k_0}, \quad y'' = y'$$

erhalten wir wieder eine solche Transformation $x'' = \tilde{g}(x, y)$, $y'' = h(x, y)$. Für diese ist aber der Grad $\tilde{k}$ von $\tilde{g}(x, y)$ kleiner als k. Ist $\tilde{k} > m$, so wiederholt man diesen Schluß, bis man eine Transformation vom Grad m erhält, womit der Satz bewiesen ist.

Aus diesen Sätzen folgt nun sofort:

Eine ganze Cremona-Transformation vom Primzahlgrad p wird bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= g_0 + g_{10} x + g_{01} y + \sum_{\varkappa=2}^{p} a_\varkappa (h_{10} x + h_{01} y)^\varkappa, \\ y' &= h_0 + h_{10} x + h_{01} y, \end{aligned} \qquad g_{10} h_{01} - g_{01} h_{10} \neq 0 \tag{21}$$

definiert.

Wir können nämlich die Koordinaten so wählen, daß der Grad des zweiten Polynoms kleiner als der Grad p des ersten ist. Nach (16) ist dann aber jener 1, und aus (20) folgt die Behauptung.

In einem beliebigen Koordinatensystem haben dann die Gleichungen (21) die unter (1) angeführte Gestalt. Die allgemeine ganze Cremona-Transformation der Ebene vom Primzahlgrad p hängt also von $p + 7$ Parametern ab.

Literatur

[1] ENGEL, W.: Ein Satz über ganze Cremona-Transformationen der Ebene. Math. Ann. **130**, 111—119 (1955). — [2] JUNG, H. W. E.: Über ganze birationale Transformationen der Ebene. J. reine angew. Math. **184**, 161—174 (1942). — [3] JUNG, H. W. E.: Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlicher. Berlin: Akademie-Verlag 1951.

(Eingegangen am 1. Mai 1958)

Sussman, I.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 326—338 (1958)

A Generalization of Boolean Rings

By

Irving Sussman in Santa Clara, Cal.

1. Introduction

It is well known that a Boolean algebra $(B, \cup, \cap)$, or algebra of sets, may be considered as a ring $(B, +, \times)$, given suitable definitions for $+$ and $\times$ in terms of $\cup$ and $\cap$; and, moreover, the resultant ring is a subdirect sum of two-element fields (See [15]).

Boolean algebras, *qua* rings, have been extended to more general classes which include them as a special case (see [3], [4], [13]). In this paper we proceed from the subdirect sum structure aspect of Boolean rings and by broadening the component rings (fields) of the structure we generate an overclass of rings which not alone includes as subclasses the Boolean and generalized Boolean rings referred to, but also classes of rings which hitherto have not been suspected of having any particular Boolean affiliations: for example, the so-called regular rings introduced by von Neumann in [14] and having identity but lacking proper nilpotent elements (therefore all commutative rings of this class); also, as will be shown in a subsequent communication, all finite rings not having proper nilpotent elements — *et al.* It is further shown for this general overclass, to which we have given the name associate rings, that the lattice theory of Boolean rings carries over in an extended but entirely natural manner, and moreover brings with it augmented implications by means of which an associate ring is shown to be composed of maximal lattices made out of the elements of the original ring, and which are, in fact, shown to be Boolean rings, all isomorphic with one another.

In what follows, all rings will be assumed to contain an identity element.

2. Definitions and Preliminary Theorems

We consider rings R which are (isomorphic to) subdirect sums of rings R_i, the component rings being domains of integrity (i. e. they have no right or left non-trivial divisors of zero. We shall refer to these simply as "domains" in what follows. It is well known (see [12]) that every commutative ring without proper nilpotent elements is a subdirect sum of integral domains; however, a comparable result for non-commutative rings seems not to be available. No *a priori* assumption is made regarding finiteness or countability.

2.1. Definition. *Enclosure.* $a < b$ ("a is enclosed in b").

$$a < b \quad \text{if} \quad ab = a^2 \; (= a \cdot a) .$$

2.2. Definition. *Compatibility.* $a \sim b$ ("a is compatible to b")

$$a \sim b \quad \text{if} \quad ab^2 = a^2 b\,.$$

The following implications of these definitions are obvious and will be used hereafter without specific reference:

(i) $a < b$ implies $a \sim b$.

(ii) $a < a$

(iii) $0 < a$ for all elements a.

The lemmas hereafter stated are referred to the class of subdirect sums of domains R_i, although some of them may be applied to more arbitrary systems. The proofs are entirely straightforward and follow directly from the definitions.

2.3. Lemma. *Given positive integers m, n, m', n' such that $m + n = m' + n'$, then if $a \sim b$, $a^m \cdot b^n = a^{m'} \cdot b^{n'}$.*

2.4. Lemma. *$a < b$ if and only if at least one of the following conditions is met in each component place of the subdirect sum representation of the elements a and b:*

$$\text{(i) } a_i = b_i \quad \textit{or} \quad \text{(ii) } a_i = 0_i \ (\varepsilon\, R_i)\,.$$

2.5. Lemma. *$a \sim b$ if and only if at least one of the following conditions is met in each component place:*

$$\text{(i) } a_i = b_i \quad \textit{or} \quad \text{(ii) one of } a_i \text{ or } b_i \text{ vanishes.}$$

It may be noted here that, given any ring, the relations of enclosure and compatibility may be characterized in terms of congruence relations modulo prime ideals, but this type of characterization is of no assistance in the present discussion.

2.6. Theorem. *The ring R is partially ordered by the enclosure relation $<$.*

Proof. $a < b$ and $b < a$ together imply that $a_i = b_i$ in each component; hence $a = b$.

$a < b$ and $b < c$ imply, if $a_i \neq 0$, that $b_i = a_i$, and then that $b_i = c_i$, and so $a_i = c_i$. If $a_i = 0$, then the condition for enclosure of a in c is already met in this component. In every event, then, $a < c$.

(Note: we are omitting the subscript of 0_i and I_i whereever no confusion as to the meaning can arise).

The idempotent elements of R, if such exist, are those elements, and only those, whose subdirect sum representation consists of zeros and identities in the components; i.e. elements such as $(\ldots, 0,1,0,0,1, \ldots)$ — or, alternatively, since we do not assume a countable number of component domains R_i, the class of functions on the index set d such that for each $i \in d$, either $f(i) = 0_i \in R_i$ or else $f(i) = 1_i \in R_i$ for all $i \in d$.

Without particularizing the component domains, which may be quite arbitrary, or placing some restrictive condition on the subdirect sum, little of a definite nature can be said about R outside the fact that it is a ring without nilpotent elements; R may itself be a domain, or it may consist

entirely of zero divisors. Examples may be found exhibiting each of these, and other, possibilities. Some preliminary results which can be stated now and which are of importance in the sequel follow. The proofs again are straightforward.

2.7. Lemma. *If a subdirect sum R of domains R_i has an identity element I, then I is the identity of the full direct sum*; i.e. $I = (\ldots, 1,1,1, \ldots)$

2.8. Lemma. *In a subdirect sum R of domains:*

(i) *Idempotent elements belong to the center* (i.e. commute with all the elements of R).

(ii) *Compatible elements commute with each other* (and hence, $a \sim b$ implies $b \sim a$).

(iii) *Left zero divisors are right zero divisors; in fact, $ab = 0$ implies $ba = 0$.*

In specifying that an element is not a zero divisor, then, it is not necessary to qualify the statement with the words "left" or "right".

We note that the presence of zero divisors in R implies the existence of compatible elements. The converse of this fact is also true: if R contains distinct compatible elements ($\neq 0$) there are proper zero divisors. In fact, $ab^2 = a^2b$ ($a \neq b$, and neither zero) implies $a(b^2 - ab) = 0$. If a is not a zero divisor, then since $(b-a)b = 0$, b must be a zero divisor. It is readily seen, in addition, that every zero divisor in R is necessarily compatible to at least one other zero divisor from it.

2.9. Definition. *Associated idempotent.* Let $a = (\ldots, a_i, \ldots)$ be an element of the subdirect sum R of domains R_i. If there exists an element $a^0 \in R$ whose subdirect formulation consists of 1_i in each place for which $a_i \neq 0_i$, and zeros elsewhere, then we call a^0 the associated idempotent of a in R.

Such idempotents may or may not exist in R. For example, consider the direct sum of the two element field (2) and the integral domain D of integers. Let R be the subdirect sum consisting of the following "number couples":

$$(0, \text{even integers}) \text{ and } (1, \text{odd integers}) .$$

This is a proper subdirect sum (albeit "trivial" in the sense that $R \cong D$), and is an integral domain — i.e. R contains no proper idempotent element.

We note a peculiarity here. In a full direct sum of domains, the zero divisors are characterized by the presence of a zero in at least one component. The example just given contains such elements, but they are not zero divisors. Hence we are not enabled to identify zero divisors in a subdirect sum by noting the presence of zeros in some components. Even in a non-trivial representation of a ring R as a subdirect sum of domains, if an element $a \in R$ has a component $a_i \neq 0$, there is no assurance that there exists in R any other element, save the zero of R, which has a zero in this particular component. (We have tacitly assumed that the zero of R has component zeros in each place; this may be trivially proved). The following definition and subsequent restriction of R clarifies this situation.

2.10. Definition. *Associate ring.* If a subdirect sum R of domains has an identity, and if R has the property that with each element a it contains

also the associated idempotent a^0 of a, then we call R an associate subdirect sum — or, simply, an associate ring.

A full direct sum of domains is, of course, an associate ring, as well as some of the "special" subdirect sums of the literature. We note also that this concept compares with what FOSTER calls a "normal subdirect sum" when dealing with so-called J-extension algebras [4]. In that instance the component domains are all the same integral domain and the concept is also applied to universal algebras.

2.11. Lemma. *In an associate ring R, the associated idempotent a^0 of an element a has the properties:*

(i) $$a^0 a = a a^0 = a$$

(ii) $$a^0 b^0 = b^0 a^0 = (ab)^0 = (ba)^0$$

(iii) $$\text{If } a \sim b, \text{ then } a^0 b = a b^0 (= b^0 a = b a^0)\,.$$

The proofs are immediate verifications.

2.12. Lemma. *The zero divisors of an associate ring R are precisely those elements which have at least one zero component.*

Proof. Let $a(\neq 0) \in R$ have a zero component, say $a_i = 0$. Since $a^0 \in R$, also $I - a^0 \in R$, and moreover, $I - a^0 \neq 0$. We have $a(I - a^0) = (I - a^0)a = a - a = 0$. Therefore a is a zero divisor of R.

Conversely, if $a(\neq 0)$ is a zero divisor, there exists an element $b(\neq 0) \in R$ such that $ab = 0$. Since R_i is a domain, and since for at least one component, $b_i \neq 0$, the corresponding component a_i of a must vanish.

It is readily seen that proper zero divisors will exist in R if R contains proper idempotent elements, and this condition is also seen to be necessary. Of course, R may itself be a domain: domains fall trivially under the classification of associate rings in which identity is the sole associated idempotent ($\neq 0$). Hence, the "extremes" of the class of associate rings are domains and Boolean rings, respectively.

2.13. Lemma. *Every element a of an associate ring R determines a non-0-divisor belonging to R and which encloses a.*

Proof. If a is not itself a non-0-divisor, consider the element $a' = a + I - a^0$. This element of R is seen to coincide with a in every component for which $a_i \neq 0$, and to place a 1_i in each component for which $a_i = 0$. Therefore, a' contains no zero component and so is a non-0-divisor of R. Moreover, $a(a + I - a^0) = (a + I - a^0)\,a = a^2$, and so $a < a'$. QED

It is clear that an element $a \in R$ is enclosed in every element which coincides with it in each i-component for which $a_i \neq 0$ — and only in such elements. Therefore, a non-0-divisor is enclosed by no other element of the ring. We note, also, that 2.13 implicitly states that every associate ring contains non-0-divisors. These will consist of the identity alone if and only if R is a Boolean ring (subdirect sum of 2-element fields).

2.14. Lemma. *In an associate ring:*

(i) $$a \sim b \text{ and } a^0 = b^0 \text{ imply } a = b\,.$$

Proof. $a^0 = b^0$ implies that a and b have non-zero "coordinates" in precisely the same components. $a \sim b$ then implies that these components are the same element of R_i.

3. Abstract formulations

Subclasses of Associate rings. Besides obtaining an abstract characterization for associate rings in the commutative case, we indicate in this section the significance of the class of associate rings by displaying two important (proper) subclasses: regular rings (without nilpotent elements) and rings which we call simply periodic rings (rings in which $a^{n(a)} = a$).

3.1. Lemma. *The following three properties characterize the associate idempotent a^0 of any element a of an associate ring R*: (i) *a^0 is an idempotent element of R*; (ii) $aa^0 = a^0 a = a$; *and* (iii) *$a + I - a^0$ is a non-0-divisor of R.*

Proof. The associated idempotent a^0 of $a \in R$ has been shown to possess the three given properties.

Conversely, assume that a^0 is an idempotent element having properties (ii) and (iii) relative to some non-zero element a in R.

$a.a^0 = a$ implies that in every i-component where $a_i \neq 0$, $(a^0)_i = 1_i$. Now, suppose that 1_i appears in an i-component of a^0 [i.e. $(a^0)_i = 1_i$) where $a_i = 0_i$. Then $(a + I - a^0)_i = 0_i$ and so $a + I - a^0$ fails to be a non-0-divisor of R, which contradicts (iii). Therefore, any idempotent of R also fulfilling (ii) and (iii) is the (unique) associate idempotent of a. QED

We note that requirement (i) of the lemma is quite necessary: i.e. (ii) and (iii) do not suffice to assure the idempotence of a^0. For example, in the ring (6) of integers modulo 6, (which will shortly be seen to be an associate ring), $3.5 = 3$ and $3 + 1 - 5 = 5$. But 5 is certainly not idempotent.

3.2. Lemma. *Every commutative ring with indentity and containing no nilpotent element* ($\neq 0$), *and which contains with each element a an element a^0 meeting conditions* (i), (ii) *and (iii) of the previous lemma, is an associate ring.*

Proof. A commutative ring without nilpotents is known to be a subdirect sum of integral domains (see, for example [11], Theorem 4). The idempotents here mentioned are, by the previous lemma, precisely the associate idempotents defined for an associate ring. QED

We may now go further and inquire whether the existence of the required idempotents in *any* ring *alone* suffices to characterize an associate ring. (The existence of the identity is hypothecated by requirement (iii)). That is, does such a ring necessarily have the structure as a subdirect sum of domains? An affirmative answer is given for the commutative case in the following theorem.

3.3. Theorem. *Given any commutative ring R with identity, having the property that for each element a there exists an idempotent element a^0 having the properties* (i) $a \cdot a^0 = a$ *and* (ii) *$a + I - a^0$ is a non-0-divisor, then R is an associate ring.*

Proof. In view of the foregoing lemma, it suffices to demonstrate that R cannot have any proper nilpotent element.

Suppose that, for some $x \neq 0$, $x^n = 0$. By hypothesis, there exists an element x^0 in R such that $x \cdot x^0 = x$, and also $x + I - x^0$ is a non-0-divisor.

Now, it is easily seen that if an element b of a ring is a non-0-divisor, then no power of b can be a zero divisor. (In fact, $b^m y = 0$, $y \neq 0$, implies $b^{m-1} y = 0$, etc.). It is seen, then, that $x^0 \neq 1$, for in this case x itself is by the hypothesis a non-0-divisor, and this contradicts $x^n = 0$.

We shall show that $(x + I - x^0)^n$ is a zero divisor, and this produces a contradiction of (ii).

$$[x - (I - x^0)]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} (I - x^0)^i .$$

Since $(I - x^0)$ is an idempotent element ($\neq 0$), and $x^n = 0$, this binomial expansion yields simply $I - x^0$. This is a zero divisor, for $x(I - x^0) = 0$.

QED

Note: it is seen at once from this theorem that Boolean rings with identity are (commutative) associate rings, and it yields almost immediately their well-known structure as subdirect sums of two-element fields.

Regular rings. A regular ring has been defined by VON NEUMANN [14] as one in which, for each element a, there exists an element x such that $axa = a$. It is noted that if the regular ring is commutative, it can have no nilpotent elements, hence the nilpotent restriction of the following theorem is redundant in that case.

3.4. Theorem. *A regular ring R, with identity but without proper nilpotent elements, is an associate ring.*

Proof. It is already known that R has the necessary subdirect structure: the commutative regular ring is a subdirect sum of fields and the non-commutative regular ring without nilpotents is a subdirect sum of division rings (See [10]). In view of the abstract formulation of 3.2 we do not require this knowledge for the commutative case.

To carry out the proof of the theorem, it is merely necessary to show the existence of the required associated idempotents.

Let $a \neq 0$ belong to R. We have $(xa)^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa$. Therefore xa is an idempotent element of R. By lemma 2.8.(i), xa belongs to the center of R. Hence, $(xa)a = a$, or $xa^2 = a$.

Consider the element $a' = a + 1 - xa \in R$. This element does not vanish, for if $a' = 0$, then $a + 1 = xa$, and so $a^2 + a = axa = a$; accordingly, $a^2 = 0$, a contradiction.

Now, assume the existence of an element $y \neq 0$ in R such that $(a + 1 - xa)\,y = 0$. Then $ay + y = xay$. Upon multiplication on the left by $a (\neq 0)$ we get $a^2 y + ay = axay = ay$, and so $a^2 y = 0$. This implies that $0 = xa^2 y = ay$. However,

$$0 = (a + 1 - xa)y = ay + y - xay = 0 + y + 0 = y .$$

This is a contradiction. Therefore, we must conclude that $a' = a + 1 - xa$ is necessarily a left non-0-divisor (and hence, by 2.8. (iii), also a right non-0-divisor).

We have shown, then, that the element xa is the associated idempotent of a. Therefore, R is an associate ring. QED

We note that in view of Theorem 3.3. for the commutative case, we have available a new independent proof that commutative regular rings are subdirect sums of integral domains (which may readily be shown necessarily to be fields).

We have also shown in the course of the proof that the defining equation, $axa = a$, for regular rings is, if the ring has an identity and no nilpotents, equivalent to $xa^2 = a$. Also, since $(ax)^2 = ax \cdot ax = (axa)x = ax$, we have because of 2.8:

$$a = axa = a^2x = xa^2 \text{ (for the suitable } x\text{)}.$$

3.5. Theorem. *A ring R with identity in which every element $a \in R$ satisfies an equation $a^{n(a)} = a$, where $n(a)$ is a natural number* > 1 (depending on a, but not necessarily fixed, or even bounded) *is a commutative associate ring.*

Proof. Such rings have been shown (see [8] and [2]) to be commutative. They are clearly a subclass of regular rings, with $x = 1$ if a is idempotent, and with associated idempotent $a^{n(a)-1}$ (i.e. $x = a^{n(a)-2}$) otherwise. (Verification that $a^{n(a)-1}$ is an idempotent element is easily made).

3.6. Corollary. *All Boolean rings with identity, all p-rings* [4], *and p^k rings* [3], *are* (commutative) *associate rings.*

Note: The class of rings in which $a^{n(a)} = a$, has been given the name *simply periodic rings* by the author, and will be dealt with in detail in a subsequent communication. It may readily be verified that all residue class rings of integers modulo an integer which is a product of non-repeated prime factors are simply periodic rings, thus furnishing any number of finite examples.

4. Maximal compatible sets in an associate ring

All the elements of an associate ring which is not itself a domain display in some non-trivial way the relation of compatibility. The zero is enclosed in every element, and so is compatible with everything. Although two non-0-divisors cannot be compatible with each other, each such element determines a set of zero divisors which it encloses, as will be shown. Every zero divisor of R, on the other hand, has been shown to be enclosed in (hence compatible to) at least one non-0-divisor, as well as being compatible with every other zero divisor which it annihilates.

A classification of the elements of R via maximal sets of pairwise compatible elements yields surprising lattice and Boolean properties which we proceed to examine in this and the following section.

4.1. Definition. *Maximal compatible set.* Let $M = (\ldots, a, b, c, \ldots)$ be a set of pairwise compatible elements of an associate ring R. Let M be maximal in the sense that each element of M is compatible with every other element of M and no other such elements may be found in R. We call M a maximal compatible set (or, simply, a maximal set) of R. In view of 2.8(ii) non-commutativity of R is not of consequence in this definition.

4.2. Definition. *Uni-element.* If the maximal set M contains an element u which has the property that $a < u$ for all $a \in M$, then we call u the uni-element of M. It is clear, by 2.6, that a uni-element of a set M is necessarily unique.

4.3. Lemma. *The set J of idempotent elements of a ring R with identity form a maximal set in R whose uni-element is the identity of R.*

Proof. The fact that every idempotent element of R is compatible with every other idempotent element is immediate. If $a \in R$ is not idempotent, then $a^2 \cdot 1 \neq a \cdot 1^2$, hence no non-idempotent can belong this maximal set. The final statement is obvious.

4.4. Lemma. *The elements of any maximal set M of an associate ring R commute with each other.*

This lemma is merely a restatement of lemma 2.8.(ii). It is pointed out that there is no implication here that a maximal set is closed under multiplication; it generally is not, unless $M = J$.

4.5. Lemma. *Every uni-element in R is a non-0-divisor of R. Conversely, every non-0-divisor of R determines uniquely a maximal set of R of which it is the uni-element. This maximal set is composed of all elements $b \in R$ such that $b < u$.*

Proof. Let u be the uni-element of a maximal set M. Suppose u contains 0_i in some i-component. Then the element $u' = u + I - u^0$, which places a 1_i in this component, and coincides with u in every component u_j where $u_j \neq 0_j$, encloses $u: u < u'$. Moreover, it is clear that u' is compatible with every element of M, and in fact dominates by enclosure every element of M. This yields the contradiction that M contains two distinct uni-elements.

In the other direction, let u be any non-0-divisor of R. Consider all the elements of R in whose subdirect display one or more components a_i duplicate the corresponding component u_i of u, the other components of a being zeros; i.e. all elements a such that $a < u$. These elements are clearly compatible with each other, and moreover, together with u, form a maximal set in R for which u is the uni-element. This set is readily seen to be unique. QED

4.6. Lemma. *Every element a of an associate ring R belongs to at least one maximal set M containing a uni-element.*

Proof. If a is a non-0-divisor of R, then it determines a maximal set of which it is the uni-element by the previous lemma. If a is a zero divisor of R, it belongs to the maximal set determined by the non-0-divisor $a' = a + I - a^0$.

It is now clear that the non-0-divisors of R are one-to-one with the maximal sets of R containing uni-elements, and that these sets cover the elements of R. In the extreme cases (i.e. R is a domain, or R is a Boolean ring) the maximal sets will be two element sets or, respectively, the whole ring. The following theorem characterizes the maximal sets with uni-element.

4.7. Theorem. *Every maximal set M with uni-element of an associate ring R is of the form $M = uJ$, where u is a non-0-divisor of R and J is the set of idempotent elements of R.*

Proof. After the previous lemmas, it suffices to show that (i) the set uJ is a maximal compatible set having u as its uni-element, and (ii) if b belongs to the maximal set determined by u, then b has the required form $b = eu$ for some $e \in J$.

(i) It is readily verified that $ue \sim uf$, for all $e, f \in J$, since idempotents belong to the center of R. Also, $ue < u$, since $ue \cdot u = u^2 e = (ue)^2$.

(ii) If $a \in M_u$, then since $a < u$, and $u^0 = 1$, we have $a = u^0 a = a u^0 = a^0 u (a^0 \in J)$. (We have used 2.11.(iii)). QED

The enclosure relation is, of course, transitive. However, the relation of compatibility need not be transitive. In the event that it is, we have the following interesting theorem for associate rings.

4.8. Theorem. *An associate ring in which the relation of compatibility is transitive for non-zero elements is either a domain or a Boolean ring.*

(We note that the converse of this theorem is trivial).

Proof. We note first that the introduction of zero into this scheme would yield a trivial result: 0 is compatible with all elements, whence all elements are compatible with I and are therefore idempotent.

Assume, then, that transitivity holds for compatibility of non-zero elements. It follows that non-zero elements from two maximal sets cannot be compatible (much less equal), and hence, except for the element 0, the maximal sets are disjoint. Let $a (\neq 0)$ be arbitrary in R. If a is a zero divisor of R, then the idempotent element $I - a^0 \neq 0$. Moreover, $I - a^0$ belongs to the maximal set generated by the non-0-divisor $a' = a + I - a^0$, since it is readily verified that $(I - a^0) a' = I - a^0 = (I - a^0)^2$; i.e. $I - a^0 < a'$. Since also $a < a'$, $a \sim I - a^0$. Therefore, a is idempotent. All the zero divisors of R are therefore idempotent.

Consider the maximal set uJ, where u is any non-0-divisor. This maximal set contains only the one non-0-divisor u (4.5). The other non-zero elements of uJ are perforce idempotent, and so either $uJ = J$ (i.e. $u = I$) or else every maximal set uJ is the two element set $(0, u)$ and R is then a domain. QED

5. Lattice theory of associate rings

5.1. Theorem. *Given two compatible elements, $a \sim b$, of an associate ring R. Then*

(i) *there exists an element $a \cup b$ in R which is a least upper bound for a and b under $<$. This element is given by $a \cup b = a + b - a^0 b = lub(a,b)$;*

(ii) *there exists an element $a \cap b$ in R which is a greatest lower bound for a and b under $<$. This element is given by $a \cap b = a^0 b (= a b^0) = glb(a, b)$.*

Proof. We shall use freely the facts that a and b commute with each other, and that idempotent elements belong to the center of R (2.8), also (2.11) that $a^0 b = a b^0$.

$$a(a + b - a^0 b) = a^2 + ab - a.a^0 b = a^2$$
$$b(a + b - a^0 b) = ba + b^2 - b a^0 b = ba + b^2 - b b^0 a = b^2.$$

Therefore, $a < a \cup b$ and $b < a \cup b$.

Let x be an element of R such that $a < x$ and $b < x$. Then by definition of $<$, $ax = a^2$ and $bx = b^2$. Also, x commutes with both a and b.

$$(a + b - a^0 b) x = ax + bx - a^0 b x = a^2 + b^2 - a^0 b^2 = a^2 + b^2 - ab .$$

However, it is easily verified that

$$(a + b - a^0 b)^2 = a^2 + b^2 - ab .$$

Therefore, $a \cup b < x$, and accordingly, $a \cup b$ is the least upper bound of a and b in R.

Using the same references quoted above, we have:
$(a^0 b)a = ab = a^0 b^2 = (a^0 b)^2$
$(a^0 b)b = a^0 b^2 = (a^0 b)^2$
Therefore, $a \cap b < a$ and $a \cap b < b$.

Let y be any element of R such that $y < a$ and $y < b$. Then $ya = y^2$ and $yb = y^2$, and also y commutes with a and b.
$y(a^0 b) = a^0 y^2 = ay = ya = y^2$.
Therefore, $y < a \cap b$, and so $a \cap b = glb(a,b)$. QED

We note how $a \cup b$ and $a \cap b$ are formed in their subdirect sum notation: if $a_i = b_i$ in the i'th component, place this element of R_i in the same component of $a \cup b$. If $a_i = 0$, place b_i in this component; if $b_i = 0$, place a_i in this component. It is readily verified that this process yields precisely the element $a + b - a^0 b$.

For the glb, $a \cap b$, if $a_i = b_i$, place this element in the same component of $a \cap b$. If either of a_i or b_i vanish, place 0_i in this component. It is again easily verified that this process yields precisely the element $a^0 b$.

It may be seen from this component-wise construction of $a \cup b$ and $a \cup b$ that these two elements are also, respectively, the $lub(a,b)$ and the $glb(a,b)$ in the full direct sum of the component domains. It may also be shown that the compatibility of a and b is necessary for the existence of these bounds. For example, if $a < g$ and $b < g$, then since $ag = a^2$ and $bg = b^2$, we have $agb = a^2 b$ and $abg = agb = ab^2$, whence $a \sim b$. Therefore, compatibility is both necessary and sufficient for the existence of the bounds.

5.2. Theorem. *Every maximal set M_u with uni-element u in an associate ring R forms a distributive lattice $(M, \cup, \cap) = (M, <)$, with lattice identity u.*

Proof. M is partially ordered by $<$. (2.6). Any two elements a and b of M, being compatible, have a lub, $a \cup b$, and a glb, $a \cap b$, in R. It is necessary to show that these actually belong to M. This may be done by an examination of components, or abstractly by the following verification.

Let $c \in M$. Then $c \sim a$ and $c \sim b$, and these elements commute with each other.
$c^2(a \cup b) = c^2 a + c^2 b - c^2 a^0 b = a^2 c + b^2 c - abc$
$c(a \cup b)^2 = c(a^2 + b^2 - ab) = a^2 c + b^2 c - abc$.

Since c is arbitrarily chosen in M, and since $c \sim (a \cup b)$, it follows that $a \cup b$ belongs to M. The verification for $a \cap b$ is quite similar.

Therefore, M is a lattice $(M, \cup, \cap)$. The lattice identity is seen to be the uni-element u of M_u, since $a \cup u = a + u - a^0 u = a + u - au^0 = u$, and $a \cap u = a^0 u = au^0 = a$, for all $a \in M_u$. The null element of the lattice is the zero of R, which trivially is a member of every maximal set.

The distributivity of $(M, \cup, \cap)$ follows from the readily verifiable facts that

$$a(b \cup c) = ab \cup ac, \text{ and } a(b \cap c) = ab \cap ac .$$

(Note: in the commutative ring, the element a may be quite arbitrary in R for this to be true.)

$$a \cap (b \cup c) = a^0(b \cup c) = a^0b \cup a^0c = (a \cap b) \cup (a \cap c)\,.$$

The other distributive property: $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cap c)$ is known to follow from the first one ([2], pg. 133), or may be quickly verified here. QED

Some further connections between the ring operations in R and the lattice operations between compatible elements of R, in addition to those of the above proof, are displayed in the following theorem, whose verification is straightforward.

5.3. Theorem. *If $a \sim b$ in an associate ring R, then*

(i) $\quad ab = (a \cap b)\,(a \cup b) = a(a \cap b) = b(a \cap b) = (a \cap b)^2$

(ii) $\quad (a - b)\,(a \cap b) = 0$

(iii) $\quad (a \pm b)\,(a \cup b) = a^2 \pm b^2\,.$

5.4. Theorem. *Every maximal set M with uni-element in an associate ring R forms a Boolean ring $(M, \dotplus, \dot\times)$ with identity under suitable definitions for $\dotplus$ and $\dot\times$, with corresponding lattices $(M, \leqq)$ $(M, <)$, and*

$$a \dotplus b = a + b - 2a^0b = (a \cup b) - (a \cap b)$$
$$a \dot\times b = a \cap b = a^0b (= ab^0)\,.$$

Proof. Let a and b be two elements of M: $a \sim b$. We define $a \dotplus b$ as follows:

If $a_i = b_i$ in the i-component, let $(a \dotplus b)_i = 0_i$.

If $a_i \neq b_i$, then since $a \sim b$ precisely one of these is zero. If $a_i = 0$, let $(a \dotplus b)_i = b_i (\neq 0)$; if $b_i = 0$, let $(a \dotplus b)_i = a_i (\neq 0)$.

It is immediately seen that if $a \dotplus b$ actually belongs to the associate ring R, then $a \dotplus b < u$, where u is the uni-element of M, and therefore $a \dotplus b \in M$.

Consider, then, $a + b - 2a^0b \in R$. If in the i-component, $0 \neq a_i = b_i$, then since $(a^0)_i = 1_i = (b^0)_i$, we have $(a + b - 2a^0b)_i = 0_i$; and if $0_i = a_i = b_i$, then $(a^0)_i = 0$ and $(b^0)_i = 1$, whence $(a + b - 2a^0b)_i = b_i$; if $a_i \neq 0$ and $b_i = 0$, then $(a + b - 2a^0b)_i = 0_i$. Therefore, $a \dotplus b$ belongs to the maximal set M.

The element $a \dot\times b = a \cap b$ has already been defined and shown to belong to M as the $glb(a, b)$.

We now show that $(M, \dotplus, \dot\times)$ is a Boolean ring.

$a \dotplus a = 0$, since $a_i = a_i$ in every i-component, whence $(a \dotplus a)_i$ vanishes by our definition of $\dotplus$.

$a \dot\times a = a \cap a = a^0a = a$, and so a is idempotent under $\dot\times$.

It has already been shown that M is closed under $\dotplus$ and $\dot\times$. Associativity is a direct verification, and each element is its own inverse under $\dotplus$. For distributivity of $\dot\times$ over $\dotplus$, we may use the facts of 5.4. Let c be arbitrary in M.

$$\begin{aligned} c \dot\times (a \dotplus b) &= c^0(a \dotplus b) = c^0(a \cup b) - c^0(a \cap b) \\ &= (c^0a \cup c^0b) - c^0a^0b = (c^0a + c^0b - c^0a^0b) - c^0a^0b \\ &= (c \dot\times a) \dotplus (c \dot\times b)\,. \end{aligned}$$

To show that $(M, <)$ is the Boolean lattice corresponding to $(M, \dot{+}, \dot{\times})$, it is necessary to demonstrate that if $\leq$ is the ordering relation in $(M, \leq) = (M, +, \dot{\times})$, then $\leq \equiv <$.

Now, $a \leq b$ implies $a \dot{\times} b = a$; i.e., $a^0 b = a$. But this implies that $ab = a^2$, and so $a < b$. Conversely, let $ab = a^2$; i.e. $a < b$. Then, in each i-component, either $a_i = 0$, or else $a_i = b_i$. If $a_i = 0$, then $(a \cap b)_i = (a^0 b)_i = 0$. If $a_i = b_i$, then $(a^0 b)_i = b_i = a_i$. That is, $a \times b = a^0 b = a$, in every case. Therefore, $\leq \equiv <$.

Finally, it is clear from the foregoing that the Boolean identity of $(M, \dot{+}, \dot{\times})$ coincides with the uni-element of $(M, <)$. QED

It is readily shown that if $x \leq y$ (or, equivalently, $x < y$) in M, then $y \dot{+} x (= y \dot{-} x) = y - x$, these relative complements belonging, of course, also to M. This concept coincides precisely with relative complementation in the lattice $(M, <)$, which is a complemented lattice.

We also make reference here to [5], where it was shown by Foster that the idempotent elements of any commutative ring with identity form a Boolean ring. The definitions there given for the Boolean operations are specializations of those herein defined inasmuch as $a = a^0$ if a is idempotent. The present theory requires only there be "enough" idempotent elements in the (commutative) ring, and poses the interesting question of "how many" is "enough" in order to assure that the given ring is indeed an associate ring. It is conjectured that the matter is intimately concerned with whether the set of idempotents of the given ring form a complete atomistic Boolean algebra.

5.5. Theorem. *The maximal sets M with uni-element of an associate ring R — considered as lattices, or as Boolean rings $(M, \dot{+}, \dot{\times})$ — are all isomorphic.*

Proof. We have shown (4.6) that each maximal set is (uniquely) generated by a definite non-0-divisor (uni-element) u, as the set $M_u = uJ$ over the idempotent set J of R. We make the mapping:

$$M_u \to M_v, \quad \text{via} \quad ue \to ve$$

(u, v distinct uni-elements; $e \in J$). This is a lattice homomorphism: $M_u \sim M_v$, since if $ue \to ve$ and $uf \to vf$,

$$ue \cup uf = u(e \cup f) \to v(e \cup f) = ve \cup vf$$

$$ue \cap uf = u(e \cap f) \to v(e \cap f) = ve \cap vf.$$

The kernel of this homomorphism can be only the zero element, since $ue = 0$ implies that $e = 0 (u_i \neq 0_i$ for all $i)$. Therefore, the mapping $M_u \leftrightarrow M_v$ is an isomorphism. Since the isomorphism extends to M_u as a Boolean lattice, it also applies to the Boolean ring $(M_u, \dot{+} \dot{\times})$. QED

For the two extreme cases: (i) if R is an integral domain the maximal sets are the two-element sets (o, u), and it is seen that $u \dot{+} u = 0$ and $u \dot{\times} u = u$, i.e., we have 2-element Boolean rings; (ii) if R is a Boolean ring, we seem to have a new "addition" for it, but the difference is illusory, for in a Boolean ring $a \dot{+} a = 0$, and so $a \dot{+} b = a + b - 2ab = a + b$. Thus, we have as an immediate result of the two theorems just proved:

5.6. Corollary. *An associate ring is a Boolean ring if and only if the identity is the only non-0-divisor, and is a domain if and only if 0 and I are the only idempotents.*

6. Semigroup decomposition of associate rings

If, having considered sets uJ, we reverse the procedure and consider sets eU, where e is a fixed element of J, and U runs through the set of non-0-divisors of R, we will find that we have a true decomposition of the associate ring R into disjoint semigroups with local identity e. The relation of these semigroups to the maximal sets, and in particular to the subdirect structure of R, is quite marked and interesting, but detailed comment on them is with held for a subsequent communication.

Bibliography

[1] Birkhoff, Garrett: Lattice Theory. American Mathematical Soc. Colloquium Publication 25 (1939). — [2] Forsythe, A., and N. McCoy: On the commutativity of certain rings. Bull. Amer. math. Soc. 52 (1946). — [3] Foster, A. L.: p^k-rings and ring logics. Ann. Scuola Sup. Pisa 5 (1951). — [4] Foster, A. L.: p rings and their Boolean-vector representation. Acta math. 84 (1951). — Foster, A. L.: The idempotent elements of a commutative ring form a Boolean algebra .... Duke math. J. 13 (1946). — [6] Foster, A. L.: Ring logics and p rings. U. of California Publications in Math. 1, No. 10 (1951). — [7] Foster, A. L.: Generalized "Boolean" theory of universal algebras. Math. Z. 58 (1958). — [8] Jacobson, N.: Structure theory for algebraic algebras of bounded degree. Ann. of math. 46 (1945). — [9] Krull, W.: Subdirekte Summen-Darstellung von Integritätsbereichen. Math. Z. 52 (1950). — [10] McCoy, N. H.: Rings and Ideals. Math. Ass. of America. Carus Monograph no. 8 (1948). — [11] McCoy, N. H.: Subrings of direct sums. Amer. J. Math. 40 (1938). — [12] McCoy, N. H.: Subdirect sums of rings. Bull. Amer. math. Soc. 53 (1947). — [13] McCoy, N. H., and D. Montgomery: A representation of generalized Boolean rings. Duke math. J. 3 (1937). — [14] Neumann, J. von: On regular rings. Proc. nat. Acad. Sci. 22 (1936). — [15] Stone, M. H.: The theory of representations for Boolean Algebras. Trans. Amer. math. Soc. 40 (1936).

(Eingegangen am 12. Mai 1958)

RIEGER, G. J.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 339—341 (1958)

Einige Sätze über Ideale in algebraischen Zahlkörpern

Von
G. J. RIEGER in College Park, Maryland

Es sei K eine endliche algebraische Erweiterung vom Grade n des Körpers P der rationalen Zahlen und ϑ eine den Körper K erzeugende Zahl: $K = P(\vartheta)$. Unter den Konjugierten von ϑ seien r reell und die restlichen $2s = n - r$ nicht reell. Diese Konjugierten denken wir uns so numeriert:

$\vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(r)}$ reell,

$\vartheta^{(r+s+k)}$ konjugiert komplex zu $\vartheta^{(r+k)}$ $(k = 1, \ldots, s)$.

Wir bezeichnen mit

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ (ganze) Ideale in K,
$N\mathfrak{a}$ die Norm des Ideals $\mathfrak{a}$,
$\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \tau$ ganze Zahlen in K,
$N\xi$ die Norm der Zahl ξ,
$\langle\xi\rangle$ das von ξ erzeugte Hauptideal,
$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ den größten gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$,
Δ die Diskriminante von K.

Das System der Zahlen $\operatorname{sgn} \alpha^{(1)}, \ldots, \operatorname{sgn} \alpha^{(r)}$ heiße die Signatur von α.

Folgende Sätze gehören zum klassischen Bestand der algebraischen Zahlentheorie und gehen bereits auf DEDEKIND zurück[1]):

Satz a. *Zu zwei beliebigen Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gibt es stets eine ganze Zahl α mit*

(1) $$(\langle\alpha\rangle, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\,.$$

Satz b. *Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ läßt sich durch Multiplikation mit einem zu einem gegebenen Ideal $\mathfrak{b}$ teilerfremden Ideal $\mathfrak{d}$ in ein Hauptideal $\langle\alpha\rangle$ verwandeln.*

Satz c. *Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ist als größter gemeinsamer Teiler von zwei Hauptidealen darstellbar:*

$$(\langle\xi\rangle, \langle\eta\rangle) = \mathfrak{a}\,.$$

Das Ziel dieser Note ist es, diese Sätze zu verschärfen:

Satz A. *Zu zwei beliebigen Idealen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gibt es stets eine Zahl ξ von vorgeschriebener Signatur mit*

$$(\langle\xi\rangle, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\,,$$

$$|N\,\xi| < c(n)\,|\Delta|^{\frac{n}{2(n-s)}}\,N\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,,$$

wo $c(n)$ die nur von n abhängige positive Konstante von Hilfssatz 1 ist.

[1]) Vgl. [1], XI. Supplement, § 178.

Satz B. *Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ läßt sich durch Multiplikation mit einem zu einem gegebenen Ideal $\mathfrak{b}$ teilerfremden Ideal $\mathfrak{d}$ in ein Hauptideal $\langle\xi\rangle$ verwandeln, wobei ξ eine vorgeschriebene Signatur hat und*

$$|N\,\xi| < c(n)\,|\Delta|^{\frac{n}{2(n-s)}}\,N\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

ist.

Satz C. *Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ gibt es stets Zahlen ξ und η von vorgeschriebener (gleicher oder verschiedener) Signatur mit*

$$(\langle\xi\rangle, \langle\eta\rangle) = \mathfrak{a}\,, \tag{2}$$

$$|N\,\xi| < c(n)^2\,|\Delta|^{\frac{n}{n-s}}\,N\,\mathfrak{a}\,, \tag{3}$$

$$|N\,\eta| < c(n)\,|\Delta|^{\frac{n}{2(n-s)}}\,N\,\mathfrak{a}\,. \tag{4}$$

Zum Beweis dieser drei Sätze verwenden wir ein von mir in [2] bewiesenes Ergebnis[2]):

Hilfssatz 1. *Zu jedem Ideal $\mathfrak{c}$ und jeder Zahl γ gibt es stets eine ganze Zahl $\xi \neq 0$ von vorgeschriebener Signatur mit*

$$\xi \equiv \gamma \bmod \mathfrak{c}\,,$$

$$|N\,\xi| < c(n)\,|\Delta|^{\frac{n}{2(n-s)}}\,N\,\mathfrak{c}\,,$$

wo $c(n)$ eine nur von n abhängige Konstante ist.

Beweis von Satz A. Mit α hat auch jede Zahl

$$\xi \equiv \alpha \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

die Eigenschaft (1). Wir wählen ξ gemäß Hilfssatz 1, und Satz A ist bewiesen.

Beweis von Satz B. Setzt man in Satz A das durch $\mathfrak{a}$ teilbare Hauptideal $\langle\xi\rangle = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$, so geht Satz A in Satz B über.

Beweis von Satz C. Zunächst wählen wir

$$\eta \equiv 0 \bmod \mathfrak{a} \tag{5}$$

gemäß Hilfssatz 1. Das ergibt bereits (4) und die gewünschte Signatur für η. Wegen (5) gibt es ein $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle\eta\rangle$. Die Anwendung von Satz A ergibt ein ξ mit (2), mit

$$|N\,\xi| < c(n)\,|\Delta|^{\frac{n}{2(n-s)}}\,N\,\langle\eta\rangle \tag{6}$$

und mit der gewünschten Signatur. Aus (6) und (4) folgt (3), womit auch Satz C bewiesen ist.

Außerdem betrachten wir noch den wohlbekannten

Satz d[3]). *Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ teilerfremde Ideale aus K, so gibt es stets ganze Zahlen $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\beta \in \mathfrak{b}$ mit $\alpha + \beta = 1$*[4]).

---

[2]) Vgl. [2], Satz 6.4.

[3]) Satz d gilt allgemein in Ringen mit Einselement.

[4]) Die Umkehrung ist auch richtig und trivial.

Für P besagt dieser Satz: Sind a, b teilerfremde natürliche Zahlen, so ist $ax + by = 1$ ganzzahlig lösbar. Da nun mit x_0, y_0 auch $x_0 + tb$, $y_0 - ta$ $(t = 0, \pm 1, \ldots)$ Lösung ist und da auf diesem Weg alle Lösungen erhalten werden, kann man durch die Forderung $0 < x \leqq b$, d. h. $0 < ax \leqq ab$ eine solche eindeutig festlegen. Dieser Gedanke führt zu einer Verschärfung von Satz d:

Satz D. *Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ teilerfremde Ideale aus K, so ist*

$$\xi + \eta = 1 \qquad (\xi \in \mathfrak{a}, \ \eta \in \mathfrak{b})$$

lösbar, wo ξ von vorgeschriebener Signatur und

$$|N\xi| < c(n)\, |\Delta|^{\frac{n}{2(n-s)}}\, N\mathfrak{a}\mathfrak{b} \tag{7}$$

ist.

Beweis. Wir wählen α, β gemäß Satz d und dann

$$\xi \equiv \alpha \bmod N\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,, \text{ also } \xi = \alpha + \tau N\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

gemäß Hilfssatz 1. Dann hat ξ bereits die gewünschte Signatur, erfüllt (7) und liegt in $\mathfrak{a}$. Für $\eta = 1 - \xi$ gilt

$$\eta = 1 - \alpha - \tau N\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \beta - \tau N\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,.$$

Also liegt η in $\mathfrak{b}$, womit Satz D bewiesen ist.

Aus dem geläufigen Satz über die Auflösung von Kongruenzen in K folgt in Verbindung mit Hilfssatz 1 noch

Satz E. *Zu $\mathfrak{c}$, α und β mit $(\alpha, \mathfrak{c}) \mid \beta$ gibt es stets eine Zahl $\xi \neq 0$ von vorgeschriebener Signatur mit*

$$\alpha\xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{c},$$

$$|N\xi| < c(n)\, |\Delta|^{\frac{n}{2(n-s)}}\, N\frac{\mathfrak{c}}{(\alpha, \mathfrak{c})}\,.$$

Literatur

[1] Dedekind, R.: Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894. — [2] Rieger, G. J.: Über die Anzahl der Ideale in einer Idealklasse mod f eines algebraischen Zahlkörpers. Math. Ann. 135, 444—466 (1958).

(Eingegangen am 2. Juli 1958)

TIETZ, H.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 342 (1958)

Über Teilreihen von Potenzreihen

Von
HORST TIETZ in Münster (Westf.)

Jede Teilreihe einer Potenzreihe hat mindestens denselben Konvergenzradius wie diese; falls die Konvergenzkreise übereinstimmen, hat die Teilreihe auf der Konvergenzgrenze im allgemeinen andere Singularitäten als die Ausgangsreihe. Es gilt jedoch folgender

Satz: ***Eine beliebige Teilreihe einer Potenzreihe hat entweder einen größeren Konvergenzkreis als diese, oder beide Reihen haben auf der Konvergenzgrenze eine Singularität gemeinsam.***

Bemerkung: Dieser Satz wurde von H. F. BOHNENBLUST [Note on singularities of power series, Proc. Nat. Acad. Science USA **16**, 752—754 (1930)] für den Spezialfall ausgesprochen, daß die Ausgangsreihe auf der Konvergenzgrenze nur eine Singularität besitzt. Merkwürdigerweise scheint BOHNENBLUST übersehen zu haben, daß sein Beweis auch obigen allgemeinen Satz liefert[1]).

Der Vollständigkeit halber wiederholen wir kurz den Beweis, der auf zwei klassischen Sätzen beruht, nämlich

a) dem Satz von PRINGSHEIM, nach dem eine Potenzreihe mit reellen, nichtnegativen Koeffizienten im positiv-reellen Punkt der Konvergenzgrenze eine Singularität besitzt,

b) dem Hadamardschen Multiplikationssatz in seiner einfachsten Fassung, die besagt, daß jede Singularität auf der Konvergenzgrenze der Potenzreihe $\Sigma a_n b_n z^n$, falls deren Konvergenzradius das Produkt der Konvergenzradien der Reihen $\Sigma a_n z^n$ und $\Sigma b_n z^n$ ist, Produkt von Singularitäten auf den Konvergenzgrenzen der letztgenannten Reihen ist.

Beweis: Die Konvergenzradien von $f(z) = \Sigma a_n z^n$ und der Teilreihe $\tau(z) = \Sigma \varepsilon_n a_n z^n$, $\varepsilon_n = 0$ oder 1, seien beide gleich R. Wegen $(\varepsilon_n |a_n|^2)^{\frac{1}{n}} = \left(|\varepsilon_n a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^2$ hat die Reihe

$$h(z) = \Sigma \varepsilon_n |a_n|^2 z^n$$

den Konvergenzradius R^2; sie ist das „Hadamard-Produkt" von $\tau(z)$ und $f^*(z) = \Sigma \bar{a}_n z^n$ die beide den Konvergenzradius R besitzen. Da h ferner reelle nicht-negative Koeffizienten hat, ist $z_0 = R^2$ nach a) Singularität von h; diese hat nach b) die Form

$$R^2 = z_1 z_2, \quad |z_1| = |z_2| = R,$$

wobei z_1 und z_2 Singularitäten von τ bzw. f^* sind; es folgt $\bar{z}_2 = z_1$. Andererseits hat f^* wegen $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ nur solche Singularitäten ζ, für die $\bar{\zeta}$ eine Singularität von f ist; folglich ist $\bar{z}_2 = z_1$ nicht nur Singularität von τ, sondern auch von f. q.e.d.

(Eingegangen am 5. Juli 1958)

[1]) Auch E. C. TITCHMARSH bringt in der Auflage seiner Theory of Functions von 1952 auf Seite 244 nur die Bohnenblustsche Aussage.

FRIEDMAN, B.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 343—347 (1958)

n-Commutative Matrices

By

BERNARD FRIEDMAN in Berkeley, Cal.

A set of square matrices $M_1, M_2, \ldots, M_p$ over the complex field will be called *n-commutative* if all products of n elements of the set (repetitions allowed) commute with each other. This definition is a generalization of a commuting set of matrices and reduces to such a set when $n = 1$. It is well known that if a set of matrices commute with each other and if they generate a semi-simple ring, then all the matrices of the set can be simultaneously transformed into diagonal form. In this paper we shall generalize this result to a set of n-commutative matrices.

To explain this generalization, we introduce the concept of *broken-diagonal* matrices. A square matrix M is said to be a *broken-diagonal* matrix if all its non-zero elements are either on the diagonal below the main diagonal or in the upper right-hand corner so that it has the following form:

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \lambda_3 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \lambda_k & \cdot \end{pmatrix}.$$

Here all the dots represent zero elements of M.

It is easy to verify that any set of k-dimensional broken-diagonal matrices is a k-commutative set. We shall prove the following partial converse:

Theorem. *If $M_1, \ldots, M_p$ are an irreducible set of n-commutative matrices, and if some linear combination of $M_1, M_2, \ldots, M_p$ is non-singular, then the matrices $M_1, \ldots, M_p$ can be simultaneously transformed into broken-diagonal matrices of dimension k where k divides n, and the matrices are k-commutative.*

If the matrices $M_1, \ldots, M_p$ generate a semi-simple ring, they can be written as the direct sum of irreducible representations; consequently, by the above theorem the matrices can be simultaneously transformed to a direct sum of broken-diagonal matrices. Since for $k = 1$, a broken-diagonal matrix reduces to a single element, we see that this result is a generalization of the previously stated result about commutative matrices.

Before proving the theorem we prove a useful lemma[1]).

Lemma. *If M_1 is a non-singular matrix and if the set $M_1, \ldots, M_p$ is n-commutative, then M_1^n commutes with every M_i $(1 \leq i \leq p)$.*

[1]) This lemma was communicated to me by Dr. J. BRENNER.

By hypothesis M_1^n commutes with $M_i^{n-1} M_i$, that is,

$$M_1^n M_1^{n-1} M_i = M_1^{n-1} M_i M_1^n.$$

Since M_1 is non-singular, we may multiply this equation on the left by M_1^{1-n} to get

$$M_1^n M_i = M_i M_1^n$$

which proves the lemma.

We shall now prove the theorem. We note that the definition of n-commutativity implies the following: If L is the linear space spanned by the matrices $M_1, \ldots, M_p$ then all products of n elements of L commute with each other. Since some linear combination of $M_1, \ldots, M_p$ is non-singular, we may, by an obvious change in notation, denote this non-singular matrix by M_1 and assume that it with matrices which we again denote by $M_2, \ldots, M_p$ span L. It is clear that the new set $M_1, \ldots, M_p$ is also n-commutative. We shall prove the theorem for this new set and it will follow immediately for the original set.

By the lemma M_1^n commutes with M_i $(1 \leq i \leq p)$, that is, with every matrix of an irreducible set; therefore by SCHUR's lemma M_1^n must be a scalar multiple of the identity. Dividing M_1 by an appropriate scalar, we may arrange it so that we get a new matrix (which will again be denoted by M_1) such that

(1) $$M_1^n = I.$$

The hypothesis that the set $M_1, \ldots, M_p$ is n-commutative implies that the matrices

(2) $$M_1^{n-j-1} M_i M_1^j \qquad (0 \leq j \leq n-1,\ 2 \leq i \leq p)$$

all commute with each other; consequently they must have a common eigenvector. Denote this eigenvector by x. Then

(3) $$M_1^{n-j-1} M_i M_1^j x = \lambda_{ij} x$$

and using (1) we get

(4) $$M_i (M_1^j x) = \lambda_{ij} M_1^{j+1} x.$$

If we put

(5) $$x_j = M_1^j x \qquad (0 \leq j \leq n-1)$$

then (4) becomes

(6) $$M_i x_j = \lambda_{ij} x_{j+1}.$$

From this result it follows that the set of vectors x_j is invariant under all the M_i. Since the representation is irreducible, the set x_j spans the space on which the matrices act. If the set x_j were linearly independent we would be finished but in general it is not.

Suppose the vector y is a common eigenvector of all the matrices (2), that is suppose

(7) $$M_1^{n-j-1} M_i M_1^j y = \lambda'_{ij} y$$

where λ'_{ij} is a scalar and where $2 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq n-1$. Multiply (7) on the left by M_1 and we get

(8) $$M_1^{n-j} M_i M_1^{j-1} (M_1 y) = \lambda'_{ij} (M_1 y)$$

where, because of (1),

$$M_1^{-1} = M_1^{n-1}.$$

This result implies that $M_1 y$ is also a common eigenvector of the matrices (2) so that we may write

(9) $$M_1^{n-j-1} M_i M_1^j (M_1 y) = \lambda''_{ij} (M_1 y)$$

where, because of (8),

$$\lambda''_{ij} = \lambda'_{i,j+1}, \qquad (0 \leq j \leq n-1).$$

Here we understand that $\lambda'_{i,n} = \lambda'_{i,0}$.

We shall call the matrix whose elements are λ'_{ij} the *eigenvalue matrix* for the vector y and we shall denote it by (μ'). Similarly, the matrix whose elements are λ''_{ij} is the eigenvalue matrix for $M_1 y$ and it will be denoted by (μ''). From (9) we see that (μ'') is obtained from (μ') by moving the elements of each row of (μ') cyclically one place to the left. We write

$$(\mu'') = (\mu')\, T$$

where T is a matrix.

From (8) and (9) we see by induction on (3) that all the x_j are common eigenvectors of the matrices (2). Let (μ_j) denote the eigenvalue matrix for the eigenvector x_j. Obviously

$$(\mu_{j+1}) = (\mu_j)\, T = (\mu_0)\, T^{j+1}.$$

Suppose that k is the smallest positive integer such that

(10) $$(\mu_0)\, T^k = (\mu_0).$$

Since, by the very definition of T,

$$(\mu)\, T^n = (\mu)$$

for any matrix (μ), it follows that k exists and is a divisor of n.

We now complete the proof of the theorem by showing that the vectors

$$x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$$

are linearly independent and span the space on which the matrices M_i act; consequently they form a basis for the space. This will imply that the representation of the M_i by the x_i is k-dimensional and from (6) we conclude that the M_i are broken-diagonal matrices, thus proving the theorem.

Suppose the vectors $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ were not linearly independent. Then there would exist a smallest positive integer $t \leq k-1$ such that the vectors $x_0, x_1, \ldots, x_t$ are linearly dependent but the vectors $x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}$ are linearly independent; therefore there would exist scalars $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{t-1}$, not all zero, such that

(11) $$x_t + \alpha_0 x_0 + \ldots + \alpha_{t-1} x_{t-1} = 0.$$

Denote the first non-zero α by α_s.

Consider the eigenvalue matrices for x_t and x_s, namely (μ_t) and (μ_s). If

$$(\mu_t) = (\mu_s)$$

then

$$(\mu_0)\, T^t = (\mu_0)\, T^s$$

and

$$(\mu_0)\, T^{t-s} = (\mu_0)\,.$$

This contradicts the definition of k by which it is the smallest positive integer such that

$$(\mu_0)\, T^k = (\mu_0)\,;$$

consequently

$$(\mu_t) \neq (\mu_s)\,.$$

Therefore, there is at least one element, the (a, b)-th say, which is different in the two matrices. If we denote the elements of (μ_t) by $\lambda_{ij}^{(t)}$ and those of (μ_s) by $\lambda_{ij}^{(s)}$, then

$$\lambda_{ab}^{(t)} \neq \lambda_{ab}^{(s)}\,. \tag{12}$$

By the definition of the eigenvalue matrix

$$P x_j \equiv M_1^{n-b-1} M_a M_1^b x_j = \lambda_{ab}^{(j)} x_j\,.$$

Multiplying (11) on the left by $P - \lambda_{ab}^{(t)}$, we get

$$\alpha_0(\lambda_{ab}^{(0)} - \lambda_{ab}^{(t)})\, x_0 + \ldots + \alpha_s(\lambda_{ab}^{(s)} - \lambda_{ab}^{(t)})\, x_s + \ldots +$$
$$\alpha_{t-1}(\lambda_{ab}^{(t-1)} - \lambda_{ab}^{(t)})\, x_{t-1} = 0\,.$$

Because of (12), at least the coefficient of x_s is not zero. This contradicts the definition of t and consequently our original assumption that the vectors $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ were not linearly independent is wrong.

We can show that because of (10) the set $M_1, \ldots, M_p$ is not only n-commutative but also k-commutative. We shall prove that the matrices

$$N_1 = M_1^{k-1-j} M_i M_1^j$$

and

$$N_2 = M_1^{k-1-j'} M_{i'} M_1^{j'}\,,$$

where $0 \leq j, j' \leq k-1$ and $1 \leq i, i' \leq p$, are commutative. From (5) and (6) we find that

$$N_1 N_2 x_\alpha = \lambda_{i,\alpha+k+j}\, \lambda_{i',\alpha+j'}\, x_{\alpha+2k}$$

and

$$N_2 N_1 x_\alpha = \lambda_{i',\alpha+k+j'}\, \lambda_{i,\alpha+j}\, x_{\alpha+2k}\,.$$

But (10) implies that

$$\lambda_{i,j+k} = \lambda_{i,j}$$

for $1 \leq i \leq p$, $0 \leq j \leq n-1$; therefore

$$N_1 N_2 x_\alpha = N_2 N_1 x_\alpha$$

for $0 \leq \alpha \leq n-1$. This shows that

$$N_1 N_2 = N_2 N_1 .$$

In a similar way we can prove that all products of k matrices M_i commute with each other.

Just as before, by using the lemma, we find that M_1^k will commute with all M_i $(1 \leq i \leq p)$ and since the representation is irreducible, M_1^k must be a scalar multiple of the identity. Put

$$M_1^k = \gamma I . \tag{13}$$

From (5), (6) and (13), we see that the set of vectors x_j $(0 \leq j \leq k-1)$ is invariant under the action of all the matrices M_i $(1 \leq i \leq p)$. Because of the irreducibility of the representation, it follows that the vectors x_j span the space. Since they are linearly independent, they will form a basis. Again from (5), (6) and (13), the representation of M_i in terms of the basis x_j will be the following broken-diagonal matrix:

$$M_i = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma\lambda_{ik} \\ \lambda_{i0} & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \lambda_{i1} & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{i,k-1} & & \cdot \end{pmatrix}$$

This completes the proof of the theorem.

(Eingegangen am 19. Mai 1958)

BAUER, F.-W.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 348—364 (1958)

Spezielle Homologiestrukturen

Von

FRIEDRICH-WILHELM BAUER in Frankfurt am Main

Einleitung

Diese Arbeit schließt sich an die Arbeit [3] an und setzt deren Kenntnis, was die dort dargelegte allgemeine Theorie betrifft, voraus. Die Anwendungen der Theorie der atomaren Homologiestrukturen sind im 5. Abschnitt von [3] nur sehr kurz behandelt worden, und es wurde eine weitere Arbeit angekündigt, in der diese Fragen genauer dargelegt werden. Dies wird in der vorliegenden Arbeit geschehen. Zusammen mit [3] liefert sie daher eine im gewissen Grade abgeschlossene Darstellung der Theorie der atomaren Homologiestrukturen. Über das in [3] bereits Erwähnte hinaus sollen aber hier auch Probleme behandelt werden, die in [3] keine Erwähnung mehr finden, wie z. B. eine etwas verallgemeinerte Darstellung des Atombegriffes.

Im einzelnen wird folgendes gemacht: 1. Abschnitt: Eine Erweiterung des Atombegriffes. Bisher hatten wir gefordert, daß ein Atom ein maximales Kernideal in der teilweise geordneten Menge $\mathfrak{M}$ mit Norm in A sein sollte. Jetzt kann es auch noch solche Atome z geben, die nicht auf jedem $\Phi \in A$ mit $\Phi \geqq |z|$ ein Element von $\mathfrak{M}$ erzeugen. Es wird eine Reihe von Beispielen angegeben.

2. Abschnitt: Die Sitnikowsche Homologietheorie wird untersucht, und es wird gezeigt, daß sie atomar ist und mit $\mathfrak{P}^*(A_p)$ zusammenfällt.

3. Abschnitt: Es wird eine vereinfachte Form des Eilenberg-Steenrodschen Eindeutigkeitssatzes für Polyeder bewiesen.

4. Abschnitt: Es wird bewiesen, daß die Sitnikowsche Homologietheorie dualisierbar ist, d. h. daß es auf dem Bereich aller Teilmengen des R^n eine Kohomologietheorie $\mathfrak{D}$ gibt, so daß beide Gegenstand eines Dualitätssatzes der Form

$$H^q(R^n - X) \cong H_p(X) \qquad (p + q = n - 1)$$

sind.

5. Abschnitt: Das gleiche wird für eine Homologietheorie $\mathfrak{W}$ gemacht, die an und für sich nur eine Hilfskonstruktion ist und den Zweck hat, die Dualisierbarkeit der Vietorisschen Homologiestruktur und damit den zweiten Sitnikowschen Dualitätssatz zu beweisen.

6. Abschnitt: Der Begriff der Atomarität erfährt noch eine weitere Verallgemeinerung, die geeignet ist, auch die singuläre Homologietheorie in unsere

Betrachtungen einzubeziehen. Die neuen Atome nennen wir „induzierte Atome".

Wir erinnern kurz an die wichtigsten Definitionen aus [3]:

V-Kategorie

Sei A (1) eine Kategorie und (2) ein Verband V_A, so daß es zu jedem Paar $X \leqq Y$ eine ausgezeichnete Abbildung $i_Y^X: X \to Y$ in A gibt, so daß $i_X^X =$ Einheit in A und $i_X^Z\, i_Z^Y = i_Z^X$ für $Y \leqq Z \leqq X$ gilt. Eine solche Kategorie heißt eine V-Kategorie.

A_p. Sei A eine V-Kategorie und A_p die Menge aller Paare (X, Y) mit $X, Y \varepsilon A$ und $Y \leqq X$, so bilden diese Elemente wieder eine V-Kategorie, die wir A_p nennen.

Homologiestruktur

Sei A eine V-Kategorie, so ist eine Homologiestruktur $\mathfrak{V}$ eine Reihe von Funktoren $\{H_{vn}\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ von A_p in die Kategorie aller G-Moduln (für ein festes G), so daß ein Randoperator $\partial: H_n(X, Y) \to H_{n-1}(Y)$ existiert und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $f_* \partial = \partial f_*$ für jede Abbildung $f \varepsilon A_p$ mit $f_* = H_{vn}(f)$.

(2) Die Homologiesequenz

$$\cdots \to H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Y) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(X, Y) \to \cdots$$

ist teilweise exakt.

(3) Es ist $H_n(X, X) = 0$ für alle n.

Die Numerierung der Sätze erfolgt nicht fortlaufend, sondern nach den Nummern der Abschnitte, in denen sie enthalten sind.

1. Atomarität

Unsere Methode besteht darin, wie in [3] ausgeführt wurde, zu einer gegebenen Homologiestruktur $\mathfrak{V}$, die über einer V-Kategorie A erklärt ist, gewisse kleinste Elemente zu konstruieren, die allerdings selbst nicht mehr zu $\mathfrak{V}(A)$ gehören müssen, es aber ganz erzeugen sollen. Die Frage, bei gegebenem $\mathfrak{V}(A)$ die Atome zu finden und (falls solche überhaupt vorhanden sind) zu charakterisieren, soll hier eine erste Ergänzung und Vereinfachung erfahren. Im 6. Abschnitt werden wir den Atombegriff in einer anderen Richtung noch einmal erweitern.

Die allgemeine Situation, die wir hier, wie in [3] 2, betrachten, ist folgende:

Sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige, teilweise geordnete Menge, A ein Verband und $|*|$ eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf A, die den folgenden Bedingungen genügt:

(T 1) Aus $\alpha \leqq \beta$ in $\mathfrak{M}$ folgt $|\alpha| \leqq |\beta|$ in A,

(T 2) Ist $\alpha \varepsilon \mathfrak{M}$ und $X \in A$, $X \geqq |\alpha|$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes β $(= i_x \alpha)$ mit $\beta \geqq \alpha$ und $|\beta| = X$,

(T 3) Aus $|\alpha| = |\beta|$ und $\alpha \leqq \beta$ folgt $\alpha = \beta$,

so nennen wir $\mathfrak{M}$ eine teilweise geordnete Menge mit Norm in A. Wir bezeichnen mit $\bar{A}$ die verbandstheoretische Hülle von A. Wir sprechen davon, daß die

Norm $|*|_{A_1}$ in einem $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}$ (in $A_1 \geqq A$) eine Fortsetzung der Norm $|*|_A$ von $\mathfrak{M}$ in A ist, wenn für alle $\alpha \in \mathfrak{M}$ $|\alpha|_A = |\alpha|_{A_1}$ ist. Sei nun $\overline{\mathfrak{M}} \supset \mathfrak{M}$ eine teilweise geordnete Menge mit Norm in $\bar{A}$[1]), die eine Fortsetzung der Norm in A von $\mathfrak{M}$ ist, und sei $\mathfrak{N}$ eine Teilmenge von $\overline{\mathfrak{M}}$, wobei folgende Axiome erfüllt sein sollen:

(1) $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}$.

(2) Ist $a \in \mathfrak{N}$ und $\alpha \leqq a$ für $\alpha \in \overline{\mathfrak{M}}$, so ist $\alpha = a$. Es ist $a_1 = a_2$ für $a_i \in \mathfrak{N}$, wenn für die Mengen $(a_i) = \{\alpha_i \mid \alpha_i \geqq a_i\}$ gilt:

$$(a_1) = (a_2)$$

(3) Zu jedem $\alpha \in \mathfrak{M}$ gibt es ein $a \in \mathfrak{N}$ mit $\alpha \geqq a$.

In diesem Falle sagen wir, daß $\mathfrak{M}$ atomar und $\mathfrak{N}$ die Atome sind. In [3] wurde für diese Atome ein Eindeutigkeitssatz bewiesen, der dadurch zustande kam, daß wir die Atome durch gewisse Ideale in $\mathfrak{M}$ kennzeichneten, die wir „maximale Kernideale" nannten. Diese maximalen Kernideale lassen sich in jedem $\mathfrak{M}$ bilden und sie erfüllen auch stets die Forderungen (1) und (2), aber nicht mehr die Forderung (3). Hier soll eine andere Charakterisierung der Atome gegeben werden, die mit der Charakterisierung durch maximale Kernideale nur solange zusammen fällt, wie $\mathfrak{M}$ atomar ist. Damit ist gemeint, daß im Falle $\mathfrak{M}$ nicht atomar ist, durch den neuen Atomtyp eine weitere Klasse von „Atomen" in $\mathfrak{M}$ gegeben wird, der auch noch wichtige Eigenschaften der Atome beibehält. Insbesondere wird dadurch der in [3] erwähnte Unterschied zwischen starker und schwacher Norm aufgehoben, weil die neuen Atome das Verlangte automatisch liefern.

Zunächst erinnern wir uns an den Idealbegriff:

Eine Teilmenge $I \subset \mathfrak{M}$ heißt ein Ideal, wenn sie den folgenden Forderungen genügt:

(1) Mit $\alpha \in I$ und $\beta \geqq \alpha$ ist auch $\beta \in I$.

(2) Ist α, $\beta \in I$, so gibt es ein $\gamma \leqq \alpha$, β mit $|\gamma| = |\alpha| \wedge |\beta|$ und $\gamma \in I$.

(3) Aus α, $\beta \in I$ und $|\alpha| = |\beta|$ folgt $\alpha = \beta$.

Unter der Norm eines Ideals I verstehen wir das Element aus $\bar{A}$

$$|I| = \bigwedge_{\alpha \in I} |\alpha| .$$

Das Ziel dieses Abschnittes sollte es sein, einen neuen Atombegriff einzuführen, der den alten umfaßt. Es ist hierbei unsere Aufgabe, von der Beschränkung loszukommen, daß jedes Atom z für jedes $X \in A$ mit $X \geqq |z|$ ein α erzeugt. Würden wir diese Bedingung, die implizit in unserer eingangs gegebenen Atomdefinition enthalten ist, ersatzlos fortlassen, so würde unser Atombegriff trivial werden, denn die maximalen Ideale M in $\mathfrak{M}$ erfüllen die folgenden Forderungen:

(1) Zu jedem $\alpha \in \mathfrak{M}$ gibt es ein M mit $\alpha \in M$.

(2) Ist ein Ideal $I \supseteq M$, so gilt $I = M$.

[1]) Mit $\bar{A}$ bezeichnen wir die verbandtheoretische Vervollständigung von A.

Nur (1) bedarf eines *Beweises:* Sei nämlich $\{L_i\}$ eine aufsteigende Folge von Idealen, so ist $L = \bigcup L_i$: wieder ein Ideal und daher ist jedes Ideal und erst recht jedes Hauptideal in einem maximalen Kernideal enthalten.

Wir haben aber nach einem Ersatz für die weggelassene Bedingung zu suchen, die einerseits nicht trivial ist, andererseits aber doch noch eine genügend große Klasse von $\mathfrak{M}$'s enthält.

Definition 1: Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei teilweise geordnete Mengen mit Norm in A und $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ eine anordnungserhaltende Abbildung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$, so daß $|\alpha| = |\varphi\,\alpha|$ gilt. Wir nennen φ einen A-Homomorphismus.

A. Sei $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ ein A-Homomorphismus und ist L ein Ideal in $\mathfrak{M}$, so ist $\{\varphi\,\alpha \mid \alpha \in L\} = \varphi(L)$ ein Ideal in $\mathfrak{N}$.

Beweis: (1) Ist $\beta \in \mathfrak{N}$ $\beta \geqq \varphi(\alpha)$, so gibt es ein β', so daß : $\beta' \geqq \alpha$, $|\beta'| = |\beta|$ und daher $\beta' \in L$, also ist, da $|\varphi(\beta')| = |\beta|$ und $\varphi(\alpha) \leqq \varphi(\beta')$, β; $\varphi(\beta') = \beta$ und Bedingung (1) für Ideale erfüllt.

(2) Ist $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta) \in \varphi(L)$, so gibt es ein $\gamma = \alpha \wedge \beta$ (d. h. ein γ mit $|\gamma| = |\alpha| \wedge |\beta|$ und $\gamma \leqq \alpha, \beta$). Das Element $\varphi(\gamma)$ erfüllt offenbar die Bedingung $\varphi(\gamma) = \varphi(\alpha) \wedge \varphi(\beta)$.

(3) Ist $|\varphi(\alpha)| = |\varphi(\beta)|$, so ist $|\alpha| = |\beta|$. Sind nun $\alpha, \beta \in L$, so heißt das, $\alpha = \beta$ und $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Mit $I(\mathfrak{M})$ soll der Idealbereich von $\mathfrak{M}$ bezeichnet werden. Wir definieren:

Definition 2: Sei $\mathfrak{N}$ atomar und $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ ein A-Homomorphismus. Zu jedem Atom z in $\mathfrak{N}$ (d. h. jedem maximalen Kernideal) soll es ein und nur ein L in $I(\mathfrak{M})$ geben, so daß $\varphi(L) = z$ ist. Jedes $\alpha \in \mathfrak{M}$ soll in einem solchen L liegen. Sind die Forderungen erfüllt, so nennen wir $\mathfrak{M}$ lokal atomar und die Ideale L die lokalen Atome von $\mathfrak{M}$ (rel $(\mathfrak{N}, \varphi)$).

B. Ist $\mathfrak{M}$ atomar, so ist es auch lokal atomar.

Beweis: Man nehme $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ und setze φ = Identität.

C. Ist $L \leqq L'$ für zwei lokale Atome, so gilt $L = L'$.

Beweis: Es ist $\varphi(L) = z$, $\varphi(L') = z'$ und aus $L \leqq L'$ folgt $z \leqq z'$, was aber $z = z'$ nach sich zieht. Nun ist φ eineindeutig für die Atome und daher $L = L'$. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{V}(A_{\mathfrak{p}})$ jetzt sogar eine exakte Homologiestruktur ist. Sodann kann man einen wichtigen Spezialfall der lokalen Atomarität betrachten.

D. Sei $A_{1\mathfrak{p}} \leqq A_{\mathfrak{p}}$ eine V-Teilkategorie von $A_{\mathfrak{p}}$, so daß es zu jedem $\alpha \in \mathfrak{V}(A_{\mathfrak{p}})$ ein $\alpha_1 \in \mathfrak{V}(A_{1\mathfrak{p}})$ mit $\alpha_1 \leqq \alpha$ gibt. Wir nennen sodann $A_{1\mathfrak{p}}$ voll in $A_{\mathfrak{p}}$ rel. $\mathfrak{V}$. Wenn $\mathfrak{V}(A_{1\mathfrak{p}})$ atomar ist, dann ist $\mathfrak{V}(A_{\mathfrak{p}})$ lokal atomar.

Beweis: Sei $\Phi \in A_{\mathfrak{p}}$, so betrachten wir eine Berandungsklasse von Atomen ($\mathfrak{V}$ war exakt) in Φ und nennen sie $\zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$. Da es zu jedem $\zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$ ein $\zeta_1 \leqq \zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$ mit $\zeta_1 \in \mathfrak{V}(A_{1\mathfrak{p}})$ und dazu ein $z \leqq \zeta_1$ gibt, wird jedes $\zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$ auf diese Weise erzeugt. Der Homomorphismus φ von $\mathfrak{V}$ nach $\check{\mathfrak{V}}$ ordnet der Klasse $\zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$, die von $z \leqq \zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$ erzeugt wird, die entsprechende Berandungsklasse in $\mathfrak{V}$ zu. Es braucht natürlich φ in keiner Weise eineindeutig zu sein, weil aus $z - z_1 = \partial\, x$ mit $z_1, z_2 \leqq \zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$ nicht folgt, daß $z_1, z_2 \leqq \zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi} \in \varphi^{-1}(\zeta_{\check{\mathfrak{v}}})$ ist, weil x rel. $\mathfrak{V}$ auf (X, Y) für kein Y etwas zu erzeugen braucht.

Man kann die lokalen Atome in einem beliebigen exakten $\mathfrak{V}(A_p)$ auch durch folgende Bedingung kennzeichnen:

(1) Zu jedem $\alpha \in \mathfrak{V}(A_p)$ gibt es ein $z \leqq \alpha$.

(2) Ist $\alpha \leqq z$, so ist $\alpha = z$.

(3) Setzt man fest, daß jedes z in jedem $\Phi \geqq |z|$ eine Berandungsklasse ζ^{Φ} erzeugt, dann kommt man zu einer atomaren Homologiestruktur $\check{\mathfrak{V}}(A_p)$, deren Atome gerade die lokalen Atome von $\mathfrak{V}$ sind.

Die letzte Bedingung war bei den maximalen Idealen offenbar nicht erfüllt.

Nun geben wir Beispiele an:

1. Beispiel: Die Cechsche Kohomologietheorie $\mathfrak{D}_f$, die auf endlichen Koketten, auf den Nerven der Überdeckungen basiert, ist lokal atomar. Die Cechsche Kohomologietheorie $\mathfrak{D}$, bei der man unendliche, aber sternendliche Überdeckungen nimmt und unendliche Koketten, ist atomar und jedes Atom z von $\mathfrak{D}$ erzeugt nicht unbedingt ein $\mathfrak{D}_f$, aber jedes $\zeta_{\mathfrak{D}_f}$ wird durch ein Atom z von $\mathfrak{D}$ erzeugt.

2. Beispiel: Es wird $H_{\mathfrak{V}}(\Phi) = H_{\mathfrak{p}}(\Phi_1)$ gesetzt, wenn $\Phi \in A_p$ (= alle Teilpaare im R^n) ein maximales, n-dimensionales, polyedrales Paar Φ_1 enthält, und sonst sei $H_{\mathfrak{V}}(\Phi) = \{0\}$. Die lokalen Atome von $\mathfrak{V}$ sind die Atome von $\mathfrak{P}$, aber nicht jedesmal, wenn ein z vorhanden ist, mit $|z| \leqq \Phi$ gibt es in Φ ein $\zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$ mit $z \leqq \zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$. Hier haben wir gerade die Situation von D, A_{1p} ist mit der Gesamtheit aller n-dimensionalen Polyederpaare gleichzusetzen. Da jedes $\zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi}$ von einem $\zeta_{\mathfrak{v}}^{\Phi_1}$ erzeugt wird, wo Φ_1 ein n-dimensionales Polyederpaar ist, ist A_{1p} voll in A_p.

Würden wir nicht fordern, daß das Paar Φ_1 ein n-dimensionales polyedrales Paar ist, sondern irgend ein polyedrales Paar, so wäre die so entstehende Homologiestruktur $\mathfrak{V}_1$ atomar, allerdings hätte sie weniger Atome als $\mathfrak{P}$, nämlich nur die polyedralen, da alle anderen nicht mehr durch maximale Kernideale erzeugt werden.

3. Beispiel: Hier geben wir nur eine teilweise geordnete Menge mit Norm an, also keine Homologiestruktur. Sie sei die Gesamtheit aller r-dimensionalen kompakten Mengen im R^n. Diese Menge ist in natürlicher Weise angeordnet. Als Normbereich A nehmen wir die Teilmengen des R^n und setzen $|X| = X$. Aus $\mathfrak{M}$ machen wir nun eine atomare Struktur $\mathfrak{N}$. Die Atome sind die maximalen Ideale in $\mathfrak{M}$. Deren Träger sind offenbar Punkte x. Jeder Punkt x ist aber Träger von vielen verschiedenen Atomen. Nehmen wir z. B. zwei r-dimensionale kompakte Mengen X_1, X_2, so daß $\dim X_1 \cap X_2 \neq r$, aber daß in $X_1 \cap X_2$ ein x liegt, welches sowohl r-dimensionaler Punkt von X_1 als auch von X_2 ist. Sodann werden sowohl X_1 als auch X_2 durch Atome $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ erzeugt, die beide x zum Träger haben. Es ist aber $\mathfrak{x}_1 \neq \mathfrak{x}_2$. Es ist jetzt so, daß nicht mehr $\mathfrak{N}$ und Normbereich von $\mathfrak{N}$ identifiziert werden können. Ein Element α aus $\mathfrak{N}$ ist eine Klasse von Atomen $\mathfrak{x}_i$ und es ist $\mathfrak{x}_1 \sim \mathfrak{x}_2$, wenn $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ beide dieselbe r-dimensionale Teilmenge von $|\alpha|$ erzeugen.

Wir sehen hier, daß $\mathfrak{M}$ lokal atomar ist.

4. Beispiel: Wir betrachten r-dimensionale, differenzierbare, kompakte Mannigfaltigkeiten und nehmen als Inklusionen differenzierbare Einbettungen. Auch hier bekommen wir lokale Atome heraus, die Punkte zum Träger haben, aber jeder Punkt ist Träger von sehr vielen Atomen. Man kann die lokalen Atome mit den Flächenelementen des Grassmannkalküls in Beziehung setzen.

Wegen der formalen Ähnlichkeit mit Beispiel 3 führen wir hier die Einzelheiten nicht genauer aus.

2. *Die Sitnikowsche Homologietheorie*

In [5] definierte K. Sitnikow eine Homologiestruktur $\mathfrak{S}$ auf der Kategorie M aller metrischen Räume in folgender Weise:

Definition 1: (1) Ein ε-Simplex [1] σ^q in einem metrischen Raum X ist eine Menge von $q+1$ Punkten $x_0, \ldots, x_q \in X$, wobei der Durchmesser $d(x_1, \ldots, x_q) < \varepsilon$ ist. Die Zahl q ist die Dimension von σ^q.

(2) Eine ε-Kette in X ist eine Linearform $x^q = \Sigma\, u_i \sigma_i^q$ von orientierten ε-Simplexen mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe $\mathfrak{A}$.

(3a) Ein relativer Sitnikowscher Zyklus auf einem kompakten Paar (X, Y) ist eine Folge $\{z_i^p, x_i^{p+1}\}$ von relativen ε_i-Zyklen $z_i \bmod Y$ und Ketten x_i^{p+1} in X, für welche die Beziehung $\partial x_i^{p+1} = z_{i+1}^p - z_i^p \bmod Y$ gilt. Es ist $\{\varepsilon_i\}$ eine Nullfolge reeller positiver Zahlen.

(3b) Ein relativer Sitnikowscher Zyklus auf einem beliebigen Paar (X, Y) ist ein solcher auf einem kompakten Teilpaar von (X, Y).

(4a) Sei $x^{p+1} = \{x_i^{p+1}, y_i^{p+2}\}$ ein relativer Zyklus auf (X, Y), so wird

$$\partial x^{p+1} = \{\partial x_i^{p+1}, -\partial y_i^{p+2} + x_i^{p+1} - x_i^{p+1}\}$$

erklärt.

(4b) Sei f irgend eine stetige Abbildung von (X_1, Y_1) nach (X_2, Y_2) und $z^p = \{z_i^p, x_i^{p+1}\}$ auf (X_1, Y_1), so erklären wir

$$f_* z^p = \{f\, z_i^p, f\, x_i^{p+1}\}\,.$$

(5) Es soll „homolog Null" mit „Beranden" zusammenfallen.

A. Es ist ∂x^{p+1} ein Zyklus in Y und $f_* z^p$ ein relativer Zyklus in (X_2, Y_2) und $f_* \partial = \partial f_*$.

Beweis: (1) Wir müssen nachrechnen, daß

$$\partial(-\partial y_i^{p+2} + x_{i+1}^{p+1} - x_i^{p+1}) = \partial x_{i+1}^{p+1} - \partial x_i^{p+1}$$

ist.

(2) Da z^p auf einem Teilkompaktum erklärt ist und stetige Abbildungen Kompakten in Kompakten überführen, ist auch $\{f\, z_i\}$, $\{f\, x_i\}$ jeweils eine Folge von η_i-Ketten mit $\{\eta_i\} \to 0$.

(3) Die Beziehung $f_* \partial = \partial f_*$ folgt aus der gleichlautenden Relation im simplizialen Fall.

B. Es ist $\mathfrak{S}(M_p)$ exakt.

Beweis: Wegen [3] 1. B müssen wir nachweisen, daß

(1) „Beranden" und „homolog Null" zusammenfallen und

(2) es zu jedem $\zeta^{(X,Y)}$ mit $\partial \zeta^{(X,Y)} = 0$ ein ζ_1^X mit $j_* \zeta_1^X = \zeta^{(X,Y)}$ gibt.

Behauptung (1) ist mit Definition 1.5 gleichlautend. Im Falle (2) sei $\zeta^{(X,Y)}$ durch $x^{p+1} = \{x_i^{p+1}, y_i^{p+2}\}$ repräsentiert. $\partial\zeta^{(X,Y)} = 0$ heißt, daß ein k^{p+1} existiert mit $\partial x^{p+1} = \partial k^{p+1}$ für $k^{p+1} = \{k_i^{p+1}, l_i^{p+2}\}$ in Y. Es ist $\partial y_i^{p+2} = x_{i+1}^{p+1} - - x_i^{p+1} + a_i^{p+1}$ mit a_i^{p+1} in Y. Nun gilt

$$-\partial y_i^{p+2} + x_{i+1}^{p+1} - x_i^{p+1} = -\partial l_i^{p+2} + k_{i+1}^{p+1} - k_i^{p+1}\, \partial x_i^{p+1} = \partial k_i^{p+1},$$

da $\partial x^{p+1} = \partial k^{p+1}$ ist. Wir sehen also, daß

$$-a_i = -\partial l_i^{p+2} + k_{i+1}^{p+1} - k_i^{p+1}$$

und

$$\partial y_i^{p+2} = (x_{i+1}^{p+1} - k_i^{p+1}) - (x_i^{p+1} - k_i^{p+1}) + \partial l_i^{p+2}$$

gilt.

Daraus folgt also, daß

$$z_1^{p+1} = \{x_i^{p+1} - k_i^{p+1}, y_i^{p+2} - l_i^{p+2}\}$$

das Element ist, für welches $j_* z_1^{p+1} = x^{p+1}$ gilt, denn k_i und l_i gehörten zu Y.

Wir führen die nachfolgende Bezeichnungsweise ein:

P = V-Kategorie aller geradlinigen Polyeder im R^n,
A = V-Kategorie aller Teilmengen des R^n,
O = V-Kategorie aller offenen Polyeder des R^n (= Restmengen zu P),
K = V-Kategorie aller Kompakten im R^n,
$\mathfrak{P}$ = simpliziale Homologietheorie (auf P),
$\mathfrak{S}$ = Sitnikowsche Homologietheorie (auf A).

C. Es ist $\mathfrak{S}$ atomar.

Beweis: Der Beweis zerfällt in zwei Teile. Zunächst zeigen wir:

(α) Sei $\{\Phi_i\}$ eine fallende Folge von kompakten Paaren ($\Phi_i \leqq \Phi_{i-1}$) und $\{\zeta^{\Phi_i}\} = \{\zeta_i\}$ eine entsprechende Folge von Homologieklassen. Es gibt auf $\Phi = \wedge \Phi_i$ einen Sitnikowschen Zyklus z, der alle diese ζ_i erzeugt.

Dann zeigen wir: (β) Aus (α) folgt, daß jedes $\zeta^{\Psi}(\Psi \in A_p)$ von einem z_1 mit der Eigenschaft erzeugt wird, daß aus $z_1 \leqq z$ folgt, daß $z_1 = z$ ist. (Hier werden z und die auf $|z|$ von z erzeugte Klasse mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet.)

Beweis von (β): Wenn wir nur wissen, daß unsere Behauptung auf $K_p \subset A_p$ gilt, sind wir fertig, denn $\mathfrak{S}$ ist eine Homologietheorie mit kompaktem Träger, d. h. zu jedem ζ^{Φ} mit $\Phi \in A_p$ gibt es ein $\zeta^{\Psi} \leqq \zeta^{\Phi}$ mit $\Psi \in K_p$. Wir können zu diesem ζ^{Ψ} eine absteigende Folge $\{\zeta^{\Phi_i}\}$ derart konstruieren, daß es kein $\zeta^{\Phi'} < \zeta^{\Phi_i}$ für alle Φ_i geben soll. Eine solche Folge nennen wir maximal. Wegen (α) gibt es nun ein $z \leqq \zeta^{\Phi_i}$ mit dem Träger $\wedge \Phi_i$. Dieses z ist ein Atom, denn es kann kein $z_1 \leqq z$ ohne $z_1 = z$ geben.

Beweis von (α): Wir geben der Einfachheit halber den Beweis nur für den absoluten Fall an. Im relativen Falle schließt man genau so, nur daß man überall noch „mod Y" hinzufügen muß. Jedes ζ^{Φ_i} wird von einem $z^{\Omega_i} = z_i = \{z_j^i, x_j^i\}$ erzeugt. Nun soll aber $z_i \sim z_{i+1}$ in Ω_i sein, es gibt also ein $y_i = \{y_j^i, w_j^i\}$ mit

$$\partial y_j^i = z_j^i - z_j^{i+1}$$

und

$$\partial w_j^i = y_{j+1}^i - y_j^i - x_j^i + x_j^{i+1}.$$

Wir bilden $c = \{z_k^k, x_k^k - y_{k+1}^k\}$, was offenbar ein Sitnikowscher Zyklus ist, und behaupten $c \sim z_i$ auf $\bigcup \Omega_i = \Omega$. Wir betrachten die Ketten $u = \{u_k, v_k\}$ mit

$$u_k = \sum_{l=k}^{l=i-1} y_k^l$$

für $k < i$ und

$$u_k = \sum_{l=0}^{l=k+1-i} y_k^{k-l}$$

für $i < k$, bzw. die Ketten

$$v_k = \sum_{l=k}^{l=i-1} w_k^l$$

$$v_k = \sum_{l=0}^{l=k+1-i} w_k^{k-l}.$$

Für $i = k$ wird $v_k = w_k = 0$ gesetzt. Wir können nun nachrechnen (wir beschränken uns auf den Fall $k < i$):

$$\partial_i u_k = \Sigma (z_k^l - z_k^{l+1}) = z_k^k - z_k^i$$

und

$$\begin{aligned}\partial v_k &= \Sigma (y_{k+1}^l - y_k^l) - y_{k+1}^k + \Sigma (x_k^{l+1} - x_k^l) + y_{k+1}^k \\ &= u_{k+1} - u_k - x_k^k + y_{k+1}^k + x_k^i,\end{aligned}$$

was behauptet war.

Wir hätten unseren Beweis von (α) beendet, könnten wir folgendes zeigen: (γ) Sei $z^X = \{z_i, x_i\}$ ein Sitnikowscher Zyklus und sei $Y \subseteq X$ die Menge aller echten Häufungspunkte von X, d. h. die Menge aller Limespunkte $\alpha = \{\alpha_i\}$ von Eckpunktfolgen $\{\alpha_i\}$ mit α_i-Eckpunkt von z_i, so gibt es ein $z^Y \leq z^X$.

Wir könnten dann nämlich zu c einen solchen Zyklus auf $\bigcap \Phi_i = \Phi$ finden, da Φ offenbar die Menge aller dieser echten Häufungspunkte von $|c|$ enthält.

Beweis von (γ): Zu jedem Eckpunkt α_i in z_i nehmen wir ein α_i' in Φ, welches von α_i minimalen Abstand hat und entsprechend bei x_i. Dadurch bekommen wir eine ε_i-Verschiebung von z_i mit $\varepsilon_i \to 0$, und das Prisma dieser Verschiebung $\pi(x_i)$ liefert uns eine Homologie zwischen z und z', denn es ist $\partial \pi(x_i) = \pi(z_{i+1}) - \pi(z_i) + x_i - x_i'$. Die Folgenglieder von z', z_i' und z_{i+1}', sind natürlich wieder durch x_i' homolog.

Wir behaupten nun:

Satz 2: *Es ist* $\mathfrak{P}^*(A_p) = \mathfrak{S}(A_p)$.

Beweis: Da sowohl $\mathfrak{P}^*$ als auch $\mathfrak{S}$ kompakte Träger haben, können wir uns wieder auf die Kategorie K_p beschränken.

Zu einem Ideal L in $\mathfrak{P}^*(A_p)$ nehmen wir ein polyedrales Erzeugendensystem $\{\zeta^{\Phi_i}\}$, bestehend aus einer absteigenden Folge, so daß für jedes $\zeta^\Phi \in L$ ein $\zeta^{\Phi_i} \leq \zeta^\Phi$ vorhanden ist. Die Φ_i sind nun Paare von Polyedern $\Phi_i = (P_i, Q_i)$,

und wir nehmen in jedem Φ_i eine Kette $x_i \in \mathfrak{P}(P_p)$, so daß $x_i \leqq \zeta^{\Phi_i}$. Es muß natürlich $x_i \sim x_{i+1}$ in Φ_i sein. Das aber heißt, daß es ein y_i und ein v_i derart geben muß, daß $\partial y_i = \partial x_{i+1} - \partial x_i$ und $\partial v_i = x_{i+1} - x_i - y_i$ ist. Das Ideal $\partial L = \{\partial \zeta^{\Phi} \mid \zeta^{\Phi} \in L\}$ hat das Erzeugendensystem $\{\partial \zeta^{\Phi_i}\}$, und es ist dies ein erzeugendes starkes Atom, wenn L ein Atom, also ein maximales Kernideal war. Es ist $L \sim 0$ mit $L = \{\zeta^{Y}\}$, wenn es ein solches Erzeugendensystem $E = \{\zeta^{Y_i}\}$ von L und ein $L_1 = \{\zeta^{\Phi}\}$ mit Erzeugendensystem $E_1 = \{\zeta^{\Phi_i}\}$ gibt, so daß $\partial \zeta^{\Phi_i} = \zeta^{Y_i}$ also nach obiger Bezeichnungsweise (1) $z_{i-1} - z_i = \partial x_i$ und (2) $\partial y_i = x_{i-1} - x_i - y_i$ ist ($z_i \leqq \zeta^{Y_i}$), was aber gerade die Sitnikowsche Konstruktionsvorschrift ist, wenn man noch $C(\gamma)$ beachtet, wo ein $z' \leqq z$ auf der Menge aller echten Häufungspunkte von $\{\Phi_i\}$ gefunden wird. Sind E_1 und E_2 zwei Erzeugendensysteme eines und desselben Ideals, so gilt natürlich $\{z_{i1}, x_{i1}\} \sim \{z_{i2}, x_{i2}\}$ für die entsprechenden Sitnikowschen Zyklen, d. h. aber, die Darstellung ist wirklich unabhängig von der Auswahl des Erzeugendensystems. Wir nennen die Träger dieser beiden Erzeugendensysteme Q_i^1 bzw. Q_i^2. Wegen Idealeigenschaft (2) muß es auf $Q_i^1 \cap Q_i^2$ ein $z_i \leqq \zeta^{Q_i^1 \cap Q_i^2}$ geben, was unsere Behauptung beweist.

Nun kann man ebenso für die relativen Elemente vorgehen und sich auch hier die relativen starken Atome verschaffen. Das allgemeinste starke Atom bekommt man nun aber aus den Erzeugenden, indem man Summen bildet. Auf diese Weise bekommt man aber alle Sitnikowschen Zyklen und auch die richtige Homologiebeziehung, da sowohl $\mathfrak{P}^*$ als auch $\mathfrak{S}$ exakt waren.

Die gleichen Betrachtungen, die uns in C zeigten, daß $\mathfrak{S}$ atomar ist, kann man auch verwenden, um die Atomarität von der Vietorisschen Homologietheorie $\mathfrak{V}$ nachzuweisen.

3. *Der Eilenberg-Steenrodsche Eindeutigkeitssatz*

In [4] haben S. Eilenberg und N. Steenrod zusätzlich zu unseren Axiomen noch folgende Axiome aufgestellt, die für eine Homologietheorie auf topologischen Räumen gültig sein sollen:

(1) Homotopieaxiom:

Sind zwei Abbildungen f_0 und f_1 homotop, so ist $f_{0*} = f_{1*}$.

(2) Abgeschwächte Ausschneidung:

Ist (X, Y) gegeben und $U \subset Y$ derart, daß $\overline{U} \subset Y$, so gilt

$$H_i(X, Y) = H_i(X - U, Y - U)$$

für alle i.

(3) Ist x ein Punkt, so gilt

$$H_i(x) = 0$$

für $i \neq 0$.

A. Wir wollen hier zeigen, daß auf der Kategorie der geradlinigen Polyeder jede exakte Homologiestruktur $\mathfrak{V}$, die obige Axiome erfüllt und auf dem Bereich von P_p atomar ist, mit $\mathfrak{P}(P_p)$ übereinstimmt. Dazu verwenden wir vollständige Induktion.

0-dim. Fall: Dieser Fall ist klassisch und kann übergangen werden (s. [4]). Jedes Atom hat als Träger die Vereinigungsmenge von endlich vielen Punkten. Da für irgend zwei Punkte p_1, p_2 $G = H_0(p_1) = H_0(p_2)$ ist, muß jedes Atom x^0 die Form $\Sigma a_i \sigma^0_i$ haben, wobei unter der Summe die freie abelsche Gruppensumme mit Operatoren in G verstanden wird.

n-dim. Fall: Sei für $n-1$ unsere Behauptung bereits bewiesen. Zunächst zeigen wir, daß unter den Atomen von $\mathfrak{V}$ auch die endlichen simplizialen Ketten vorkommen. Sei $|\sigma^n|$ irgend ein Simplex. Wir geben ihm eine feste Orientierung und finden wegen Induktionsvoraussetzung einen Zyklus z^n auf seinem Rande : $Rd|\sigma^n|$. Es berandet z^{n-1} auf σ^n wegen Axiom (1) und ebenso wegen Axiom (1) auf keiner echten Teilmenge von $|\sigma^n|$. Es ist also $|\sigma^n|$ Träger eines durch irgend ein Vielfaches von z^{n-1} eindeutig bestimmten Atoms $a\,\sigma^n$ ($a \in G$ = Koeffizientenbereich von $\mathfrak{V}$). Nun seien $|\sigma_1^n|$ und $|\sigma_2^n|$ zwei Simplexe und $a\,\sigma_1^n$, $b\,\sigma_2^n$ Atome mit dem Träger $|\sigma_1^n|$ und $|\sigma_2^n|$. Wegen Induktionsvoraussetzung erhalten wir für die Ränder, daß $a\,\sigma_1^n + b\,\sigma_2^n$ durch $a\,z_1 + b\,z_2$ berandet wird, wobei wir unter der ersten Summe die freie abelsche Gruppensumme mit Operatorenbereich G verstehen. Auf diese Weise bekommen wir endliche Ketten $\Sigma b_i \sigma_i^n$ heraus mit der gewöhnlichen Randbildung und Addition.

Sei nun x^n irgend ein n-dimensionales Atom. Da $\mathfrak{V}$ auf P_p atomar sein sollte, ist $|x|$ ein Paar (X, Y), wobei X und Y beide Vereinigungsmengen von Simplexen sind, also als in einer festen Triangulation angenommen werden können. Nun sei σ irgend ein maximal dimensionales Simplex in $|x|$. Wir behaupten, daß $\dim\sigma \leq n$ angenommen werden kann, d. h., man kann $\dim|x^n| > n$ zum Widerspruch führen. Es würde dann nämlich ein maximal dimensionales Simplex σ^m in $|x^n|$ geben, welches mindestens eine freie Randseite σ^{m-1} hat. Wegen des Homotopieaxioms kann man dann aber, da σ^{m-1} wegen Induktionsvoraussetzung nicht zu $|\partial x^n|$ gehört, aus der baryzentrischen Unterteilung von σ^m mindestens ein Simplex σ_1^m aus den unterteilten $|x^n|$ fortlassen, was gegen die Atomarität verstößt. Auch kann man $\dim\sigma < n$ ausschließen, da sonst $x^n = 0$ und $|x^n| = 0$ wäre. Dies folgt ebenfalls aus der Induktionsvoraussetzung und der nachfolgenden Betrachtung. Wir nehmen also an, daß $\dim\sigma = n$ ist. Wir bilden $(X - |\sigma|) = X'$ und $(X, Y \vee X')$. Es gibt ein $\zeta_1^n = i_{(X, Y \vee X')}\, x^n$ und wegen des Ausschneidungsaxiomes ein x_2^n mit $|x_2^n| = (\sigma^n, R\,d\,\sigma^n)$, so daß $x_2^n \leq \zeta^n$. Wegen Induktionsvoraussetzung hat also ∂x_2^n die Form $\Sigma a_i \sigma_i^{n-1}$ und wegen des oben gezeigten $x_2^n = a\,\sigma^n$ (mit passender Orientierung von $|\sigma^n|$). Wir können also, da diese Betrachtung für jedes σ^n gemacht werden kann, das Atom x^n symbolisch durch $x^n = \Sigma b_j \sigma_j^n$ charakterisieren. Diese Kennzeichnung ist offenbar eindeutig, bis auf Unterteilungen von x^n. Nun wissen wir, da $\mathfrak{V}$ exakt ist, wie man beliebige Homologieklassen bildet, und können also, da wir die Atome kennen ([3], 1), $\mathfrak{V}$ konstruieren, was sich als mit $\mathfrak{P}$ übereinstimmend herausstellt.

Wir brauchen in unserem Beweis das Homotopieaxiom nur, um zu zeigen, daß in jedem Simplex $|\sigma^n|$ jedes z mit $|z| \leq Rd\,|\sigma|$ berandet, aber nicht in einem $M \subset |\sigma|$. Man kann auch einen ähnlichen Beweisgedanken für die

Kohomologietheorie verfolgen und kommt zu einem entsprechenden Resultat. Weiterhin sieht man leicht, daß sich unser Ergebnis noch dann beweisen läßt, wenn man auch alle offenen Polyederpaare aus O_p zuläßt. Nun erinnern wir uns an die Konstruktion 1.5., wo zu jeder Homologiestruktur $\mathfrak{B}$ eine duale Kohomologiestruktur $\mathfrak{K}$ konstruiert wurde. Man sieht leicht, daß mit $\mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{K}$ dem Ausschneidungsaxiom genügt und natürlich auch die Bedingung, daß jedes Simplex σ^n azyklisch in der Dimension $(n-1)$ ist, sowie die oben für σ^n formulierte Minimalforderung erfüllt. Der Pontrjaginsche Dualitätssatz liefert uns auch einen Isomorphismus zwischen $H^p(X)$ und $H_q(R^n - X)$ für $p+q = n-1$, $X \in P_p$, und obige Betrachtungen im Zusammenhang mit dem Eilenberg-Steenrodschen Eindeutigkeitssatz lehren uns, daß auch für die relativen Gruppen eine entsprechende Isomorphie besteht. Dieses Ergebnis kann man natürlich auch leicht direkt, etwa aus dem Beweisverfahren von ALEXANDROFF in [2] herleiten.

B. Ist $\mathfrak{B}$ eine exakte Homologietheorie, die auf P_p die Axiome von EILENBERG und STEENROD erfüllt, so ist sie atomar auf P_p (d. h. es gibt solche Atome, deren Körper auf P_p liegen).

Beweis: Zunächst betrachten wir die Kategorie S der endlichen Simplizialkomplexe, wobei $S_1 \leqq S_2$ ist, wenn alle Eckpunkte von S_1 Eckpunkte von S_2 sind und wenn jeder Satz $x_0 \ldots x_p$ von Eckpunkten in S_1 nur dann ein Simplex aufspannt, wenn dies auch in S_2 der Fall ist. Da in S jede absteigende Folge nach endlich vielen Schritten abbricht, ist hier die Atomarität einer Homologietheorie mit den oben geschilderten Eigenschaften offenbar trivial.

Sei nun $\Phi = (X, Y) \in P_p$ ein Paar in fester Triangulation τ und ζ^Φ eine Homologieklasse auf Φ. Solange wir nur Paare $\Phi_1 \leqq \Phi$ zulassen, die auf einem Teil von τ liegen, kommen wir auch hier zu einem Paar $\Psi \leqq \Phi$, so daß es ein $\zeta^\Psi \leqq \zeta^\Phi$, aber kein $\zeta^{\Phi'} < \zeta^\Psi$ gibt. Sei jetzt τ' eine andere Triangulation, so können wir (es handelt sich um geradlinige Polyeder) eine gemeinsame Verfeinerung η von τ und τ' finden. Wir müssen also zum Beweis von B folgendes zeigen:

C. Sind τ und τ' zwei Triangulationen eines Polyederpaares Φ mit $\tau' \leqq \tau$ und gibt es auf τ zu einem ζ^Φ kein $\zeta^\Psi < \zeta^\Phi$, so gibt es auch in τ' kein solches ζ^Ψ.

Beweis: Wir führen vollständige Induktion nach $\dim \zeta^\Phi = n$. Für $n = 0$ ist offenbar alles trivial, weil es für ein 0-dimensionales Polyeder nur eine Triangulation gibt. Nehmen wir also an, unsere Behauptung sei für $n-1$ bewiesen. Daraus folgt aber wegen B und A, daß jedes ζ^Ω mit $\dim \zeta^\Omega \leqq n-1$ atomar ist und es ein $z = \Sigma\, a_i \sigma_i^r$ mit $\zeta^\Omega \geqq z$ gibt. Wir nehmen also an, es habe ζ^Φ die Dimension n. Man sieht, wie oben, leicht, daß es in Φ mindestens ein n-dimensionales Simplex σ^n geben muß. Nun nehmen wir an, es wäre C falsch, es soll also ein σ^n aus τ geben, so daß $|\sigma^n| = \cup\, |\sigma_{1i}^n|$ mit $\sigma_{1i}^n \in \tau'$ ist, daß σ_{11}^n nicht zu einem ζ^Φ mit $\zeta^\Psi < \zeta^\Phi$ gehört, aber es ein $\sigma^{n-1} < \sigma_{1i}^n = \sigma_1^n$ in Ψ gibt, zu welchem kein $\sigma'^n \neq \sigma^n$ mit $\sigma^{n-1} < \sigma'^n$ in Ψ vorhanden ist. Ein solches Randsimplex nennen wir frei.

D. Ist $\sigma^{n-1} < \sigma^n$ in τ ein freies Randsimplex vor $|\zeta^\Phi|$, so ist entweder σ^{n-1} überflüssig (d. h. es gibt ein $\zeta^\Psi < \zeta^\Phi$ mit $\Psi > |\sigma^n|$) oder aber es gehört σ^{n-1} zu $|\partial \zeta^\Phi|$.

Aus D folgt, daß mit σ_{11}^n auch jedes σ_{1i}^n und damit ganz σ^n in ψ überflüssig war, was aber, da $\sigma^n \in \tau$ war, nicht sein durfte.

Beweis von D: Wir nehmen an, σ^n sei nicht überflüssig. Wir verwenden wieder, wie im Beweis von A (n-dimensionaler Fall) das Ausschneidungsaxiom und finden ein $\zeta^{\Omega}(\Omega = (|\sigma^n|, Rd|\sigma^n|))$. Es hat $\partial\zeta^{\Omega}$ die Form $\Sigma a_i \sigma_i^{n-1}$ mit $\sigma_1^{n-1} = \sigma^{n-1}$ und $a_1 \neq 0$. Wegen A für den Fall $n-1$ finden wir, daß sich jedes $z_1 \leqq \partial\zeta^{\Phi}$ darstellt als $\Sigma b_j \sigma_j^{n-1}$, wobei über alle $(n-1)$-dimensionalen Simplexe in Φ (in einer festen Triangulation) addiert wird und sich der Koeffizient b_j als Summe der oben für σ^{n-1} und σ^n berechneten a ergibt. Für σ_1^{n-1} ist nun aber $b_j = a_1 \neq 0$, und daher ist $|\sigma^{n-1}| \subset |\partial\zeta^{\Phi}|$.

Um den vollständigen Satz von Eilenberg und Steenrod herauszubekommen, müßte man sich jetzt noch über die induzierten Abbildungen Gedanken machen. Für die Inklusionen war alles klar, weil wir aus der Kenntnis der Atome einer exakten Homologiestruktur bereits alles über dieselbe entnehmen können, solange wir uns auf einer V-Kategorie befinden, d. h. einer solchen, wo nur Inklusionen als Abbildungen von Belang sind. Mit Hilfe des Homotopieaxiomes und des Satzes von der simplizialen Approximation einer beliebigen stetigen Abbildung kann man aber auch den allgemeinen Fall leicht behandeln. Wir wollen hier nur den folgenden Satz formulieren:

Satz 3.1.: *Erfüllt $\mathfrak{V}$ auf P_v alle Axiome von* Eilenberg-Steenrod, *so ist* $\mathfrak{V}(P_v) = \mathfrak{P}(P_v)$.

Dieser Satz würde auch noch dann richtig bleiben, wenn die betrachteten Polyeder nicht mehr geradlinig sind, weil aus den ursprünglichen Eilenberg-Steenrodschen Axiomen die topologische Invarianz von $\mathfrak{V}$ folgt. Der Schwerpunkt des Beweises lag offenbar da, wo gezeigt werden sollte, daß $\mathfrak{V}$ atomar ist, also bei der Behauptung B. Aus Satz 4.4 [3] folgt leicht noch folgender allgemeiner Eindeutigkeitssatz:

Satz 3.2.: *Jede exakte atomare Homologiestruktur $\mathfrak{U}$, die die gleichen Atome wie $\mathfrak{P}$ hat, fällt mit $\mathfrak{S}$ auf jeder beliebigen V-Kategorie B_v zusammen. Hier ist die Forderung „atomar" nicht mehr aus den Eilenberg-Steenrodschen Axiomen herleitbar und darum unentbehrlich.*

4. Dualisierbarkeit von $\mathfrak{S}$

In diesem Abschnitt soll die zu $\mathfrak{S}$ duale Homologiestruktur konstruiert werden, die sich darstellt als Kohomologietheorie auf der V-Kategorie aller Restmengen von A, die natürlich mit A wieder identisch ist. Wegen des im vorigen Abschnitt Besprochenen können wir zunächst voraussetzen, daß auch ein Isomorphismus zwischen den relativen Homologiegruppen der Restmengen der Polyeder und den Kohomologiegruppen der betreffenden Polyeder selbst gegeben ist.

Sei $z_{\mathfrak{S}}$ ein absolutes Atom von $\mathfrak{S}$, von dem wir zunächst annehmen, daß es erzeugend ist. Wir beschreiben es durch ein Erzeugendensystem $\{\zeta^{0_i}\}$ in dem Ideal aller polyedralen Homologieklassen mit $\zeta^{0_i} \in \mathfrak{P}(0)$ und $\zeta^{0_i} \leqq \zeta^{0_{i-1}}$. Da ζ^{0_i} ein duales Gegenstück in $R^n - 0_i = P_i$ hat, gibt es dort eine auf-

steigende Folge $\varkappa^{P_i} \geqq \varkappa^{P_{i-1}}$ für die entsprechenden Kohomologieklassen. Es wird $\cup P_i = R^n - \cap 0_i = P$, welches eine offene Menge ist, die trianguliert werden kann. Eine solche Triangulation heiße τ. Wir können, wie man leicht sieht, voraussetzen, daß die P_i eine aufsteigende Polyederfolge in der Triangulation ζ bilden. Dementsprechend findet man eine aufsteigende Folge $\{c_i\}$ von Kozyklen auf τ, so daß $\varkappa^{P_i}$ von c_i erzeugt wird, und kommen zu einem — im allgemeinen unendlichen — Kozyklus c auf τ. Sei jetzt $\{\zeta^{0'_i}\}$ bzw. $\{\varkappa^{P'_i}\}$ ein anderes Erzeugendensystem von $z_{\mathfrak{S}}$, so kommen wir zu einem c_1, welches zu c in dem Sinne homolog ist, daß die die Kohomologie bewirkende Kette x unendlich sein kann, weil sie aus einer Folge von solchen $\{x_i\}$ mit x_i auf P_i hervorging. Mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen wir die durch unendliche Kohomologie erzeugte Klasse von c auf τ.

In [3], 1.5 haben wir gezeigt, daß bei der Dualisierung der Homologiesequenz zu einer Kohomologiesequenz der Randoperator ∂ in j^* übergeht. Wir haben die Möglichkeit, in der gleichen Weise wie eben auch, relative erzeugende starke Atome zu beschreiben, und kommen zu den oben bereits beschriebenen unendlichen Koketten x. Durch Summen und Differenzbildung erhalten wir aus den starken erzeugenden Atomen alle anderen, wie es in [3] ausgeführt wurde. Auch diese stellen sich wieder als unendliche Ketten auf τ dar. Es ist $j^* \tilde{x} = \tilde{c}$ mit einem $|x| = (P, R)$, wenn für die Urbilder $\partial\, x_{\mathfrak{S}} = z_{\mathfrak{S}}$ galt. Ist hingegen $j^* \tilde{x} = \tilde{c}$, so sieht man, da der Isomorphismus des Pontrjaginschen Dualitätssatzes als ein solcher eineindeutig ist, daß dann auch $\partial\, x_{\mathfrak{S}} = z_{\mathfrak{S}}$ gilt.

Es folgt auch aus obigen Betrachtungen, daß, wenn $z_{1\mathfrak{S}} \sim z_{2\mathfrak{S}}$ in X (X kompakt) ist, dies besagt, daß für zwei Kozyklen c_1 und c_2, die z_1 bzw. z_2 in $\mathfrak{D}$ repräsentieren, $c_1 \sim c_2$ in $R^n - X$ gilt. Sei also X ein beliebiger Raum, so sieht man, daß, wenn wir $H_{\mathfrak{D}}(X)$ erklären, als direkten Limes aller $H\infty(U)$ (U offen $U \supset X$), wobei auf U unendliche Kozyklen mit unendlichen Berandungsketten erklärt werden, $\mathfrak{D}$ das zu $\mathfrak{S}$ duale Gegenstück ist.

In [5] zeigt K. SITNIKOW durch ein geometrisches Lemma, daß $\mathfrak{D}$ isomorph ist zur Cechschen Kohomologietheorie mit unendlichen, aber sternendlichen Überdeckungen.

Lemma: Zu jeder Überdeckung ω von X gibt es eine Umgebung $U(X)$ und eine Triangulation τ davon, so daß die Sternüberdeckung von τ und ω isomorphe Nerven haben.

Dieser Beweis ist geometrisch, wir wollen ihm einen mehr algebraischen an die Seite stellen, der die Ergebnisse in [3] über Homologiestrukturen, die exakt sind, ausnutzt.

Wir nennen $\mathfrak{D}$ die Kohomologietheorie, die wir oben beschrieben haben, und $\tilde{\mathfrak{S}}$ die zu $\mathfrak{S}$ duale Kohomologietheorie, es soll gezeigt werden, daß $\tilde{\mathfrak{S}} \cong \mathfrak{D}$ ist. Es ist $\tilde{\mathfrak{S}}$ atomar, weil $\mathfrak{S}$ es ist, und da jede Folge $\{\varkappa^{P_i}\}$ ($P_i \in P$) sowohl in $\tilde{\mathfrak{S}}$ als in $\mathfrak{D}$ ein Element $\varkappa^R$ auf $R = \cup P_i$ definiert, ist auch $\mathfrak{D}$ atomar, mit den gleichen Atomen wie $\tilde{\mathfrak{S}}$. Nun aber ist $\mathfrak{D}$ exakt und wegen Satz 4.4 [3], d. h. aber, da jede atomare, exakte Homologiestruktur projektiv ist, ist $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{D}$.

Satz 4: ***Es gilt auf* A *der folgende Dualitätssatz:***

$$H_{\mathfrak{S}_q}(X) \cong H^p{}_{\mathfrak{D}}(R^n - X) \qquad (p + q = n - 1)\,.$$

Hierbei ist $\mathfrak{S}$ die Sitnikowsche Homologietheorie und $\mathfrak{D}$ die Cechsche Kohomologietheorie auf unendlichen, sternendlichen Überdeckungen.

5. Die Homologiestruktur $\mathfrak{W}$

Für unsere Zwecke empfiehlt es sich, eine neue Homologiestruktur einzuführen, die sich wie folgt beschreiben läßt:

Definition 1: Sei $\{z_i\}$ eine beliebige abzählbare Folge von ε_i-Ketten mit $\varepsilon_i \to 0$, die alle auf einem kompakten Paar Φ liegen, so sagen wir für beliebiges $\psi \supseteq \Phi$ ($\psi \subset A_p$), daß $z = \{z_i\}$ auf Ψ einen Zyklus definiert. Es soll $z \sim 0$ heißen, wenn es berandet ($\{\partial x_i\} = \partial \{x_i\}$).

A. $\mathfrak{W}$ ist exakt.

Beweis: Das einzige, was wir zeigen müssen, ist, daß wenn x eine $\mathfrak{W}$-Kette mit $\partial x = 0$ ist, x ein $\mathfrak{W}$-Zyklus ist, was aber unmittelbar aus der Definition folgt.

Offenbar unterscheiden sich $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{S}$ dadurch, daß bei $\mathfrak{S}$ zwischen den Folgengliedern z_i noch eine Homologie gefordert wird.

B. $\mathfrak{W}$ ist atomar.

Beweis: Dieser Beweis ist eine vereinfachte Form des entsprechenden Beweises für $\mathfrak{S}$ in 2 B, auf den wir hier Bezug nehmen. Der Beweis von (β) und von (γ) überträgt sich wörtlich. Im Beweis von (α) muß man berücksichtigen, daß das dort konstruierte $u_k = \Sigma\, y_k^j$, welches die Homologie zwischen c und z_i herstellte, nicht die (bei $\mathfrak{W}$ nicht vorhandenen) x_j^i, sondern nur die y_j^i benutzt.

Man sieht leicht, daß schon auf $P\mathfrak{S} \neq \mathfrak{W}$ ist. Man nehme nur irgend zwei polyedrale Zyklen z_1 und z_2 mit $z_1 \nsim z_2$ auf $|z_1| \cup |z_2|$ und bilde die Folgen $z = \{x_i\}$ einmal mit $x_i = z_1$ für $i \equiv 0 \bmod 2$ und $x_i = z_2$ für $i \not\equiv 0 \bmod 2$ und zum anderen mit $x_i = z_2$ für $i \equiv 0 \bmod 2$ und $x_i = z_1$ mit $i \not\equiv 0 \bmod 2$.

C. $\mathfrak{W}$ ist dualisierbar.

Beweis: Sei $z_{\mathfrak{W}}$ ein Atom, so nehmen wir die Menge aller $0 \geqq |z|$ mit $0 \in O$ und finden eine unendliche Menge $\{\zeta_j^0\}$ ($j = 1, \ldots$) für jedes 0, so daß alle diese Familien von $\{\zeta_j^0\}$ das Ideal $z_{\mathfrak{W}}$ bilden. Damit zerfällt das Ideal $z_{\mathfrak{W}}$ in unendlich viele Ideale in $\mathfrak{P}(0)$. In jedem nehmen wir ein Erzeugendensystem $\{\zeta_j^{0_i}\}$ (j fest) und finden, genau wie in 4, einen Kozyklus $c_j = c$ in $R^n - \cap\, 0_i$. Indem wir die gleichen Betrachtungen wie dort wiederholen, kommen wir schließlich zur $\mathfrak{W}$ dualen Kohomologietheorie $\widetilde{\mathfrak{W}}$, die sich so beschreiben läßt: Sei $X \in A$ und $\{\ddot{U}\}$ das System aller Umgebungen von X, und $\omega^n = \{c_j^n\}$ eine Folge von Kozyklen auf U. Wie in Definition 1 bilden wir hier wieder Klassen, aber jetzt mit unendlichen Ketten, wie auch jedes c_j^n schon unendlich sein kann. Die so entstehende Kohomologiegruppe nennen wir $H_\infty(U)$. $H_{\widetilde{\mathfrak{W}}}(X)$ ist der direkte Limes aller $H\,\infty\,(U)$ für alle $U \supset X$.

Auf Grund des in 4 angeführten geometrischen Lemmas sieht man ein, daß $\widetilde{\mathfrak{W}}$ auch eine entsprechende Formulierung in der Cechschen Terminologie zuläßt.

Die Homologietheorie $\mathfrak{W}$ hat für uns nur den einen Zweck, die Homologiestruktur $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}}$ zu konstruieren, die uns folgende Überlegung liefert: Jeder Sitnikowsche Zyklus ist erst recht ein Zyklus in $\mathfrak{W}$, den wir $\varphi(z_{\mathfrak{W}})$ nennen. Man kann also davon sprechen, daß $z_{\mathfrak{S}} \sim 0$ bezüglich $\mathfrak{W}$ ist. Die Zuordnung ist natürlich nur „in" und nicht „auf".

Demgemäß definieren wir:

Definition 2: Die Homologiestruktur $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}}$ wird durch Atome $z_{\mathfrak{S}}$ erzeugt. Es soll $z_{\mathfrak{S}} \sim 0$ bezüglich $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}}$ sein, wenn $\varphi(z_{\mathfrak{S}}) \sim 0$ bezüglich $\mathfrak{W}$ ist.

D. Es stimmt in der Kategorie M aller metrischen Räume $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}}$ mit der Vietorisschen und damit mit der Cechschen Homologietheorie $\mathfrak{V}$ mit kompakten Träger überein.

Beweis: Es ist bekannt, daß die Vietorissche Homologietheorie und die Cechsche mit kompaktem Träger übereinstimmen, und den Beweis, daß $\mathfrak{S}_{\mathfrak{W}}$ zu ersterer isomorph ist, sieht man sofort, wenn man sich an die Definition von $\mathfrak{V}$ erinnert: Die Zyklen sind Sitnikowsehe Zyklen, und es soll $z \sim 0$ bezüglich $\mathfrak{V}$ sein, wenn es eine Folge $\{Y_i\}$ mit $\partial y_i = z_i$ gibt (Masche $y_i \to 0$). Aus B, C und 4 folgt, daß die Vietorissche Homologiestruktur dualisierbar sind, was erstmalig in [6] von K. SITNIKOW bewiesen wurde.

Satz 5.1. *Die Cechsche Homologietheorie mit kompaktem Träger* $\mathfrak{V}$ *auf der Kategorie* A *ist dualisierbar, d. h. es gibt eine Kohomologietheorie* $\tilde{\mathfrak{V}}$, *so daß*

$$H^p_{\tilde{\mathfrak{V}}}(X) \cong H_{q\mathfrak{V}}(R^n - X) \qquad (X \in A)\; p + p = n - 1$$

gilt.

Wir haben schon eine abgeschwächte Form des Eilenberg-Steenrodschen Eindeutigkeitssatzes, die sich aber auch viel leichter beweisen ließ, kennengelernt und benutzen nun den Satz 4.6.1 aus [3], um einen anderen Isomorphiesatz herzuleiten:

Satz 4.6.1. [3]. Ist auf einer V-Kategorie $E_p \subset A_p$ oder für einen bestimmten Koeffizientenbereich ein atomares $\mathfrak{V}$ bereits exakt, so ist $\mathfrak{V}(E_p) = \mathfrak{V}^*(E_p)$ [2]). Dies liefert uns jetzt den Satz:

Satz 5.2. *Für kompakte Koeffizientenbereiche fällt die Cechsche Homologietheorie mit kompaktem Träger (die Vietorissche Homologietheorie) mit der Sitnikowschen zusammen.*

Beweis: Die Vietorissche Homologietheorie $\mathfrak{V}$ ist atomar, und es gilt $\mathfrak{V}^* = \mathfrak{S}$. Nach einem Satz von EILENBERG und STEENROD [4] ist für kompakte Koeffizientenbereiche die Cechsche Homologietheorie exakt. Für ein Kompaktum X fällt die Cechsche mit $\mathfrak{V}$ (= Vietorisscher) und damit also mit $\mathfrak{S}$ zusammen.

Da $\mathfrak{S}$ eine Homologietheorie mit kompaktem Träger ist, ist unser Satz bewiesen.

---

[2]) Man berücksichtige, daß atomar und Bedingung (**) in 3 mit unserer Forderung von atomar identisch ist, da wir atomar nannten: Jedes Hauptideal ist in einem maximalen Kernideal enthalten.

6. Induzierte Homologiestrukturen

Seien $\bar{A} \subset B$ zwei V-Kategorien und $\mathfrak{U}$ eine Homologiestruktur, die auf A_p atomar sind. Wir hatten $\mathfrak{U}(B_p)$ so erklärt, daß ein Atom z in $\mathfrak{U}(\bar{A}_p)$ in $\Phi \in B_p$ dann und nur dann erzeugen soll, wenn $|z| \leq \Phi$, wobei diese Inklusion ja eindeutig erklärt war, da $\bar{A} \subset B$. Nun gehen wir zu einem etwas allgemeinen Fall über. Sei A_1 eine V-Kategorie, die in einer Kategorie A enthalten ist. Es braucht A keine reine V-Kategorie mehr zu sein, sondern es kann zusätzlich zu den Inklusionen noch weitere Abbildungen geben. Dabei kann es auch vorkommen, daß die Objekte von A_1 und A übereinstimmen, aber es in A mehr Abbildungen gibt. Diese Kategorie, die durch Erweiterung der Menge aller Abbildungen von A_1 durch die von A entsteht, nennen wir $A_1(A)$. Wenn wir eine Abbildung mit f bezeichnen, so meinen wir, daß sie keine Inklusion von A_1 ist. Sei nun $\mathfrak{U}$ eine atomare Homologiestruktur auf A_{1p}. Wir bilden eine neue Homologiestruktur $\mathfrak{U}_I(A_p)$, indem wir die Homologieklassen ζ_I^p von $\mathfrak{U}_I$ durch Paare $z_I = (z, f)$ erzeugen lassen, wobei z ein Atom in $\mathfrak{U}$ ist und f eine Abbildung von $|z|$ in $\Phi \in A_p$. Es soll $(z_1, f_1) \sim (z_2, f_1)$ in Φ sein, wenn es ein $\Psi \geq |z_1| \vee |z_2|$ mit $\psi \in A_{1p}$ und eine Abbildung f von Ψ in Φ gibt, die eine Fortsetzung von f_1 und f_2 ist. Wir nennen diese Paare (z, f) die induzierten Atome in A_p. Die Addition und den Randoperator erklärt man in naheliegender Weise.

Nun kann es aber auch vorkommen, daß wir von den Atomen von $\mathfrak{U}(A_{1p})$ nur gewisse heranziehen, etwa im Falle der Sitnikowschen Homologietheorie alle simplizialen Atome. Wir sprechen sodann von den durch die Menge K von Atomen in $\mathfrak{U}(A_{1p})$ induzierten Atomen und entsprechend von der Homologiestruktur $\mathfrak{U}_K(A_p)$.

A. Sei K die Menge aller simplizialen Atome, und $A_{1p} = P_p$, so ist $\mathfrak{P}_K(A_p)$ (A_p Kategorie aller Teilmengen des R^n) mit der singulären Homologietheorie identisch.

Beweis: Die singuläre Homologietheorie wird bekanntlich erzeugt durch Paare (σ^n, f), wobei σ^n ein orientiertes Simplex und f eine stetige Abbildung von f nach einem Raum X ist. Der Beweis, daß dies mit unserer Definition übereinstimmt, ist technisch und kann hier übergangen werden.

B. Sei I die Gesamtheit aller Atome von $\mathfrak{S}$ und wieder $A_{1p} = A_p$, so is

$$\mathfrak{S}_I(A_p) = \mathfrak{S}(A_p)\,.$$

Beweis: Jedes Atom von $\mathfrak{S}$ ist ein in Abschnitt 2, Definition 1, definierter Sitnikowscher Zyklus. Ebenso ist das f-Bild eines solchen Atomes z, welches offenbar mit (z, f) identifiziert werden kann, ein solcher Sitnikowscher Zyklus, aber nicht mehr notwendigerweise ein Atom. Da nun $\mathfrak{S}$ durch diese Zyklen definitionsgemäß erzeugt wurde, ist das gerade die Behauptung.

Die induzierten Atome sind im allgemeinen selber keine Atome mehr. Sei $\tilde{K}$ bzw. $\tilde{I}$ die Gesamtheit aller durch K bzw. I induzierten Atome.

Es kann sein, daß in einem $\Phi \in A_p$, $z_{\tilde{K}}$ als Element von $\tilde{I}$, aber nicht als Element von $\tilde{K}$ berandet. Wir nennen $N(\Phi)$ die Untergruppe aller Klassen von in diesem Sinne rel. $\tilde{K}$ berandenden induzierten Atomen.

C. Sei $\mathfrak{U}$ exakt, so ist $F(\Phi) = \frac{H_{\mathfrak{U}_K}(\Phi)}{N(\Phi)}$ eine Untergruppe von $H_{\mathfrak{U}_I}(\Phi)$.

Beweis: Es ist $\tilde{K} \subset \tilde{I}$. Jedes $\zeta^{\Phi} \in F$ wird durch ein $z_{\tilde{K}}$ erzeugt. Dabei ist $z_{\tilde{K}} \sim 0$ rel. F, wenn es ein Element von $\tilde{I}$ berandet, was offenbar die Behauptung zeigt.

Insbesondere folgt daraus, daß, wenn $\mathfrak{U}_I$ atomar ist, auch F atomar ist. Dies trifft z. B. zu, wenn $\mathfrak{U}_I = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{U}_K$ die singuläre Homologietheorie ist.

Definition 1: Wir nennen eine Homologiestruktur $\mathfrak{U}$ atomar in A_p rel. A_1, wenn $\mathfrak{U}$ in A_{1p} atomar ist und wenn es in A_p durch die induzierten Atome von A_{1p} erzeugt wird.

Wir können unsere ganzen Betrachtungen, die wir in [3] für atomare Strukturen angestellt hatten, für relative atomare Strukturen wiederholen und kommen zu vollkommen gleichlautenden Sätzen, in denen stets nur das Wort „Atom" durch „induziertes Atom" ersetzt werden müßte. Zu jedem $\mathfrak{U}$, welches atomar rel. A_1 ist, könnte man ein $\mathfrak{U}^*$ rel. A_1 konstruieren, welches exakt und projektiv ist. Umgekehrt wüßte man auch wieder, daß exakt und projektiv äquivalente Begriffe sind. Insbesondere hätten wir hier als wichtige Anwendung:

Satz 6: *Die singuläre Homologietheorie ist atomar rel. P_p und projektiv, solange nur relativ atomare Homomorphismen als Abbildungen und simpliziale Atome als Atome in P_p zugelassen sind.*

Diese letzte Behauptung folgt daraus, daß die singuläre Homologietheorie exakt ist.

Literatur

[1] ALEXANDROW, P. S.: Die grundlegenden Dualitätssätze für nicht abgeschlossene Mengen im n-dimensionalen Raum. Mat. Sborn. **36**, 161—232 (1947). — [2] ALEXANDROW, P. S.: Der topologische Dualitätssatz von PONTRJAGIN. Mosk. Gosud. U. U. Sapiski 163, Mat. 6. — [3] BAUER, F. W.: Über Fortsetzungen von Homologiestrukturen. Math. Ann. **135**, 93—114 (1958). — [4] EILENBERG-STEENROD: Foundations of Algebraic Topology. Princeton 1952. — [5] SITNIKOW, K. A.: Kombinatorische Topologie nicht abgeschlossener Mengen. I. Mat. Sborn. **76**, 34 (1954). — [6] SITNIKOW, K. A.: Neue Dualitätsbeziehungen für nicht abgeschlossene Mengen. D.A.N. **1954**, 96, 4, Nr. 5.

(Eingegangen am 14. Februar 1958)

SCHMIDT, W.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 365—374 (1958)

Flächenapproximation beim Jacobialgorithmus

Von
WOLFGANG SCHMIDT in Wien

1. Sei P (α_1, α_2) ein Punkt des R_2. Nicht beide Koordnaten sollen rational sein. Wir bilden den Jacobialgorithmus von α_1, α_2. Unter Verwendung der Bezeichnung von [5][1]) bilden wir

$$(1)\qquad D_\nu = \left(\alpha_1 - \frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}\right)\left(\alpha_2 - \frac{A_2^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}\right) - \left(\alpha_1 - \frac{A_1^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu-1)}}\right)\left(\alpha_2 - \frac{A_2^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu-1)}}\right).$$

D_ν ist zweimal gleich der Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten P und den beiden aufeinander folgenden „Näherungspunkten"

$$P_\nu = \left(\frac{A_1^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}, \frac{A_2^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}\right) \quad \text{und} \quad P_{\nu-1} = \left(\frac{A_1^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu-1)}}, \frac{A_2^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu-1)}}\right).$$

In dieser Arbeit beweisen wir den

Satz. *Für unendlich viele ν ist*

$$(2\text{a})\qquad D_\nu < 1/\alpha\, A_0^{(\nu)} (A_0^{(\nu-1)})^2,$$

wobei α die reelle Wurzel von $\alpha^3 - \alpha^2 - 31 = 0$ ist. ($\alpha = 3{,}51\ldots$) *α ist bestmöglich genau dann, wenn im Algorithmus von α_1, α_2 für $\nu \geq N$ $a_2^{(\nu)} = 1$, $a_1^{(\nu)} = 0$ ist. Dies ist z. B. bei $\varrho^2 - \varrho, \varrho$ der Fall, wobei ϱ die reelle Nullstelle von $\varrho^3 - \varrho^2 - 1 = 0$ ist.*

Endet der Algorithmus nicht so, dann ist unendlich oft

$$(2\text{b})\qquad D_\nu < 1/\beta\, A_0^{(\nu)} (A_0^{(\nu-1)})^2,$$

wobei β die reelle Wurzel von $\beta^3 - 3\beta^2 - 23 = 0$ ist. ($\beta = 4{,}26\ldots$) *β ist bestmöglich genau dann, wenn für ein N und alle $n > 0$ $a_2^{(N+2n)} = 1$, $a_2^{(N+2n+1)} = 2$, $a_1^{(N+n)} = 0$, wenn also der Algorithmus so endet, wie jener von $\sigma^2 - \sigma, \sigma$, wobei σ die reelle Nullstelle von $\sigma^3 - \sigma - 1 = 0$ ist.*

Endet der Algorithmus auf keine der beiden angegebenen Arten, dann ist unendlich oft

$$(2\text{c})\qquad D_\nu < 1\Big/\frac{13}{3}\, A_0^{(\nu)} (A_0^{(\nu-1)})^2 .$$

2. Bemerkung 1. Der Satz ist analog den Approximationssätzen mit Ungleichungen

$$\left|\alpha - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < 1/\sqrt{5}\; B_\nu^2 \;\text{ bzw. }\; \left|\alpha - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < 1/\sqrt{8}\; B_\nu^2$$

bei Kettenbrüchen. Vermutlich läßt er sich, ähnlich wie diese, so fortsetzen, daß wir eine Markoffsche Kette erhalten[2]). Wahrscheinlich lassen sich analoge

[1]) Zum Verständnis sind die ersten fünf Paragraphen von [5] hinreichend
[2]) Siehe etwa [1], Kapitel II, [2] Kapitel XI oder [3] Kapitel II

Sätze bei Jacobialgorithmen höherer Ordnung aufstellen. Die Zahl $\frac{13}{3}$ in (2c) kann verbessert werden.

Bemerkung 2. „Flächenapproximation" findet sich auch in [4], Satz 13.

Bemerkung 3. Wir werden im folgenden nur den Fall diskutieren, daß in der Entwicklung keine Störungen auftreten. Sind nämlich Störungen, so ist $D_\nu = 0$ für großes ν.

Bemerkung 4. Man erhält leicht die folgenden schwächeren Schranken:

a) (3) $$D_\nu < 1/A_0^{(\nu)}(A_0^{(\nu-1)})^2.$$

Beweis. Aus Formel (5) in [5] folgt durch Herabsetzen der oberen Indices um 1

$$2F(P_{\nu-1}, P_\nu, P_{\nu+1}) = \begin{vmatrix} A_1^{(\nu-1)}/A_0^{(\nu-1)} & A_1^{(\nu)}/A_0^{(\nu)} & A_1^{(\nu+1)}/A_0^{(\nu+1)} \\ A_2^{(\nu-1)}/A_0^{(\nu-1)} & A_2^{(\nu)}/A_0^{(\nu)} & A_2^{(\nu+1)}/A_0^{(\nu+1)} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1/A_0^{(\nu+1)}A_0^{(\nu)}A_0^{(\nu-1)},$$

wobei $F(P_{\nu-1}, P_\nu, P_{\nu+1})$ die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $P_{\nu-1}, P_\nu, P_{\nu+1}$ bedeutet. Infolge Formel (2) in [5] ist

$$\alpha_i = \frac{A_i^{(\nu-1)} + A_i^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu-1)} + A_i^{(\nu+1)}\alpha_2^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu)}\alpha_1^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu+1)}\alpha_2^{(\nu-1)}} \qquad (i = 1, 2),$$

wobei $\alpha_i^{(\nu-1)} \geqq 0$. Daher liegt P (α_1, α_2) im Dreieck mit den Eckpunkten $P_{\nu-1}, P_\nu, P_{\nu+1}$, und es folgt

$$D_\nu = 2F(P, P_{\nu-1}, P_\nu) \leqq 1/A_0^{(\nu+1)}A_0^{(\nu)}A_0^{(\nu-1)} < 1/A_0^{(\nu)}(A_0^{(\nu-1)})^2.$$

b) Setzt man $E_\nu = 2F(P, P_{\nu+1}, P_{\nu-1})$, so gilt mindestens eine der Ungleichungen

(4) $$D_\nu \leqq 1/3A_0^{(\nu)}(A_0^{(\nu-1)})^2, \quad D_{\nu+1} \leqq 1/3A_0^{(\nu+1)}(A_0^{(\nu)})^2, \quad E_\nu \leqq 1/3A_0^{(\nu-1)}(A_0^{(\nu+1)})^2.$$

Beweis. Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Nun ist

$$D_\nu + D_{\nu+1} + E_\nu = 2F(P_{\nu+1}, P_\nu, P_{\nu+1}) = 1/A_0^{(\nu+1)}A_0^{(\nu)}, A_0^{(\nu-1)}$$

und, indem man die reziproken Größen von $A_0^{(\nu-1)}, A_0^{(\nu)}, A_0^{(\nu+1)}$ einführt,

$$a^2b + b^2c + c^2a < 3abc.$$

Diese Ungleichung führt aber bei $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ auf einen Widerspruch.

3. Lemma 1.

(5) $$F_\nu = D_\nu A_0^{(\nu)}(A_0^{(\nu-1)})^2 = \left[\frac{1}{\alpha_2^{(\nu-1)}} + \frac{A_0^{(\nu)}}{A_0^{(\nu-1)}}\frac{\alpha_1^{(\nu-1)}}{\alpha_2^{(\nu-1)}} + \frac{A_0^{(\nu+1)}}{A_0^{(\nu-1)}}\right]^{-1}.$$

Beweis. Wir setzen $\alpha_1 = \frac{x_1}{x_0}$, $\alpha_2 = \frac{x_2}{x_0}$, allgemein $\alpha_1^{(\nu)} = \frac{x_1^{(\nu)}}{x_0^{(\nu)}}$, $\alpha_2^{(\nu)} = \frac{x_2^{(\nu)}}{x_0^{(\nu)}}$ und arbeiten mit den homogenen Gleichungen (α) aus [5]. Dann folgt aus (5) [5] und (2*) [5]

$$\begin{vmatrix} x_1 & A_1^{(\nu-1)} & A_1^{(\nu)} \\ x_2 & A_2^{(\nu-1)} & A_2^{(\nu)} \\ x_0 & A_0^{(\nu-1)} & A_0^{(\nu)} \end{vmatrix} = x_2^{(\nu-1)},$$

$$D_\nu = x_2^{(\nu-1)}/A_0^{(\nu-1)}A_0^{(\nu)}x_0,$$

(6) $$F_\nu = x_2^{(\nu-1)}A_0^{(\nu-1)}/x_0.$$

Nach (2*) [5] ist weiter

$$x_0 = A_0^{(\nu-1)} x_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu)} x_1^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu+1)} x_2^{(\nu-1)}.$$

Daraus und aus (6) folgt die Behauptung.

Wir setzen

$$(A_0^{(\nu+3)}, A_1^{(\nu+3)}, A_2^{(\nu+3)}) = K\begin{pmatrix} & a_2^{(0)} & a_2^{(1)} & \dots & a_2^{(\nu)} \\ a_1^{(0)} & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(\nu)} & \end{pmatrix},$$

um anzudeuten, daß das Tripel eine Funktion der $a_i^{(\mu)}$ ist. Unter

$$K\begin{pmatrix} & a_2^{(0)} & a_2^{(1)} & \dots \\ a_1^{(0)} & a_1^{(1)} & \dots & \end{pmatrix}$$

verstehen wir den Wert des Kettenbruches, d. h. den Punkt

$$P(\alpha_1, \alpha_2), \text{ wobei } \alpha_i = \lim_{\nu\to\infty} A_i^{(\nu)}/A_0^{(\nu)}. \qquad (i = 1, 2)$$

Lemma 2.

(7) $$(A_2^{(\nu+2)}, a_1^{(\nu+1)} A_2^{(\nu+2)} + A_1^{(\nu+1)}, A_2^{(\nu+3)}) = K\begin{pmatrix} & a_2^{(\nu)} & a_2^{(\nu-1)} & \dots & a_2^{(0)} \\ a_1^{(\nu+1)} & a_1^{(\nu)} & \dots & a_1^{(1)} & \end{pmatrix}$$

(8) $$(A_0^{(\nu+2)}, a_1^{(\nu+1)} A_0^{(\nu+2)} + A_0^{(\nu+1)}, A_0^{(\nu+3)}) = K\begin{pmatrix} & a_2^{(\nu)} & a_2^{(\nu-1)} & \dots & a_2^{(1)} \\ a_1^{(\nu+1)} & a_1^{(\nu)} & \dots & a_1^{(2)} & \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Das Lemma ist analog den Formeln (5), (6), aus [6], § 4.

Beweis. Zunächst ergibt sich aus [5] (4) die Kontinuantenformel

$$A_2^{(\nu+3)} = \begin{vmatrix} a_2^{(0)} & -1 & & & & & \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & -1 & & & & \\ 1 & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & -1 & & & \\ & 1 & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & -1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & 1 & a_1^{(\nu)} & a_2^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

Durch Umklappen der Determinante um die Nebendiagonale sieht man, daß zumindest der Ausdruck für $A_2^{(\nu+3)}$ in (7) richtig ist.

Wir führen $B_i^{(\mu+3)} (i = 0, 1, \mu = 1, 2, \dots, \nu)$ durch

$$(B_0^{(\mu+3)}, B_1^{(\mu+3)}, B_2^{(\mu+3)}) = K\begin{pmatrix} & a_2^{(\nu)} & a_2^{(\nu-1)} & \dots & a_2^{(\nu-\mu)} \\ a_1^{(\nu+1)} & a_1^{(\nu)} & & a_1^{(\nu+1-\mu)} & \end{pmatrix}$$

ein. Dann ist nach dem oben bemerkten

(9) $$B_2^{(\nu+3)} = A_2^{(\nu+3)},$$

und ebenso ist $B_{2.1}^{(\nu+2)} = A_2^{(\nu+2)}, B_{2.2}^{(\nu+1)} = A_2^{(\nu+1)}$. Indem man die beiden letzten Zeilen von Seite 7 in [5] auf die B anwendet, erhält man

(10) $$B_0^{(\nu+3)} = B_{2.1}^{(\nu+2)} = A_2^{(\nu+2)}$$

und

(11) $$B_1^{(\nu+3)} = B_{0.1}^{(\nu+2)} + a_1^{(\nu+1)} B_{2.1}^{(\nu+2)} = A_2^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu+1)} A_2^{(\nu+2)}.$$

Aus (9), (10) und (11) folgt (7). (8) folgt aus (7) unter Zuhilfenahme der vorletzten Zeile auf Seite 7 in [5].

4. Lemma 3. Sei $a_2^{(\nu)} = 1, a_1^{(\nu)} = 0$ für $\nu \geq K$. *Dann ist*

$$F_\nu < \frac{1}{\alpha} \textit{ für mindestens jedes dritte } \nu > K + 2$$

$$F_\nu > \frac{1}{\alpha} \textit{ für mindestens jedes dritte } \nu > K + 2$$

und

$$\lim_{\nu \to \infty} F_\nu = \frac{1}{\alpha}$$

Beweis. **Für $\nu > K$ ist**

$$\alpha_1^{(\nu-1)} = \varrho^2 - \varrho, \quad \alpha_2^{(\nu-1)} = \varrho.$$

Aus Lemma 2 folgt für $\nu > K$

$$(A_0^{(\nu+2)}, A_0^{(\nu+1)}, A_0^{(\nu+3)}) = K \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{\nu - K + 2} & \begin{matrix} \alpha_2^{(K-1)} & \dots & \alpha_2^{(2)} & \alpha_2^{(1)} \\ 0 \quad \alpha_1^{(K-1)} & \dots & \alpha_1^{(2)} & \end{matrix} \end{pmatrix}$$

und

$$\lim_{\nu \to \infty} A_0^{(\nu+3)} / A_0^{(\nu+2)} = \varrho.$$

Weiter sind für $\nu > K + 2$ Rekursionsformeln

$$A_0^{(\nu)} = A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu-3)}$$

gültig. Auch für die Tripel $T^{(\nu)} = (A_0^{(\nu+2)}, A_0^{(\nu+1)}, A_0^{(\nu+3)})$ gilt

$$T^{(\nu)} = T^{(\nu-1)} + T^{(\nu-3)}. \tag{12}$$

Setzt man

$$Q^{(\nu)} = (r^{(\nu)}, s^{(\nu)}) = (A_0^{(\nu+1)}/A_0^{(\nu+2)}, A_0^{(\nu+3)}/A_0^{(\nu+2)}), \tag{13}$$

so liegt $Q^{(\nu+\mu)}$ infolge (12) im Dreieck mit Eckpunkten $Q^{(\nu)}$, $Q^{(\nu-1)}$, $Q^{(\nu-2)}$. Ist $\mu > 1$, so liegt $Q^{(\nu+\mu)}$ im Inneren des Dreiecks. Ebenso liegt

$$\lim_{\nu \to \infty} Q^{(\nu)} = (\varrho^2 - \varrho, \varrho) \tag{14}$$

im Dreieck mit den Eckpunkten $Q^{(\nu+4)}$, $Q^{(\nu+3)}$, $Q^{(\nu+2)}$, daher im Inneren des Dreiecks mit Eckpunkten $Q^{(\nu)}$, $Q^{(\nu-1)}$, $Q^{(\nu-2)}$.

$$x(\varrho^2 - \varrho - \alpha) + y + \varrho - 1 = 0$$

ist die Gleichung einer gewissen Geraden durch $(\varrho^2 - \varrho, \varrho)$. Folglich hat man für mindestens jedes dritte $\nu > K + 2$

$$r^{(\nu-2)}(\varrho^2 - \varrho - \alpha) + s^{(\nu-2)} + \varrho - 1 > 0$$

$$\varrho^2 - \varrho + \frac{\varrho - 1}{r^{(\nu-2)}} + \frac{s^{(\nu-2)}}{r^{(\nu-2)}} > \alpha.$$

Nun ist für $\nu > K$ nach Lemma 1

$$F_\nu = \left[\varrho^2 - \varrho + \frac{\varrho - 1}{r^{(\nu-2)}} + \frac{s^{(\nu-2)}}{r^{(\nu-2)}}\right]^{-1}. \tag{15}$$

Daher ist tatsächlich

$$F_\nu < \frac{1}{\alpha} \text{ für mindestens jedes dritte } \nu > K + 2.$$

Ebenso sieht man: $F_\nu > \frac{1}{\alpha}$ für mindestens jedes dritte $\nu > K + 2$. Schließlich ist nach (13), (14) und (15) $\lim F_\nu = \frac{1}{\alpha}$.

Lemma 4. *Gibt es in der Entwicklung von α_1, α_2, ein N, so daß*

$$a_2^{(N+2\nu)} = 1,\ a_2^{(N+2\nu+1)} = 2,\ a_1^{(N+\nu)} \geqq 0, \qquad (\nu \geqq 0)$$

dann ist

$$F_\nu < \frac{1}{\beta} \text{ für mindestens jedes dritte gerade } \nu > N+5$$

$$F_\nu > \frac{1}{\beta} \text{ für mindestens jedes dritte gerade } \nu > N+5.$$

Ebenso für ungerade ν.

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu = \frac{1}{\beta}$$

Beweis. Es ist $\alpha_i^{(N+\nu+2)} = \alpha_i^{(N+\nu)}\ (i = 1,2)$. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\alpha_1^{(N)} = 1/\alpha_2^{(N+1)} \quad \alpha_2^{(N)} = 1 + \alpha_1^{(N+1)}/\alpha_2^{(N+1)}$$

$$\alpha_1^{(N+1)} = 1/\alpha_2^{(N)} \quad \alpha_2^{(N+1)} = 2 + \alpha_1^{(N)}/\alpha_2^{(N)}.$$

Auflösung ergibt

$$\alpha_1^{(N)} = \sigma^2 - \sigma, \quad \alpha_2^{(N)} = \sigma$$

$$\alpha_1^{(N+1)} = \sigma^2 - 1, \quad \alpha_2^{(N+1)} = \sigma + 1.$$

a) Sei $\nu \equiv 1 + N \pmod 2$.

In diesem Falle ist $\alpha_1^{(\nu-1)} = \sigma^2 - \sigma$, $\alpha_2^{(\nu-1)} = \sigma$,

$$(A_0^{(\nu)}, A_0^{(\nu-1)}, A_0^{(\nu+1)}) = K\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & \ldots & & \alpha_2^{(N-1)} & \ldots & a_2^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1^{(N-1)} & & \ldots & a_1^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $\nu = N + 2\mu + 1$. Dann ist

$$\lim_{\mu\to\infty} A_0^{(\nu-1)}/A_0^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} A_0^{(N+2\mu)}/A_0^{(N+2\mu+1)} = \sigma^2 - 1$$

$$\lim_{\mu\to\infty} A_0^{(\nu+1)}/A_0^{(\nu)} = \lim_{\mu\to\infty} A_0^{(N+2\mu+2)}/A_0^{(N+2\mu+1)} = \sigma + 1.$$

Für gerade sowohl wie für ungerade $\nu > N + 5$ gilt die Rekursionsformel

$$A_0^{(\nu)} = 2A_0^{(\nu-2)} + 3A_0^{(\nu-4)} + A_0^{(\nu-6)}.$$

Setzen wir daher

$$T^{(\mu)} = (A_0^{(N+2\mu+1)}, A_0^{(N+2\mu)}, A_0^{(N+2\mu+2)}),$$

so ist

$$T^{(\mu)} = 2\,T^{(\mu-1)} + 3\,T^{(\mu-2)} + T^{(\mu-3)}.$$

Erklärt man

$$Q^{(\mu)} = (r^{(\mu)}, s^{(\mu)}) = (A_0^{(N+2\mu)}/A_0^{(N+2\mu+1)}, A_0^{(N+2\mu+2)}/A_0^{(N+2\mu+1)}),$$

so liegt $Q^{(\mu+3)}$ im Inneren des Dreiecks mit den Eckpunkten $Q^{(\mu)}$, $Q^{(\mu-1)}$, $Q^{(\mu-2)}$.

Ebenso liegt

$$\lim_{\mu\to\infty} Q^{(\mu)} = (\sigma^2 - 1, \sigma + 1)$$

im Inneren dieses Dreiecks.

$$x(\sigma^2 - 1 - \beta) + y + \sigma - 1 = 0$$

ist die Gleichung einer Geraden, die durch $(\sigma^2 - 1, \sigma + 1)$ geht. Für mindestens jedes dritte μ ist folglich

$$r^{(\mu-1)}(\sigma^2 - 1 - \beta) + s^{(\mu-1)} + \sigma - 1 > 0$$

$$\sigma^2 - 1 + \frac{1}{r^{(\mu-1)}}(\sigma - 1) + \frac{s^{(\mu-1)}}{r^{(\mu-1)}} > \beta .$$

Nun ist aber nach Lemma 1

$$F_{N+2\mu-1} = \left[\sigma^2 - 1 + \frac{1}{r^{(\mu-1)}}(\sigma - 1) + \frac{s^{(\mu-1)}}{r^{(\mu-1)}}\right]^{-1} < \frac{1}{\beta} .$$

Folglich ist für mindestens jedes dritte $\nu > N + 5$, das kongruent $N + 1 \pmod 2$, $F_\nu < \frac{1}{\beta}$. Ähnliche Überlegungen führen zu $F_\nu > \frac{1}{\beta}$. Man sieht weiter sofort $\lim\limits_{\mu\to\infty} F_{N+2\mu-1} = \frac{1}{\beta}$.

b) Der Fall $\nu \equiv N \pmod 2$ ist ähnlich zu behandeln.

5. **Lemma 5.** *Sei viermal nacheinander* $F_\nu \geq \frac{3}{13}$. *Genauer, sei*

$$F_\mu \geq \frac{3}{13} \qquad (\mu = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \nu + 3) . \tag{16}$$

Dann ist $a_2^{(\nu-1)} + a_1^{(\nu-1)} + a_1^{(\nu)} \leq 3$.

Beweis. Nach (6) bedeutet (16)

$$x_2^{(\mu-1)} A_0^{(\mu-1)} \geq \frac{3}{13} x_0 ,$$

$$x_0 - \frac{13}{3} x_2^{(\mu-1)} A_0^{(\mu-1)} \leq 0 . \qquad (\mu = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \nu + 3).$$

Es gibt daher Größen $\delta_\nu, \delta_{\nu+1}, \delta_{\nu+2}, \delta_{\nu+3}$, die wir später auch mit $\zeta_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \zeta_2$ bezeichnen werden, so daß $0 < \delta_\mu \leq 1$ und

$$x_0 - \frac{13}{3} \delta_\mu x_2^{(\mu-1)} A_0^{(\mu-1)} = 0 . \qquad (\mu = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \nu + 3). \tag{17}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} x_0 &= A_0^{(\nu)} x_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)} x_1^{(\nu)} + A_0^{(\nu+2)} x_2^{(\nu)} \\ &= A_0^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)} + A_0^{(\nu+1)} (a_1^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)} + x_2^{(\nu+2)}) + \\ &\quad + (a_2^{(\nu-1)} A_0^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu-1)} A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu-1)}) x_2^{(\nu)} . \end{aligned} \tag{18}$$

Ferner

$$x_2^{(\nu-1)} A_0^{(\nu-1)} = (a_2^{(\nu-1)} x_2^{(\nu)} + a_1^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)} + x_2^{(\nu+2)}) A_0^{(\nu-1)} \tag{19}$$

$$x_2^{(\nu+2)} A_0^{(\nu+2)} = x_2^{(\nu+2)} (a_2^{(\nu-1)} A_0^{(\nu+1)} + a_1^{(\nu-1)} A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu-1)}) . \tag{20}$$

Wir setzen noch

$$(21)\qquad x_2^{(\nu)} = \lambda x_2^{(\nu+1)} \qquad x_2^{(\nu+1)} = \mu x_2^{(\nu+2)}$$
$$A_0^{(\nu+1)} = L A_0^{(\nu)} \qquad A_0^{(\nu)} = M A_0^{(\nu-1)}.$$

λ, μ, L, M sind sämtlich größer als eins.

Zur Abkürzung schreiben wir

$$a = a_2^{(\nu-1)},\ b_1 = a_1^{(\nu-1)},\ b_2 = a_1^{(\nu)}.$$

Setzt man (18), (19), (20) und (21) in (17) ein und kürzt durch $x_2^{(\nu+2)} A_0^{(\nu-1)}$ durch, so erhält man das Gleichungssystem

$$(22)\qquad \begin{aligned} &k - \frac{13}{3}\zeta_1(a\lambda\mu + b_2\mu + 1) = 0\\ &k - \frac{13}{3}\varepsilon_1\lambda\mu M = 0\\ &k - \frac{13}{3}\varepsilon_2 L\mu M = 0\\ &k - \frac{13}{3}\zeta_2(aLM + b_1 M + 1) = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} k &= M\mu + LM(b_2\mu + 1) + (aLM + b_1 M + 1)\lambda\mu\\ &= \mu M(aL\lambda + b_1\lambda + b_2 L + 1) + LM + \lambda\mu. \end{aligned}$$

Es gibt ein $\pi \geqq 1$, so daß

$$L = \varepsilon_1\pi, \quad \lambda = \varepsilon_2\pi.$$

Es gibt ein $\varkappa$, so daß

$$(23)\qquad \begin{aligned} a\varepsilon_2\pi\mu + b_2\mu + 1 &= \zeta_2\varkappa\\ a\varepsilon_1\pi M + b_1 M + 1 &= \zeta_1\varkappa. \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$(24)\qquad \begin{aligned} \zeta_1\varkappa &\geqq a + b_1 + 1\\ \zeta_2\varkappa &\geqq a + b_2 + 1. \end{aligned}$$

Aus (22) erhält man noch die Gleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 L\mu M &= \zeta_2(aLM + b_1 M + 1)\\ \varepsilon_1\varepsilon_2\pi\mu M &= \zeta_1\zeta_2\varkappa. \end{aligned}$$

Die zweite oder dritte Zeile in (22) lautet nun

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\frac{\zeta_1\zeta_2\varkappa}{\varepsilon_1\varepsilon_2\pi}(a\varepsilon_1\varepsilon_2\pi^2 + b_1\varepsilon_2\pi + b_2\varepsilon_1\pi + 1) + \varepsilon_1\pi\frac{\zeta_1\varkappa - 1}{a\varepsilon_1\pi + b_1} + \varepsilon_2\pi\frac{\zeta_2\varkappa - 1}{a\varepsilon_2\pi + b_2} -\\ &\quad - \frac{13}{3}\varepsilon_1\varepsilon_2\pi\frac{\zeta_1\zeta_2\varkappa}{\varepsilon_1\varepsilon_2\pi} = 0\\ &\zeta_1\zeta_2\varkappa\left(a\pi + \frac{b_1}{\varepsilon_1} + \frac{b_2}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\pi} - \frac{13}{3}\right) + \varepsilon_1\pi\frac{\zeta_1\varkappa - 1}{a\varepsilon_1\pi + b_1} + \varepsilon_2\pi\frac{\zeta_2\varkappa - 1}{a\varepsilon_2\pi + b_2} = 0\\ &\zeta_1\zeta_2\varkappa\left(a + b_1 + b_2 - \frac{10}{3}\right) + \frac{\zeta_1\varkappa - 1}{a + b_1} + \frac{\zeta_2\varkappa - 1}{a + b_2} \leqq 0. \end{aligned}$$

Daher ist $a + b_1 + b_2 \leqq \frac{10}{3}$, $a + b_1 + b_2 \leqq 3$.

Lemma 6. *Sei*

$$F_\mu \geqq \frac{13}{3} \qquad (\mu = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \nu + 3).$$

Dann ist sogar $a_2^{(\nu-1)} + a_1^{(\nu-1)} + a_1^{(\nu)} \leqq 2$.

Beweis. Indirekt. Wir nehmen an, $a_2^{(\nu-1)} + a_1^{(\nu-1)} + a_1^{(\nu)} = 3$. Aus (24), (25) erhalten wir

$$-\frac{1}{3}\zeta_1\zeta_2\varkappa + \frac{\zeta_1\zeta_2\varkappa}{3-b_2} + 1 - \frac{1}{3-b_2} \leqq 0.$$

Dies führt in jedem der Fälle $b_2 = 0$, 1 oder 2 auf einen Widerspruch.

Lemma 7. *Gelte* (2c) *nicht unendlich oft. Dann muß für genügend große* ν

$$a_2^{(\nu)} < 3, \quad a_1^{(\nu)} = 0 \quad \textit{sein}.$$

Beweis. Daß $a_2^{(\nu)} < 3$ sein muß, folgt aus Lemma 6. Es darf auch nicht $a_1^{(\nu-1)} = a_1^{(\nu)} = 1$ sein. Es wäre denkbar, daß für unendlich viele ν

(a) $$a_1^{(\nu-1)} = 1, \quad a_1^{(\nu)} = 0$$

oder

(b) $$a_1^{(\nu-1)} = 0, \quad a_1^{(\nu)} = 1.$$

Dann ist auf jeden Fall (a) für unendlich viele ν gültig. Nun darf nach Lemma (6) (a) mit $a_2^{(\nu-1)} > 1$ höchstens endlich oft vorkommen. Hingegen ist (a) mit $a_2^{(\nu-1)} = 1$ für den Algorithmus von vornherein ausgeschlossen. Denn aus $a_1^{(\nu-1)} = a_2^{(\nu-1)}$ folgt ja nach [5], Seite 4 unten, $a_1^{(\nu)} > 0$.

Orientierung. Bisher wurde gezeigt, daß der Satz richtig ist, falls unendlich oft $a_1^{(\nu)} \neq 0$ oder unendlich oft $a_2^{(\nu)} > 2$. Im folgenden dürfen wir uns auf den Fall beschränken, daß für $\nu > N$ $a_1^{(\nu)} = 0$ ist und $a_2^{(\nu)}$ gleich 1 oder 2 ist. Wir haben zu zeigen, daß (2c) unendlich oft gilt, außer die Kettenbruchentwicklung endet auf

$$\left.\begin{matrix} 1\ 1\ 1\ 1 & \ldots \\ 0\ 0\ 0 & \ldots \end{matrix}\right) \text{oder} \left.\begin{matrix} 1\ 2\ 1\ 2\ 1 & \ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0 & \ldots \end{matrix}\right).$$

6. Lemma 8. *Sei für unendlich viele* ν $a_2^{(\nu-1)} = a_2^{(\nu)} = 2$. *Dann gilt auch* (2c) *für unendlich viele* ν.

Beweis. Man darf annehmen, $a_1^{(\mu)} = 0$, falls $\mu \geqq \nu - 10$ etwa. Nach (2*), [5] ist

$$\begin{aligned} x_0 &= A_0^{(\nu)} x_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu+1)} x_1^{(\nu)} + A_0^{(\nu+2)} x_2^{(\nu)} \\ &= A_0^{(\nu)} x_2^{(\nu+1)} + A_0^{(\nu+1)} x_2^{(\nu+2)} + A_0^{(\nu+2)} x_2^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Nach (6) ist

$$F_{\nu+2} = x_2^{(\nu+1)}\, A_0^{(\nu+1)}/x_0 = (G_{\nu+2})^{-1}$$

$$\begin{aligned} G_{\nu+2} &= \frac{A_0^{(\nu+2)}}{A_0^{(\nu+1)}}\,\frac{x_2^{(\nu)}}{x_2^{(\nu+1)}} + \frac{A_0^{(\nu)}}{A_0^{(\nu+1)}} + \frac{x_2^{(\nu+2)}}{x_2^{(\nu+1)}} \\ &= \frac{a_2^{(\nu-1)}\,A_0^{(\nu+1)} + A_0^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu+1)}}\,\frac{a_2^{(\nu)}\,x_2^{(\nu+1)} + x_2^{(\nu+2)}}{x_2^{(\nu+1)}} + \frac{A_0^{(\nu)}}{A_0^{(\nu+1)}} + \frac{x_2^{(\nu+2)}}{x_2^{(\nu+1)}} \qquad (26) \\ &= a_2^{(\nu-1)}\,a_2^{(\nu)} + \frac{A_0^{(\nu)} + a_2^{(\nu)}\,A_0^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu+1)}} + \frac{x_2^{(\nu+2)} + a_2^{(\nu-1)}\,x_2^{(\nu+3)}}{x_2^{(\nu+1)}} + \\ &\qquad + \frac{A_0^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu+1)}}\,\frac{x_2^{(\nu+3)}}{x_2^{(\nu+1)}}\,. \end{aligned}$$

In unserem Falle ist daher

$$G_{\nu+2} \geqq 4 + \frac{A_0^{(\nu)} + 2\,A_0^{(\nu-1)}}{2\,A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu-2)}} > 4\,\frac{1}{2}\,,$$

$$F_{\nu+2} < \frac{3}{13}\,.$$

Lemma 9. *Sei unendlich oft in der Entwicklung*

$$\begin{pmatrix} \cdot\;\cdot\;\cdot\;1\;1\;1\;2\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{pmatrix}$$

also $a_2^{(\nu-3)} = a_2^{(\nu-2)} = a_2^{(\nu-1)} = 1$, $a_2^{(\nu)} = 2$. *Dann gilt* (2c) *unendlich oft.*

Beweis. Man darf nach dem vorigen annehmen $a_2^{(\nu+1)} = 1$, $a_1^{(\mu)} = 0$. Nach (26) ist

$$G_{\nu+2} \geqq 2 + \frac{A_0^{(\nu)} + 2\,A_0^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu-2)}} + \frac{x_2^{(\nu+2)} + x_2^{(\nu+3)}}{x_2^{(\nu+2)} + x_2^{(\nu+4)}} > 3 + \frac{3\,A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu-3)}}{A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu-2)} + A_0^{(\nu-3)}} > \frac{13}{3}\,.$$

Lemma 10. *Sei für unendlich viele* ν $a_2^{(\nu-1)} = a_2^{(\nu)} = 1$ *und für unendlich viele* λ $a_2^{(\lambda)} = 2$. *Dann gilt* (2c) *unendlich oft.*

Beweis. Da man sich auf $a_2^{(\mu)} \leqq 2$ beschränken darf, folgt, daß unendlich oft

$$\begin{pmatrix} \cdot\;\cdot\;\cdot\;1\;1\;2\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{pmatrix}$$

vorkommt. Nach Lemma 8 und Lemma 9 darf man annehmen, daß

$$\begin{pmatrix} \cdot\;\cdot\;\cdot\;\;1\;2\;1\;1\;2\;1\;\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{pmatrix}$$

unendlich oft in der Entwicklung aufscheint.

$$a_2^{(\nu-3)} = a_2^{(\nu)} = 2\,, \quad a_2^{(\nu-4)} = a_2^{(\nu-2)} = a_2^{(\nu-1)} = a_2^{(\nu+1)} = 1\,. \quad a_1^{(\mu)} = 0\,.$$

Nach (26) ist

$$\begin{aligned} G_{\nu+2} &> 2 + \frac{A_0^{(\nu)} + 2\,A_0^{(\nu-1)}}{A_0^{(\nu)} + A_0^{(\nu-2)}} + \frac{x_2^{(\nu+2)} + x_2^{(\nu+3)}}{x_2^{(\nu+2)} + x_2^{(\nu+4)}} \\ &> 3 + \frac{4\,A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu-3)}}{2\,A_0^{(\nu-1)} + A_0^{(\nu-2)} + A_0^{(\nu-3)}} = 3 + \frac{4\,A_0^{(\nu-2)} + A_0^{(\nu-3)} + 4\,A_0^{(\nu-4)}}{3\,A_0^{(\nu-2)} + A_0^{(\nu-3)} + 2\,A_0^{(\nu-4)}} > \frac{13}{3}\,, \end{aligned}$$

weil $A_0^{(\nu-3)} < 3\,A_0^{(\nu-4)}$.

7. Beweis des Satzes. Man darf annehmen, daß $a_1^{(\nu)} = 0$, $a_2^{(\nu)} \leqq 2$, bis auf endlich viele ν.

Ist für $\nu > N$ $a_1^{(\nu)} = 1$, so gilt der Satz nach Lemma 3.
Ist für $\nu > N$ $a_2^{(\nu)} = 2$, so gilt der Satz nach Lemma 8.
Man darf also annehmen, daß unendlich oft $a_2^{(\nu)} = 1$, $a_2^{(\mu)} = 2$.
Ist unendlich oft $a_2^{(\mu-1)} = a_2^{(\mu)} = 2$, so ist der Satz nach Lemma 8 bewiesen.
Ist unendlich oft $a_2^{(\nu-1)} = a_2^{(\nu)} = 1$, so gilt der Satz nach Lemma 10.

Daher bleibt nur der Fall, daß für $\nu > N$ $a_2^{(\nu)}$ abwechselnd gleich 1 bzw. 2 ist. In diesem Falle hilft uns Lemma 4.

8. Wir erwähnen ohne Beweis weitere Eigenschaften der Kettenbrüche, die sich auf Jacobialgorithmen übertragen lassen. Es gibt Analoga zu den Euler-Mindingschen Formeln und zu den Kontinuanten. Es gilt folgender Satz: (Siehe [6], Satz 9): *Beginnt die Entwicklung von $P(\alpha_1, \alpha_2)$, $Q(\beta_1, \beta_2)$, $R(\gamma_1, \gamma_2)$, mit denselben Koeffizienten*

$$\begin{pmatrix} a_2^{(0)} & a_2^{(1)} & \dots & a_2^{(\nu)} \\ a_1^{(0)} & a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(\nu)} \end{pmatrix},$$

dann beginnt auch die Entwicklung jedes Punktes $S(\delta_1, \delta_2)$, der *im abgeschlossenen Dreieck mit den Eckpunkten P, Q, R liegt, mit diesen Koeffizienten.*

Literatur

[1] Cassels, J. W. S.: An Introduction to Diophantine Approximation, Cambridge 1957. — [2] Dickson, L. E.: Introduction to the Theory of Numbers, Chicago. — [3] Dickson, L. E.: Studies in Number Theory, Chicago. — [4] Mönkemeyer, R.: Über Fareynetze in n Dimensionen, Math. Nachr. 1, 321—344 (1954). — [5] Perron, O.: Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenalgorithmus, Math. Ann. 64, 1—76 (1907). — [6] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Aufl. Bd. 1, Stuttgart 1954.

(Eingegangen am 6. Mai 1958)

Jacobson, N.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 375—386 (1958)

Nilpotent Elements in Semi-simple Jordan Algebras*)

By
N. Jacobson in New Haven (Conn.)

The main purpose of the present paper is to the following

Theorem A. Let $\mathfrak{J}$ be a finite dimensional semi-simple Jordan algebra over a field Φ of characteristic $\neq 3$ (and $\neq 2$). Then if e is a nilpotent element of $\mathfrak{J}$ there exists a second nilpotent element f in $\mathfrak{J}$ such that the subalgebra $\mathfrak{K}$ generated by e and f is a direct sum of ideals which are isomorphic to the Jordan algebra of all linear transformations of a finite dimensional vector space $\mathfrak{M}$ over Φ which are self-adjoint relative to a non-degenerate symmetric bilinear form (x, y) of maximal Witt index.

The proof for characteristic 0 is based on

Theorem B. Let $\mathfrak{J}$ and e be as in Theorem A. Then there exists a second nilpotent element f in $\mathfrak{J}$ such that

(1) $$2A(e,e,f) = e, \quad 2A(f,f,e) = f$$

where $A(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$, $x \cdot y$ the multiplication in $\mathfrak{J}$.

Two elements of a Jordan algebra which satisfy the associator conditions (1) will be called *associates*. For $\mathfrak{J}$ semi-simple of characteristic 0 the existence of a nilpotent associate f for any nilpotent $e \in \mathfrak{J}$ has been proved in an earlier paper ([11], p. 112). We can complete the proof of Theorem A for characteristic 0 by determining the structure of the Jordan algebra generated by any two nilpotent associates. The structure of this algebra can also be determined in the characteristic $\chi \neq 0$ case provided the index of nilpotency of e and f does not exceed $\chi - 1$. This requires an extension to the case $\chi \neq 0$ of the classical representation theory of simple Lie algebras of three dimensions which we have given elsewhere ([14]). The proof of Theorems A and B for $\chi \neq 0$ makes use of the structure theory, in particular, the determination of the simple algebras. For special simple algebras the verification of these results is quite straightforward. For the exceptional algebras the proof is somewhat roundabout and makes use of the structure of the algebra generated by two associates.

Any non-zero nilpotent element of an exceptional simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$ has either index three or two. We can apply our results to prove that any two nilpotent elements of index three are conjugate relative to automorphisms of $\mathfrak{J}$. The same result holds for index two if Φ is algebraically closed. These

*) This research was supported in part by the Office of Naval Research under contract Nonr 609—19.

results are needed to establish for exceptional Jordan algebras analogues of certain well-known theorems (e.g. Frobenius' theorem) on the centralizer of a single linear transformation. These will be given in a forthcoming paper by B. Harris ([8]).

1. The characteristic zero case. An algebra $\mathfrak{J}$ over a field Φ of characteristic $\chi \neq 2$ is called a Jordan algebra if its multiplication $a \cdot b$ satisfies

$$a \cdot b = b \cdot a,\ a^2 \cdot (b \cdot a) = (a^2 \cdot b) \cdot a \tag{2}$$

where $a^2 = a \cdot a$. Such an algebra is necessarily power associative, that is if a^k is defined by $a^1 = a, a^k = a^{k-1} \cdot a$ then $a^k \cdot a^l = a^{k-l}$. An element a is nilpotent of index n if $a^n = 0$ and $a^{n-1} \neq 0$. If $\mathfrak{A}$ is an associative algebra, $\mathfrak{A}$ defines a Jordan algebra $\mathfrak{A}^+$ relative to the Jordan composition $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, ab the associative product. A Jordan algebra is called special if it is isomorphic to a subalgebra of an algebra $\mathfrak{A}^+$. A finite dimensional Jordan algebra is called semi-simple if it has no non-zero nil ideals (ideals containing only nilpotent elements). Such an algebra has an identity 1 and is a direct sum of ideals which are simple algebras (Albert [3], [4]). This result, together with the theory of Lie algebras, can be used to prove that if e is a nilpotent element in a semi-simple Jordan algebra $\mathfrak{J}$ of characteristic 0 then $\mathfrak{J}$ contains a nilpotent associate f of e ([11], p. 112). We shall now determine the structure of the subalgebra $\mathfrak{R}$ generated by a pair of nilpotent associates. Throughout this paper the term subalgebra will mean subalgebra containing 1.

Thus let $\mathfrak{R}$ be a finite dimensional Jordan algebra of characteristic 0 having an identity and generated by two elements e and f satisfying (1). Since $\mathfrak{R}$ is generated by two elements it follows from a theorem of Shirshov-Cohn that $\mathfrak{R}$ is special (Cohn [6], Shirshov [20], Jacobson-Paige [16]). Hence we can identify $\mathfrak{R}$ with a subspace of an associative algebra $\mathfrak{A}$ where $\mathfrak{R}$ is closed relative to the Jordan composition $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. We may assume also that the enveloping associative algebra $\mathfrak{R}^*$ of $\mathfrak{R}$ is $\mathfrak{A}$. Then 1 acts as identity for $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A}$ is finite dimensional (Jacobson and Jacobson [9], p. 146 and p. 145). Hence we may consider $\mathfrak{A}$ as an algebra of linear transformations containing the identity transformation in a finite dimensional vector space $\mathfrak{M}$ over Φ. We can verify that in $\mathfrak{A}$ we have

$$A(a, b, c) \equiv (a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c) = \tfrac{1}{4}\,[b[ac]] \tag{3}$$

where $[xy]$ is the Lie commutator $xy - yx$. Hence the conditions (2) yield $[e[ef]] = 2e$, $[f[ef]] = -2f$, or, if we set $h = [ef]$ then we have

$$[ef] = h,\ [eh] = 2e,\ [fh] = -2f. \tag{4}$$

Let $\mathfrak{L}$ be the three dimensional Lie algebra with basis (e', f', h') such that $[e'f'] = h'$, $[e'h'] = 2e'$, $[f'h'] = -2f'$. Then $\mathfrak{L}$ is simple and the linear mapping of $\mathfrak{L}$ into $\mathfrak{A}$ such that $e' \to e$, $f' \to f$, $h' \to h$ is a representation of $\mathfrak{L}$. The theorem on complete reducibility of the representations of $\mathfrak{L}$ (for characteristic 0) implies that the enveloping algebra $\mathfrak{A}$ of the representing trans-

formations is semi-simple. Since $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{A}$ it now follows that $\mathfrak{R}$ is semi-simple (ALBERT [1], p. 532). Hence $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \oplus \mathfrak{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{R}_s$ where the $\mathfrak{R}_i$ are ideals and are simple and special.

In order to determine the structure of the $\mathfrak{R}_i$ we need to recall some facts about the irreducible representations of the three dimensional simple Lie algebra $\mathfrak{L}$. Let $\mathfrak{M}^{(j)}$ be the j-dimensional vector space with basis $(x_1, x_2, \ldots, x_j)$ and define the linear transformations e, f and h in $\mathfrak{M}^{(j)}$ by their effect on the basis, as follows:

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_i e &= x_{i+1}, \ i \leq j-1, \ x_j e = 0 \\ x_1 f &= 0, \ x_{i+1} f = i(i-j) x_i, \ i \leq j-1 \\ x_i h &= (2i-1-j) x_i. \end{aligned}$$

Then we can verify that (4) holds. Hence we obtain a representation ϱ_j of $\mathfrak{L}$. It is well known that this representation is irreducible (for example, JACOBSON [14]) and it is clear that $e^j = 0 = f^j$ and $e^{j-1} \neq 0, f^{j-1} \neq 0$ in ϱ_j. It is known that every irreducible representation is equivalent to a ϱ_j. Hence there is one and only one irreducible representation of $\mathfrak{L}$ for every degree $j = 1, 2, \ldots$.

Let (x, y) be a non-degenerate symmetric bilinear form in $\mathfrak{M}^{(j)}$ of maximal Witt index $\left[\frac{j}{2}\right]$ and let $\mathfrak{H}^{(j)}$ denote the Jordan algebra (relative to $a \cdot b$) of the linear transformations in $\mathfrak{M}^{(j)}$ which are self-adjoint relative to (x, y). It is easy to see that (x, y) is determined up to a multiplier in Φ. Hence $\mathfrak{H}^{(j)}$ is uniquely determined (in the sense of isomorphism) by j. We now note the following

Lemma 1. Let ϱ_j be the representation of $\mathfrak{L}$ (of characteristic 0) defined by (5). Then the Jordan subalgebra $\mathfrak{R}^{(j)}$ generated by e and f is isomorphic to $\mathfrak{H}^{(j)}$.

Proof. We define a symmetric bilinear form (x, y) in $\mathfrak{M}^{(j)}$ by specifying that

$$(6) \qquad (x_i, x_{j-k+1}) = \delta_{ik}.$$

Then (x, y) is non-degenerate. Moreover, the space spanned by $\left(x_1, x_2, \ldots, x_{\left[\frac{j}{2}\right]}\right)$ is totally isotropic; hence (x, y) has maximal Witt index. Let h_{ik} be the linear transformation in $\mathfrak{M}^{(j)}$ such that

$$(7) \qquad x_i h_{ik} = x_k, \ x_{j+1-k} h_{ik} = x_{j+1-i}, \ x_l h_{ik} = 0 \text{ if } l \neq i, j+1-k.$$

Then the h_{ik} with $i + k \leq j + 1$ form a basis for the Jordan algebra $\mathfrak{H}^{(j)}$ of linear transformations in $\mathfrak{M}^{(j)}$ which are self-adjoint relative to (x, y). One verifies using (5) that $e, f \in \mathfrak{H}^{(j)}$. Hence $\mathfrak{R}^{(j)} \subseteq \mathfrak{H}^{(j)}$. We note next that $h^2 = 4((e \cdot f) \cdot e) \cdot f - 4(e^2 \cdot f) \cdot f - 2e \cdot (e \cdot f^2) + 2e^2 \cdot f^2 \in \mathfrak{R}^{(j)}$ and $x_i h^2 = \beta_i x_i$ where $\beta_i = (2i - 1 + j)^2$. Since the β_i, $1 \leq i \leq \left[\frac{j+1}{2}\right]$, are distinct it follows that the transformations h_{ii} defined in (7) are polynomials in h^2 and so belong

to $\mathfrak{K}^{(j)}$. We have

(8) $4(h_{ii}\cdot e^{k-i})\cdot h_{kk}= h_{ii}e^{k-i}h_{kk}+h_{kk}e^{k-i}h_{ii}$, if $k>i$, $k\neq j+1-i$

and

(9) $2(e^{j+1-2i}\cdot h_{ii})\cdot h_{ii}-e^{j+1-2i}\cdot h_{ii}= h_{ii}e^{j+1-2i}h_{ii}$, if $2i<j+1$.

We can use these relations to verify that $4(h_{ii}\cdot e^{k-i})\cdot h_{kk}= h_{ik}$ if $k>i$, $k\neq j+1-i$ and $2(e^{j+1-2i}\cdot h_{ii})\cdot h_{ii}-e^{j+1-2i}\cdot h_{ii}= h_{i,j+1-i}$. Similarly we can verify that $4(h_{kk}\cdot f^{i-k})\cdot h_{ii}$ is a non-zero multiple of h_{ik} if $i<k, i\neq j+1-k$ and $2(f^{j+1-2i}\cdot h_{ii})\cdot h_{ii}-f^{j+1-2i}\cdot h_{ii}$ a non-zero multiple of $h_{j+1-i,i}$ if $2i<j+1$. It follows that $\mathfrak{K}^{(j)}$ contains the basis for $\mathfrak{H}^{(j)}$; hence $\mathfrak{K}^{(j)}=\mathfrak{H}^{(j)}$.

We can now prove the following

Theorem 1. **Let $\mathfrak{K}$ be a finite dimensional Jordan algebra with an identity over a field of characteristic zero. Assume $\mathfrak{K}$ is generated by two elements e, f satisfying the associator conditions (1). Then $\mathfrak{K}\cong\sum_{i=1}^{s}\oplus\mathfrak{H}^{(j_i)}$ where $j_i\neq j_{i'}$ for $i\neq i'$.**

Proof. As before we identify $\mathfrak{K}$ with a Jordan algebra of linear transformations (containing 1) in a finite dimensional vector space $\mathfrak{M}$ over Φ. Also we have $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_1\oplus\mathfrak{K}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{K}_s$ where the $\mathfrak{K}_i$ are simple ideals and $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\oplus\mathfrak{M}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{M}_t$ where the $\mathfrak{M}_k$ are irreducible invariant subspaces. Let 1_i be the identity of $\mathfrak{K}_i$. Then it is known that the 1_i are orthogonal idempotents belonging to the center of $\mathfrak{K}^*=\mathfrak{A}_i$ (JACOBSON and JACOBSON [9] p. 141). It follows that each $\mathfrak{M}_i$ is annihilated by all the $\mathfrak{K}_j$ except one and so $\mathfrak{M}_i$ furnishes a faithful irreducible representation of one of the $\mathfrak{K}_j$. Also since our representation is faithful for $\mathfrak{K}$, for each $\mathfrak{K}_j$ there exists at least one $\mathfrak{M}_i$ such that $\mathfrak{M}_i\mathfrak{K}_j\neq 0$. If $\dim\mathfrak{M}_i=j_i$ then the lemma shows that $\mathfrak{K}_j\cong\mathfrak{H}^{(j_i)}$. Hence we have that $\mathfrak{K}\cong\sum_1^s\oplus\mathfrak{H}^{(j_i)}$. Suppose $i\neq i'$, let $\mathfrak{K}_{j_i}, \mathfrak{K}_{j_{i'}}$ be the component of $\mathfrak{K}$ isomorphic to $\mathfrak{H}^{(j_i)}, \mathfrak{H}^{(j_{i'})}$ respectively and let $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_{i'}$ satisfy $\mathfrak{M}_i\mathfrak{K}_{j_i}\neq 0$, $\mathfrak{M}_{i'}\mathfrak{K}_{j_{i'}}\neq 0$. Since $\mathfrak{M}_i\mathfrak{K}_{j_{i'}}=0$ it is clear that $\mathfrak{M}_i$ and $\mathfrak{M}_{i'}$ determine inequivalent irreducible representations of $\mathfrak{K}$. It follows that these spaces determine inequivalent irreducible representations for the three dimensional simple Lie algebra $\mathfrak{L}$. Hence the dimensionalities $j_i, j_{i'}$ of $\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_{i'}$ respectively are different.

Since the linear transformation f in our representation is nilpotent, Theorem B and Theorem 1 implies Theorem A in the characteristic 0 case.

If the characteristic $\chi\neq 0$ then every representation of the three dimensional simple Lie algebra $\mathfrak{L}$ for which $e^{\chi-1}=0=f^{\chi-1}$ is completely reducible (JACOBSON [14]). Moreover, the irreducible representations satisfying this condition are equivalent to the representations ϱ_j with $j\leqq\chi-1$. The proof of Theorem 1 can now be carried over to give

Theorem 1′. **Let $\mathfrak{K}$ be a finite dimensional Jordan algebra with an identity over a field of characteristic $\chi\neq 0$. Assume $\mathfrak{K}$ is generated by two associates e, f**

such that $e^{\chi-1} = 0 = f^{\chi-1}$. Then $\mathfrak{K} \cong \sum_{i=1}^{s} \oplus \mathfrak{H}^{(j_i)}$ where $j_i \neq j_{i'}$ for $i \neq i'$ and $j_i \leq \chi - 1$.

Remarks. (1) The assumptions in Theorem 1 and 1′ that $\mathfrak{K}$ is finite dimensional is superfluous (Jacobson [14]). Consequently the same method of proof can be used to establish the following extension of these two theorems: Let $\mathfrak{G}$ be the free Jordan algebra (with 1) generated by two elements e, f and let $\mathfrak{J}$ be the ideal in $\mathfrak{G}$ generated by the elements $2A(e, e, f) - e$, $2A(f, f, e) - - f, e^m, f^m$ where $m \leq \chi - 1$ if $\chi \neq 0$. Then $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ is finite dimensional and is isomorphic to the direct sum of all the $\mathfrak{H}^{(j)}$ with $1 \leq j \leq m$. The dimensionality of $\mathfrak{K}$ is $\sum_{1}^{m} j(j+1)/2 = j(j+1)(j+2)/6$. (2) If e is nilpotent of index m then the $j_i \leq m$ in Theorems 1, 1′ and one of the $j_i = m$.

2. Special Jordan algebras. In this section and the next we shall prove Theorems A and B for any $\chi \neq 3$. The proofs will make full use of the structure theory for semisimple Jordan algebras. We observe first that we may assume $\mathfrak{J}$ simple. According to the structure theory (Albert [3], [4], Jacobson [13], Jacobson and Jacobson [9], Schafer [19], Albert and Jacobson [5]) $\mathfrak{J}$ is one of the following types: (1) An algebra $\mathfrak{E}^+$ where $\mathfrak{E}$ is the (associative) algebra of all the linear transformations in a finite dimensional vector space over a division algebra $\mathfrak{D}$. (2) The subalgebra of $\mathfrak{E}^+$ of self-adjoint linear transformations relative to a non-degenerate hermitian form (x, y) in $\mathfrak{M}$. Here $\mathfrak{D}$ must have an involution $\delta \to \bar{\delta}$ and (x, y) is hermitian relative to this involution. (3) The subalgebra of $\mathfrak{E}^+$ of self-adjoint linear transformations in $\mathfrak{M}$ relative to an alternate form (x, y). Here $\mathfrak{D}$ must be commutative. (4) An algebra of a non-degenerate symmetric bilinear form (x, y). Here $\mathfrak{M}$ is a vector space over a field $\mathfrak{D}$ (containing the base field) and the algebra $\mathfrak{J} = \mathfrak{D}1 \oplus \mathfrak{M}$ where 1 acts as identity and $x \cdot y = (x, y)1$ for x, y in $\mathfrak{M}$. (5) An exceptional (non-special) simple Jordan algebra. Such an algebra is 27 dimensional over its center and will be discussed more fully in the next section. The algebras of types (1)—(4) are special. For these we have the following

Theorem 2. Let e be a nilpotent element of a simple special Jordan algebra $\mathfrak{J}$ of any characteristic χ $(\neq 2)$. Then e has a nilpotent associate f in $\mathfrak{J}$. Also there exists a second nilpotent element g such that the subalgebra $\mathfrak{K}$ generated by e and g has the structure $\mathfrak{K} = \Sigma \oplus \mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{K}_i$ an ideal in $\mathfrak{K}$ isomorphic to $\mathfrak{H}^{(j_i)}$.

Proof. (1) $\mathfrak{J} = \mathfrak{E}^+$ as in (1) above. It is known that the vector space $\mathfrak{M}$ over $\mathfrak{D}$ is a direct sum of subspaces which are cyclic relative to the linear transformation e (Jacobson [10], p. 44). Assume $\mathfrak{M}$ cyclic relative to e. Then we have a basis $(x, xe, \ldots, xe^{j-1})$ for $\mathfrak{M}$ over $\mathfrak{D}$ where $xe^j = 0$. Let f be the linear transformation in $\mathfrak{M}$ such that $(x e^i) f = i(i-j)\, xe^{i-1}$, $i > 0$, $xf = 0$. Then f is nilpotent and $(xe^{i-1})[ef] = (2i - 1 - j)\, xe^{i-1}$. Hence $xe^{i-1}[e[ef]] = 2xe^i$, $1 < i \leq j$, $(xe^j)[e[ef]] = 0$ so that $[e[ef]] = 2e$. Also $(xe^i)[f[ef]] = 2i(i-j)xe^{i-1}$, $i > 0$, $x[f[fe]] = 0$, so that $[f[fe]] = 2f$. By (3),

these relations imply that e and f are associates. Let g be the linear transformation such that $(xe^i)g = xe^{i-1}$, $i > 0$, $xg = 0$. Let $\mathfrak{M}_0$ be the vector space over Φ spanned by the xe^i and let (a, b) be the symmetric bilinear form in $\mathfrak{M}_0$ such that $(xe^{i-1}, xe^{j-k}) = \delta_{ik}$. Then, as in the proof of Lemma 1, (a, b) is non-degenerate of maximum Witt index. The transformations e and g map $\mathfrak{M}_0$ into itself and the Jordan algebra $\mathfrak{K}$ generated by e and g is isomorphic to that generated by their contractions $\bar{e}, \bar{g}$ to $\mathfrak{M}_0$. The transformations $\bar{e}, \bar{g} \in \mathfrak{H}^{(j)}$ the Jordan algebra of linear transformations in $\mathfrak{M}_0$ which are self-adjoint relative to (a, b). We have that $h_i = [e^i g^i]^2 \in \mathfrak{K}$ and the h_{ii} defined in the proof of Lemma 1 are linear combinations of 1 and the h_i. The proof of Lemma 1 now shows that $\bar{e}, \bar{g}$ generate $\mathfrak{H}^{(j)}$. This proves the result for cyclic $\mathfrak{M}$. The proof in the general case follows readily from the direct decomposition into cyclic subspaces. (2) $\mathfrak{J}$ as in (2) above. Let $(x, xe, \ldots, xe^{j-1})$ be a basis for a cyclic subspace of maximum dimensionality relative to e. We have $(xe^i, xe^k) = (x, xe^{i+k}) = 0$ if $i + k \geq j$. If $(x, xe^{j-1}) = \delta \neq 0$ then $(xe^i, xe^k) = \delta$ for $i + k = j - 1$ and one sees easily that our cyclic subspace is not isotropic. Next assume $(x, xe^{j-1}) = 0$. Then we can find a vector y such that $(xe^{j-1}, y) = 1$. By the maximality of j, $ye^j = 0$. On the other hand, $(x, ye^{j-1}) \neq 0$. If $(ye^{j-1}, y) \neq 0$ then the cyclic space generated by y is not isotropic. If $(ye^{j-1}, y) = 0$ then

$$(x + y, (x + y)e^{j-1}) = (x, ye^{j-1}) + (y, xe^{j-1}) = 2 \neq 0.$$

Thus we can always find a non-isotropic cyclic subspace. Then we can express $\mathfrak{M}$ as a direct sum of mutually orthogonal cyclic subspaces and it suffices to prove the theorem for $\mathfrak{M}$ cyclic relative to e. Then we have the basis $(x, xe, \ldots, xe^{j-1})$ such that $(xe^i, xe^k) = 0$ if $i + k > j - 1$ and $(xe^i, xe^{j-i-1}) = \delta \neq 0$. We shall show next that x can be chosen so that $(xe^i, xe^k) = 0$ also if $i + k < j - 1$. Note that $\delta = (x, xe^{j-1}) = (xe^{j-1}, x) = \bar{\delta}$ where $\alpha \to \bar{\alpha}$ is the involution in $\mathfrak{D}$. Let $1 \leq k \leq j - 1$ and put $x_k = x - \gamma_k(xe^k)$ where $\gamma_k = (x, xe^{j-k-1})(2\delta)^{-1}$. Then x_k is a generator of $\mathfrak{M}$ and if $1 \leq i \leq k$ then $x_k e^{j-i} = xe^{j-i}$, so that

$$(x_k e^{j-i}, x_k) = (x_k e^{j-i}, x - \gamma_k xe^k) = (xe^{j-i}, x).$$

Also

$$\begin{aligned}(x_k e^{j-k-1}, x_k) &= (xe^{j-k-1} - \gamma_k xe^{j-1}, x - \gamma_k xe^k) \\ &= (xe^{j-k-1}, x) - \gamma_k(xe^{j-1}, x) - (xe^{j-k-1}, xe^k)\,\bar{\gamma}_k \\ &= (xe^{j-k-1}, x) - (x, xe^{j-k-1})(2\delta)^{-1}\delta - \delta(2\delta)^{-1}(x, xe^{j-k-1}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

If we take $k = 1$ we obtain $(x_1 e^{j-2}, x_1) = 0$ and we may replace x by x_1. Suppose the generator x satisfies $(x, xe^{j-2}) = \cdots = (x, xe^{j-k}) = 0$ for some k, $2 \leq k \leq$ $\leq j - 1$. Then x_k satisfies $(x_k, x_k e^{j-i}) = 0$, $i = 2, \ldots, k + 1$. Hence we may assume that $(x, xe^{j-k}) = 0$, $2 \leq k \leq j - 1$. Thus we have $(xe^i, xe^k) = 0$ if

$i+k \neq j-1$ and $(xe^i, xe^{j-i-1}) = \delta \neq 0$.[1]) If we now define f and g as in case (1) then we can check that $f, g \in \mathfrak{J}$. The proof in (1) then shows that f and g satisfy the conditions of the theorem. (3) $\mathfrak{J}$ as in (3) above. We choose a cyclic subspace relative to e of maximum dimensionality with basis $(x, xe, \ldots, xe^{j-1})$. Since the form is alternate, $(xe^i, xe^j) = 0$ so that the cyclic subspace is totally isotropic. Choose y so that $(xe^{j-1}, y) = 1$. Then $(x, ye^{j-1}) = 1$ and $e^{j-1} \neq 0$. By the maximality of j, $ye^j = 0$. Also $(xe^i, ye^k) = 0$ if $i+k \geqq j$. These relations imply that the cyclic spaces generated by x and y are independent and that their sum is non-isotropic. We may assume this sum is the whole space. An argument similar to that used in the proof of (2) shows that we may replace y by another element so that we have $(xe^i, ye^{j-i-1}) = 1 = -(ye^{j-i-1}, xe^i)$ while $(xe^i, ye^k) = 0$ for $i+k \neq j-1$. We now define f by $(xe^i)f = i(i-j)xe^{i-1}$, $i > 0$, $xf = 0$, $(ye^i)f = i(i-j)\, ye^{i-1}, i > 0$, $yf = 0$. We define g by $(xe^i)g = xe^i$, $xg = 0$, $(ye^i)g = ye^{i-1}, yg = 0$ if $i > 0$. Then $f, g \in \mathfrak{J}$ and satisfy the required conditions. (4) $\mathfrak{J} = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{M}$ the Jordan algebra of a non-degenerate symmetric bilinear form in a vector space $\mathfrak{M}$ over a field $\mathfrak{D}$ containing Φ. Any element of $\mathfrak{J}$ satisfies a quadratic equation with coefficients in $\mathfrak{D}$. Hence if e is nilpotent then $e^2 = 0$. Write $e = \alpha 1 + u$, $u \in \mathfrak{M}$. Then $e^2 = 0$ implies that $\alpha = 0$ and $(u, u) = 0$. We can find an f in $\mathfrak{M}$ such that $(f, f) = 0$, $(e, f) = -\frac{1}{2}$. Then $ef = -\frac{1}{2} 1$ and one verifies that f is an associate of e. We can verify also that the subalgebra $\Phi 1 + \Phi e + \Phi f \cong \mathfrak{H}^{(2)}$.

Remark. The subalgebra generated by e and the associates f defined in the above proof has the structure $\Sigma \oplus \mathfrak{H}^{(j)}$ if and only if $\chi = 0$ or $\chi \neq 0$ and the index of e does not exceed χ. If $\chi \neq 0$ and the index exceeds χ then the subalgebra generated by e and f is not semi-simple.

3. Exceptional simple Jordan algebras. Let $\mathfrak{C}$ be a (generalized) Cayley algebra, $\mathfrak{C}_3$ the algebra of 3×3 matrices over $\mathfrak{C}$ and γ the diagonal matrix diag $\{1, -1, 1\}$. We can define an involution J in $\mathfrak{C}_3$ by $x^J = \gamma^{-1} \bar{x}' \gamma$ where $\bar{x}'$ is the transpose conjugate of x and the conjugate is the standard one in $\mathfrak{C}$. The space $\mathfrak{J}$ of elements invariant under J is an algebra relative to the multiplication $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$. It is known that $\mathfrak{J}$ is a simple exceptional (non-special) Jordan algebra (JACOBSON [12]). An element a is in $\mathfrak{J}$ if and only if it has the form

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 & \bar{a}_2 \\ -\bar{a}_3 & \alpha_2 & a_1 \\ a_2 & -\bar{a}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

where $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ is in the center of $\mathfrak{C}$ and $\bar{a}_i$ is the conjugate of a_i. Thus the dimensionality of $\mathfrak{J}$ is 27 over the center of $\mathfrak{C}$. The matrix

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

[1]) The canonical forms for nilpotent self-adjoint linear transformations given here and in the proof of the next case are due (independently) to MALCEV [17] and to HARRIS [8].

is in $\mathfrak{J}$ and satisfies $e^3 = 0$, $e^2 \neq 0$; hence $\mathfrak{J}$ contains non-zero nilpotent elements. Conversely, let $\mathfrak{J}$ be any exceptional simple Jordan algebra containing non-zero nilpotents and let $\mathfrak{D}$ be the center of $\mathfrak{J}$. Then there exists a Cayley algebra $\mathfrak{C}$ over $\mathfrak{D}$ such that $\mathfrak{J}$ is isomorphic to the algebra of J-invariant elements under the involution J in $\mathfrak{C}_3$ defined by $\gamma = \mathrm{diag}\,\{1, -1, 1\}$ (Albert-Jacobson [5], p. 411). If Φ is algebraically closed then there exists only one exceptional simple Jordan algebra over Φ. This is obtained by making the construction indicated with the unique Cayley algebra $\mathfrak{C}$ over Φ. In this case we can also replace γ by the identity matrix and so take $\mathfrak{J}$ to be the Jordan algebra of ordinary hermitian matrices in $\mathfrak{C}_3$.

If a is as in (10) we define

$$\text{(12)}\quad \det a = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + a_3(a_1a_2) + (\bar{a}_2\bar{a}_1)\bar{a}_3 + \alpha_2 N(a_2) - \alpha_1 N(a_1) - \alpha_3 N(a_3),$$

where $N(a_i) = a_i\bar{a}_i = \bar{a}_i a_i$. Then $\det a$ is in the center $\mathfrak{D}$ of $\mathfrak{C}$ and if λ is an indeterminate then a is a root of the characteristic polynomial $f_a(\lambda) = \det(\lambda 1 - a)$ (Freudenthal [7]). If $\mu_a(\lambda)$ is the minimum polynomial of a over $\mathfrak{D}$ then $\mu_a(\lambda)$ and $f_a(\lambda)$ have the same irreducible factors (Jacobson [15]). Hence a is nilpotent if and only if $f_a(\lambda) = \lambda^3$. Thus if a is nilpotent then its index of nilpotency does not exceed three. We write $f_a(\lambda) = \lambda^3 - \tau(a)\,\lambda^2 + \varrho(a)\,\lambda - \det a$ and we call $\tau(a)$ the (generic) trace of a. We have $\tau(a) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ so that this coincides with the reduced trace defined by Albert ([4], p. 522). Hence it is known that the symmetric bilinear form $\tau(a,b) = \tau(a \cdot b)$ is non-degenerate.

We recall that a Jordan algebra is called central if its center is the base field. We shall need the following

Lemma 2. Let e and f be any two elements of a finite dimensional central simple exceptional Jordan $\mathfrak{J}$. Then the dimensionality of the subalgebra $\mathfrak{K}$ generated by e and f does not exceed nine.

Proof. Since a central simple algebra remains central simple on extension of the base field, it suffices to assume the base field Φ is algebraically closed. Let $\xi_1, \ldots, \xi_{27}\eta_1, \ldots, \eta_{27}$ be algebraically independent over Φ and set $P = \Phi(\xi_i, \eta_j)$ the field of rational expressions in the ξ_i, η_j. Let $(u_1, \ldots, u_{27})$ be a basis for $\mathfrak{J}$ over Φ and set $x = \Sigma\, \xi_i u_i$, $y = \Sigma\, \eta_i u_i$ where these are considered as elements of the algebra $\mathfrak{J}_P$. Any (non-associative) monomial z_k in x and y can be written as $\Sigma\, \zeta_{ki} u_i$ where the ζ_{ki} are polynomials in the ξ's and η's and the dimensionality of the subalgebra $\mathfrak{Z}$ generated by x and y is the maximum rank of matrixes (ζ_{ki}) with rows $(\zeta_{k1}, \ldots, \zeta_{k27})$ obtained from nomomials z_k in x and y. It follows by specialization that $\dim \mathfrak{K} \leq \dim \mathfrak{Z}$. Hence it suffices to show that $\dim \mathfrak{Z} \leq 9$. We note next that the discriminant of the characteristic polynomial $f_x(\lambda)$ of x is not zero since this can be specialized to give the discriminant of the characteristic polynomial of any a in $\mathfrak{J}$ and there exist a in $\mathfrak{J}$ with three distinct characteristic roots. It therefore suffices to prove the lemma with the following additional conditions: Φ is algebraically closed, e has three distinct characteristic roots $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$. Then it is known that we can choose the representation of $\mathfrak{J}$ as hermitian Cayley matrices so that

$e = \operatorname{diag}\{\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\}$. Then $\mathfrak{R}$ is contained in the subalgebra generated by the three idempotents $e_1 = \operatorname{diag}\{1,0,0\}$, $e_2 = \{0,1,0\}$, $e_3 = \operatorname{diag}\{0,0,1\}$ and three elements $f_1 = a_1 e_{23} + \bar{a}_1 e_{32}$, $f_2 = a_2 e_{31} + \bar{a}_2 e_{13}$, $f_3 = a_3 e_{12} + \bar{a}_3 e_{21}$ where the e_{ij} are the usual matrix units. Then $f_2 \cdot f_3 = \bar{a}_3 \bar{a}_2 e_{23} + a_2 a_3 e_{32}$, $f_3 \cdot f_1 = \bar{a}_1 \bar{a}_3 e_{31} + a_3 a_1 e_{13}$, $f_1 \cdot f_2 = \bar{a}_2 \bar{a}_1 e_{12} + a_1 a_2 e_{21}$. We shall now show that any product of the elements $e_i, f_i, f_i \cdot f_j$ for $i \neq j$ is a linear combination of these elements. This will imply that the Jordan algebra generated by the e_i and f_i and, hence $\mathfrak{R}$, is at most nine dimensional. We note first that $e_i^2 = e_i, e_i \cdot e_j = 0, e_i \cdot f_i = 0, e_i \cdot f_j = \frac{1}{2} f_j$, $e_i \cdot (f_i \cdot f_j) = \frac{1}{2} f_i \cdot f_j$, $e_k \cdot (f_i \cdot f_j) = 0$ if i, j, k are unequal. Also $f_i^2, (f_i \cdot f_j)^2$, $f_i \cdot (f_j \cdot f_k)$ are linear combinations of the e's. Next we have $f_i \cdot (f_i \cdot f_j) = (a_j a_i) \bar{a}_i \cdot e_{ik} + a_i (\bar{a}_i \bar{a}_j) e_{ki} = N(a_i)(a_j e_{ik} + \bar{a}_j e_{ki}) = N(a_i) f_j$, by the alternative laws in $\mathfrak{C}$. It remains to prove our assertion for a product $(f_i \cdot f_j) \cdot (f_i \cdot f_k)$. Here we use the well-known Jordan identity: $2(a \cdot b) \cdot (a \cdot c) = 2((a \cdot b) \cdot c) \cdot a + (a^2 \cdot c) \cdot b - a^2 \cdot (b \cdot c)$ to obtain a reduction to the cases already established. This completes the proof.

In discussing nilpotent elements of exceptional algebras we shall reduce the consideration to those of an algebra $\mathfrak{R}$ which we proceed to define. First let $\mathfrak{H}^{(3)}$ be the Jordan algebra defined before ($\mathfrak{H}^{(j)}$ for $j = 3$). Let $\mathfrak{S}$ be the vector space of skew-symmetric linear transformations relative to the form (x, y) defining $\mathfrak{H}^{(3)}$. Then $\mathfrak{S}$ is three dimensional and if $h \in \mathfrak{H}^{(3)}$, $s \in \mathfrak{S}$, $s \cdot h \in \mathfrak{S}$. Hence $\mathfrak{S}$ is a bimodule for $\mathfrak{H}$. It is known that $\mathfrak{S}$ is $\mathfrak{H}^{(3)}$ irreducible and that every unital $\mathfrak{H}^{(3)}$-bimodule is a direct sum of copies of $\mathfrak{H}^{(3)}$ and of copies of $\mathfrak{S}$ (JACOBSON [12], p. 65). Let $\mathfrak{R}$ be the split null extension of $\mathfrak{H}^{(3)}$ by $\mathfrak{S}$, that is, $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}^{(3)} \oplus \mathfrak{S}$ where the Jordan multiplication in $\mathfrak{R}$ is given by

$$(h_1 + s_1) \cdot (h_2 + s_2) = h_1 \cdot h_2 + h_1 \cdot s_2 + h_2 \cdot s_1, \tag{12}$$

$h_i \in \mathfrak{H}^{(3)}$, $s_i \in \mathfrak{S}$. We shall need the following result on $\mathfrak{R}$.

Lemma 3. Let u be a nilpotent element of $\mathfrak{R}$ such that $\Phi[u] \cap \mathfrak{S} = 0$. Then u has a nilpotent associate in $\mathfrak{R}$.

Proof. We have $u = e + s$, e in $\mathfrak{H}^{(3)}$, s in $\mathfrak{S}$, and if we set $v = f + t$, f in $\mathfrak{H}^{(3)}$, t in $\mathfrak{S}$ then the conditions that u and v be associates are equivalent to the same conditions for e and f and the two additional conditions:

$$\begin{aligned} 2A(f,t,e) + 2A(f,f,s) + 2A(t,f,e) &= t \\ 2A(e,s,f) + 2A(e,e,t) + 2A(s,e,f) &= s\,. \end{aligned} \tag{13}$$

The Jordan products involved here are the usual ones in terms of the associative multiplication. Hence we may use the relation $A(b,c,d) = \frac{1}{4}[c[bd]]$ to re-write (13) as

$$\begin{aligned} [f[fs]] &= 2t - [t[fe]] - [f[te]] \\ [e[et]] &= 2s - [s[ef]] - [e[sf]]\,. \end{aligned} \tag{14}$$

We assume first that $u^3 = 0$, $u^2 \notin \mathfrak{S}$. Then $e^3 = 0$, $e^2 \neq 0$. The proof of Case (2) of Theorem 2 shows that we can choose a basis (x_i) for the three dimensional space in which our transformations act so that $(x_i, x_k) = 0$ if $i + k \neq 4$.

$(x_i, x_{4-i}) = \delta \neq 0$ and $x_i e = x_{i+1}$, $i < 3$, $x_3 e = 0$. The fact that s is skew implies that $x_1 s = \sigma_1 x_1 + \sigma_{12} x_2$, $x_2 s = \sigma_{21} x_1 - \sigma_{12} x_3$, $x_3 s = -\sigma_{21} x_2 - \sigma_1 x_3$. The proof of Theorem 2 shows that the linear transformation f such that $x_1 f = 0$, $x_{i+1} f = -2x_i$ for $i = 1,2$ is a nilpotent associate of e. Now let t be the (skew) transformation such that $x_1 t = 0$, $x_2 t = 2\sigma_{12} x_1$, $x_3 t = -2\sigma_{12} x_2$. Then we can verify that (14) holds. Then $v = f + t$ is an associate of u. Since f is nilpotent and $\mathfrak{S}$ is a nilpotent ideal, v is nilpotent. Next assume $u^2 = 0$, $u \notin \mathfrak{S}$. Then $e^2 = 0$, $e \neq 0$. We may choose the basis (x_i) such that $(x_1, x_2) = \delta_1 = (x_2, x_1) \neq 0$, $(x_3, x_3) = \delta_3 \neq 0$ and all the other $(x_i, x_j) = 0$ and $x_1 e = x_2$, $x_2 e = 0 = x_3 e$. Then, since $s \in \mathfrak{S}$, $x_1 e = \sigma_1 x_1 + \sigma_{13} x_3$, $x_2 s = -\sigma_1 x_2 + \sigma_{23} x_3$, $x_3 s = -\delta_1^{-1} \delta_3 (\sigma_{23} x_1 + {} + \sigma_{13} x_2)$. The condition $u^2 = 0$ gives $es + se = 0$ and this implies that $\sigma_{23} = 0$. Let f be defined by $x_1 f = 0 = x_3 f$, $x_2 f = -x_1$. Then $f \in \mathfrak{H}^{(3)}$, $[f[fs]] = 0$, $2s - [s[ef]] - [e[sf]] = 0$. Hence, by (14), $v = f$ is a nilpotent associate of u.

We are now ready to prove the following

Theorem 3. Let $\mathfrak{J}$ be a finite dimensional exceptional simple Jordan algebra. Then any nilpotent element e of index three has a nilpotent associate in $\mathfrak{J}$. The same result holds for e nilpotent of index two if the base field is of characteristic different from three and contains more than five elements.

Proof. We may assume that $\mathfrak{J}$ is central. Assume first that $e^3 = 0$, $e^2 \neq 0$. Since the trace form $\tau(a,b)$ is non-degenerate there exists a b in $\mathfrak{J}$ such that $\tau(e^2, b) \neq 0$. Let $\mathfrak{K}$ be the subalgebra generated by e and f and let $\mathfrak{N}$ be the radical of $\mathfrak{K}$. Then $\dim \mathfrak{K} \leq 9$ (Lemma 2). Since $\tau(a) = 0$ for a nilpotent element and since $\tau(e^2, b) = \tau(e^2 \cdot b) \neq 0$, $e^2 \cdot b$ is not nilpotent and $e^2 \notin \mathfrak{N}$. Hence $\overline{\mathfrak{K}} \equiv \mathfrak{K}/\mathfrak{N}$ contains a nilpotent element of index three. Since $\overline{\mathfrak{K}}$ is generated by two elements, $\overline{\mathfrak{K}}$ is special. Hence we may apply Theorem 2 to conclude that $\overline{\mathfrak{K}}$ contains a subalgebra $\overline{\mathfrak{H}}$ (not necessarily containing 1) such that $\overline{\mathfrak{H}} \cong \mathfrak{H}^{(3)}$. Since orthogonal idempotent elements can be lifted to $\mathfrak{K}$ and since $\mathfrak{J}$ contains no set of more than three non-zero orthogonal idempotents, $\overline{\mathfrak{K}}$ has this property too. It follows that $\overline{\mathfrak{K}}$ is simple. Since $\overline{\mathfrak{K}} \supseteq \overline{\mathfrak{H}}$ and $\dim \overline{\mathfrak{K}} \leq 9$ the classification of simple algebras (cf. § 2) shows that either $\overline{\mathfrak{K}}$ is nine-dimensional or $\overline{\mathfrak{K}} = \overline{\mathfrak{H}}$. In the first case $\mathfrak{N} = 0$ so that e is contained in a simple special Jordan algebra. The result then follows from Theorem 2. We can also dispose of the case in which $\mathfrak{N} = 0$ and $\overline{\mathfrak{K}} = \overline{\mathfrak{H}}$. It remains to consider that in which $\mathfrak{N} \neq 0$ and $\overline{\mathfrak{K}} = \overline{\mathfrak{H}}$. By the theorem of ALBERT-PENICO-TAFT ([2], [18], [21]) we may write $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{H}^{(3)} + \mathfrak{N}$ where $\mathfrak{H}^{(3)}$ contains the identity 1 of $\mathfrak{K}$ (and of $\mathfrak{J}$). Then $\mathfrak{N}$ is a unital bimodule for $\mathfrak{H}^{(3)}$ and since $\dim \mathfrak{N} \leq 3$, $\mathfrak{N}$ is isomorphic to the bimodule $\mathfrak{S}$ of skew-symmetric linear transformations relative to the form defining $\mathfrak{H}^{(3)}$. If $\mathfrak{N}^2 \neq 0$ a result of Penico's ([18], p. 407) shows that $\mathfrak{N}$ contains a proper non-zero ideal of $\mathfrak{K}$. This contradicts the irreducibility of $\mathfrak{S}$ as $\mathfrak{H}^{(3)}$-bimodule. Hence $\mathfrak{N}^2 = 0$ and $\mathfrak{K}$ has the structure of the Jordan algebra given in Lemma 3. The result therefore follows from Lemma 3. Next assume $e^2 = 0$, $e \neq 0$. Let $\mathfrak{J}'$ be the subspace of elements of trace 0. Since $\chi \neq 3$ we have $\mathfrak{J} = \Phi 1 + \mathfrak{J}'$. There exists a b in $\mathfrak{J}$ such that $\tau(e,b) \neq 0$ and since $\tau(e,1) = \tau(e) = 0$ we may suppose $b \in \mathfrak{J}'$. We know that $\mathfrak{J}$ contains a g such that $g^3 = 0$, $g^2 \neq 0$. Choose such a g

and let $\mathfrak{J}^*$ be the subspace spanned by the images of g^2 under the automorphism of $\mathfrak{J}$. Then our assumptions on Φ imply that $\mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}'$ (JACOBSON [15]). Hence there exists a g such that $g^3 = 0$ and $\tau(e, g^2) \neq 0$. Let $\mathfrak{R}$ be the subalgebra generated by e and g. Then, as in the first part, we may reduce the consideration to that in which $\mathfrak{R}$ is as in Lemma 3. The result then follows from Lemma 3.

If Φ is of characteristic $\chi \neq 3$ then we can apply Theorema 1, 1′ to show that the subalgebra $\mathfrak{R}$ generated by two nilpotent associates in an exceptional simple algebra is as given in Theorem 1, 1′. If the associates are of index three then $\mathfrak{R} \cong \mathfrak{H}^{(3)}$. We prove next that if the associates are of index two then $\mathfrak{R} \cong \mathfrak{H}^{(1)} \oplus \mathfrak{H}^{(2)}$. This will follow by showing that $\mathfrak{J}$ contains no subalgebra (containing 1) isomorphic to $\mathfrak{H}^{(2)}$. Thus $\mathfrak{H}^{(2)}$ has a basis (u, u', v) where u and u' are orthogonal idempotents such that $u + u' = 1$ and $u \cdot v = \frac{1}{2} v = u' \cdot v, v^2 = 1$. Suppose we have such elements in $\mathfrak{J}$. Then assuming, as we may, that the base field is algebraically closed, we may take $\mathfrak{J}$ to be the algebra of hermitian Cayley matrices and $u = \operatorname{diag}\{1,0,0\}$, $u' = \operatorname{diag}\{0,1,1\}$. Then the conditions $u \cdot v = \frac{1}{2} v = v' \cdot v$ imply that v has the following form:

$$v = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \bar{a} & 0 & 0 \\ \bar{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Then v^2 has diagonal elements $N(a) + N(b)$, $N(a)$ and $N(b)$ so that $v^2 = 1$ is impossible.

Theorem 4. Let $\mathfrak{J}$ be a finite dimensional exceptional simple Jordan algebra over a field of characteristic $\chi \neq 3$ such that $\mathfrak{J}$ contains nilpotent elements $\neq 0$. Let e_1 and e_2 be nilpotent elements of index three in $\mathfrak{J}$. Then there exists an automorphism η of $\mathfrak{J}$ such that $e_1^\eta = e_2$. The same result holds for index two if the base field is algebraically closed.

Proof. We note first that any two nilpotent elements e_i of index three in $\mathfrak{H}^{(3)}$ can be mapped into each other by an automorphism. Thus we can choose bases (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) so that $(x_i, x_j) = 0 = (y_i, y_j)$ if $i + j \neq 4$ and $(x_i, x_{4-i}) = \delta \neq 0$, $(y_i, y_{4-i}) = \varepsilon \neq 0$ while $x_1 e_1 = x_2, x_2 e_1 = x_3, x_3 e_1 = 0$, $y_1 e_2 = y_2$, $y_2 e_2 = y_3, y_3 e_2 = 0$. Let $a \in \mathfrak{H}^{(3)}$ and let (α_{ij}) be its matrix relative to (x_i) and let a^η be the linear transformation whose matrix is (α_{ij}) relative to the (y_i). Then $a^\eta \in \mathfrak{H}^{(3)}$ and $a \to a^\eta$ is an automorphism such that $e_1^\eta = e_2$. The first assertion of the theorem now follows from the fact that the e_i of index three can be imbedded in subalgebras isomorphic to $\mathfrak{H}^{(3)}$ and the known result that any isomorphism between subalgebras isomorphic to $\mathfrak{H}^{(3)}$ can be extended to an automorphism of $\mathfrak{J}$ (ALBERT-JACOBSON [5], p. 412). To prove the second statement we note that the e_i are contained in subalgebras isomorphic to $\mathfrak{H}^{(1)} \oplus \mathfrak{H}^{(2)}$. It is easy to see that if Φ is algebraically closed then such a subalgebra can be imbedded in a subalgebra $\mathfrak{C}$ isomorphic to the Jordan algebra of all the linear transformations of a three dimensional vector space

over Φ. The elementary divisor theory shows that any two nilpotent elements of index two in $\mathfrak{C}$ can be mapped into each other by an automorphism of $\mathfrak{C}$. The result follows as before.

Bibliography

[1] Albert, A. A.: "On Jordan algebras of linear transformations." Trans. Amer. Math. Soc. **59**, 524—555. — [2] Albert, A. A.: "The Wedderburn principal theorem for Jordan algebras." Annals of Math. **48**, 1—7 (1947). — [3] Albert, A. A.: "A structure theory for Jordan algebras." Annals of Math. **48**, 446—467 (1947). — [4] Albert, A. A.: "A theory of power associative commutative algebras." Trans. Amer. Math. Soc. **69** 503—527 (1950). — [5] Albert, A. A., and N. Jacobson: "Reduced exceptional simple Jordan algebras." Annals of Math. **66**, 400—417 (1957). — [6] Cohn, P. M.: "Special Jordan algebras." Canad. Journ. of Math. **6**, 253—264 (1954). — [7] Freudenthal, H.: "Oktaven, Ausnahmegruppen and Oktavengeometrie." Utrecht, 1951. — [8] Harsri, B.: "Centralizers in Jordan algebras", to appear in Pacific Journ. of Math. — [9] Jacobson, F. D., and N. Jacobson: "Classification and representation of semi-simple Jordan algebras." Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 141—169 (1949). — [10] Jacobson, N.: "Theory of Rings." Amer. Math. Soc. Surveys, vol. 2, New York, 1943. — [11] Jacobson, N.: Completely reducible Lie algebras of linear transformations. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 105—113 (1951). — [12] Jacobson, N.: "Structure of alternative and Jordan bimodules." Osaka Math. Jour. **6**, 1—70 (1954). — [13] Jacobson, N.: "A theorem on the structure of Jordan algebras." Proc. Nat. Acad. Sci. **42**, 140—147 (1956). — [14] Jacobson, N.: "A note on three dimensional simple Lie algebras." Indiana J. of Math. and Mech. 7, 823—832. (1958). — [15] Jacobson, N.: "Some groups of transformations defined by Jordan algebras", I and II, forthcoming in Journal für r. u. angew. Math.—[16] Jacobson, N., and L. J. Paige: "Jordan algebras with two generators." Indiana J. of Math. and Mech. **6**, 895—906 (1957). — [17] Malcev, A. I.: "Foundations of Linear Algebra" (Russian), Moscow-Leningrad, 1947. — [18] Penico, A. J.: "The Wedderburn principal theorem for Jordan algebras." Trans. Amer. Math. Soc. **70**, 404—421 (1951). — [19] Schafer, R. D.: "The exceptional simple Jordan algebras." Amer. J. of Math. **70**, 82—94 (1948). — [20] Shirshov, A. I.: "On special J-rings." Math. Sbornik. **38**, (**80**), 149—160 (1956). — [21] Taft, E.: "Invariant Wedderburn factors", Illinois Journ. of Math. **1**, 565—573 (1957).

(Eingegangen am 5. Juni 1958)

BEHNKE, H.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 387—392 (1958)

Otto Blumenthal zum Gedächtnis

Von
HEINRICH BEHNKE in Münster (Westf.)

Im Jahre 1938 mußte der damalige geschäftsführende Redakteur der Mathematischen Annalen, Otto Blumenthal, nach 32 Jahren aufopferungsvoller Tätigkeit auf Grund der nationalsozialistischen Eingriffe in die Pressefreiheit die Redaktion der Zeitschrift niederlegen. Die 20jährige Wiederkehr der Zeit seines Ausscheidens aus einer für das mathematische Leben in Deutschland so wichtigen Stellung und die Dankbarkeit, die unsere Redaktion ihm entgegenbringt, veranlaßt uns, seiner jetzt zu gedenken.

Otto Blumenthal stammt aus Frankfurt am Main, wo er als Sohn eines Arztes am 20. Juli 1876 geboren ist. Er besuchte das humanistische Gymnasium seiner Vaterstadt und hat sich zeit seines Lebens den Humaniora eng verbunden gefühlt. Noch im Alter las er lateinische und griechische Texte. Sein Sprachtalent und sein philologisches Interesse waren für einen Mathematiker völlig ungewöhnlich. Er sprach, las und schrieb noch als älterer Mann geläufig Französisch, Englisch und Russisch. Außerdem besaß er umfassende Kenntnisse der italienischen, holländischen und bulgarischen Sprache. Mit Vorliebe führte er gelehrte theologische Gespräche.

Als Abiturient muß er sehr geschwankt haben, welchen Wissenschaften er sich im Studium widmen solle. Er erwog lange — wie er selbst berichtete — Philologe zu werden, begann dann aber Ostern 1894 als Mediziner wie sein Vater. Doch im folgenden Winter wechselte er endgültig zur Mathematik und Physik über. Dazu wählte er die Universität Göttingen. Dort wirkte damals schon Felix Klein. Ostern 1895, also zum 2. Blumenthalschen Fachsemester, kam David Hilbert als Nachfolger von Heinrich Weber zur Georgia Augusta. Damit begann die Glanzzeit Göttingens.

In Hilberts Lebensgeschichte [34] berichtet Blumenthal eindrücklich von dem ersten Erscheinen Hilberts unter den Studenten in Göttingen. Doch Blumenthal war noch zu jung, um sogleich mit Hilbert in persönliche Verbindung treten zu können. Sein akademischer Lehrer war zunächst vor allem Adolf Sommerfeld. „Blumenthal war mein Lieblingsschüler", schreibt Sommerfeld in seinen handschriftlichen Erinnerungen, die er mir in seinem letzten Lebensjahr noch zugehen ließ.

Der Bund zwischen den beiden begann mit Sommerfelds Vorlesung über Wahrscheinlichkeitsrechnung im Sommer 1895. Dort fiel ihm der 19jährige Otto Blumenthal durch seine Intelligenz auf. Er war — so äußert sich Sommerfeld — äußerst bescheiden und anspruchslos. Eher hatte er zu wenig als zu viel

Selbstvertrauen. Im folgenden Semester las Sommerfeld projektive Geometrie. Da zeigte Blumenthal schon ein überlegenes geistiges Geschick — verbunden mit manueller Ungeschicklichkeit. In den nächsten Jahren wurde die Verbindung zwischen Sommerfeld und Blumenthal immer enger. Blumenthal widmete dann seine Dissertation [1], die 1898 entstand, seinem Lehrer Sommerfeld. 1905 wurde Blumenthal auf Veranlassung des großen theoretischen Physikers dessen Kollege in Aachen. So war eine Freundschaft, die für das ganze Leben währen sollte, entstanden.

Bei Hilbert hat Blumenthal zunächst nichts gehört. Von dessen Vorlesungen schreibt er, daß sie schmucklos gewesen seien. Die entscheidende Begegnung mit Hilbert fällt erst in die Zeit der höheren Semester. Damals hielt Hilbert gemeinsam mit Klein funktionentheoretische Seminare ab und bemühte sich sehr um die einzelnen Teilnehmer. So mußte ihm Blumenthal auffallen. Der wurde nun sein erster Doktorand und eröffnete so die glänzende Reihe der Hilbertschüler.

Blumenthal ging dann für einige Semester nach Paris und studierte bei Emile Borel und Camille Jordan. Die so gewonnene Beziehung zur französischen Mathematik hat er stets weiter gepflegt. Später sind dann auch einige Arbeiten im Anschluß an Borels Untersuchungen über ganze Funktionen von ihm verfaßt [9, 10, 11].

1901 habilitierte sich Blumenthal in Göttingen mit Untersuchungen zu den Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen [3, 4]. Veranlassung dazu gab Hilberts Interesse an Verallgemeinerungen der Modulfunktionen für mehrere Veränderliche zur Beherrschung der (relativ) abelschen Zahlkörper[1]).

Zu jedem total reellen algebraischen Zahlkörper K_1 vom n^{ten} Grade wird die Gruppe der Transformationen des Raumes der komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$:

$$z_i^* = \frac{\alpha_i z_i + \beta_i}{\gamma_i z_i + \delta_i}, \quad \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = \varepsilon_i,$$

zugeordnet. Dabei sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ beliebige ganze Zahlen aus K_1 mit der Nebenbedingung, daß ε_1 eine total positive Einheit ist. Die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sind die dazu konjugierten Zahlen, wobei ε_i für jedes i eine positive Einheit sein soll.

Diese Gruppe heißt heute die Hilbertsche Modulgruppe zu K_1. Sie transformiert bekanntlich den Teilraum T des C^n: $J(z_i) > 0, i = 1, \ldots, n$, in sich und ist dort eigentlich diskontinuierlich. Blumenthal untersuchte diese Gruppe und stellte dazu einen Fundamentalbereich auf, der mit dem Rande von T nur einen Punkt gemeinsam hat. Unter den Modulfunktionen von n Veränderlichen werden nun die in T meromorphen Funktionen verstanden, die invariant gegenüber der Modulgruppe sind. Blumenthal bewies, daß der Körper der Modulfunktionen zu einem festen Körper K ein endlich algebraischer Funktionenkörper in n Unbestimmten über C^n ist. Insbesondere ist durch je $n + 1$

---

[1]) Siehe dazu: HILBERTS Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß Paris 1900 (Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1900), Problem 12 und E. HECKE, Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. Math. Ann. 71, 1 (1902).

geeignet gewählte Modulfunktionen jede andere zu K gehörige Modulfunktion rational ausdrückbar.

Aussagen über algebraische Abhängigkeiten von Funktionen haben seitdem ein großes Interesse gefunden. Das gilt allerdings vor allem für kompakte komplexe Räume (Satz von W. L. Chow[2]), während der Fundamentalbereich der Hilbertschen Modulgruppe nicht kompakt ist.

Am Schluß der großen Arbeit von Blumenthal (Teil II, S. 526) macht der Autor eine kritische Bemerkung zu der Hypothese von Wirtinger, daß „eine Funktion von n Veränderlichen, welche in jeder Variablen algebraisch ist, bei konstanten Werten der übrigen, auch eine algebraische Funktion von n Veränderlichen ist". Diese Aussage hat man jahrzehntelang diskutiert und zu beweisen versucht. Heute ist sie (unter der stillen Voraussetzung, daß gemeint ist, algebraisch in allen Funktionselementen über jedem Punkte des nach Osgood abgeschlossenen C^n) ein spezieller Fall eines Satzes von W. L. Chow.

Durch die Blumenthalschen Untersuchungen entstand neben den $2\,n$-fach periodischen Funktionen von Riemann und Weierstraß eine zweite Klasse meromorpher Funktionen in n Veränderlichen, die von besonderem zahlentheoretischen Interesse waren. Zwar sind 2 Jahrzehnte verflossen, bis weitere Untersuchungen zu diesen Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen erschienen. Seitdem hat sich jedoch eine umfangreichere Literatur dazu entwickelt[3]).

Blumenthal schrieb unmittelbar im Anschluß an seine Arbeiten zu den Modulfunktionen einen Beitrag zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen [5]. Das Ergebnis dieser Arbeit lautet: Sind in einem kompakten Gebiet $G \subset C^n$ m holomorphe Funktionen

$$f_n(z_1, \ldots, z_n), \quad n = 1, \ldots m,$$

gegeben, so wird durch die Gleichungen

$$f_1 = 0, \ldots, f_m = 0$$

eine „analytische Menge" definiert, die in *endlich viele* in G irreduzible Komponenten zerfällt. Ist $m < n$, so ist diese Menge überall mindestens $(n - m)$-dimensional[4]).

Dieser Satz ist grundlegend für die heutige Theorie der analytischen Mengen geworden. In der heutigen Terminologie würde man ihn so formulieren: Ist K eine kompakte Menge in einem komplexen Raum X und A eine analytische Menge in X, so dringen in K nur endlich viele der irreduziblen Komponenten von A ein.

Blumenthal hat später, in der Festschrift zu Heinrich Webers 70. Geburtstag 1912, noch einmal ein wichtiges Problem der Funktionentheorie mehrerer

[2]) Siehe REINHOLD REMMERT: Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen. Math. Ann. **132**, 277—288 (1956) besonders S. 279.

[3]) Siehe Arbeiten von E. HECKE, H. D. KLOOSTERMAN, F. GÖTZKY, H. MAASS, N. G. DE BRUIJN, H. PETERSSON, M. KOECHER, O. HERRMANN, M. HERVÉ u. K. B. GUNDLACH.

[4]) Siehe WALTER RÜCKERT: Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Math. Ann. **107**, 259—281 (1932) und REINHOLD REMMERT u. KARL STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953).

Veränderlichen aufgegriffen. E. E. Levi hatte unmittelbar vorher die Hyperflächen untersucht, die im C^n den Rand von Holomorphiegebieten bilden können. Er hatte für diese Flächen eine notwendige und lokal auch hinreichende Bedingung aufgestellt[5]). Die Frage, ob diese Bedingung im Großen auch hinreichend ist, war der Leitfaden, an dem sich für 30 Jahre die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen entwickeln sollte[6]). Blumenthal war der erste, der auf die grundlegende Bedeutung dieses Problems hinwies [13]. Seine provisorische Antwort, die er mit 2 Beispielen begründete, war falsch. Das mindert aber nicht die Bedeutung dieser Arbeit, die akut blieb, bis K. Oka 1942 die endgültige Antwort fand[7]).

Vom Herbst 1901 bis Ostern 1904 und im Sommersemester 1905 lehrte Blumenthal in stetem, engen Gedankenaustausch mit Hilbert in Göttingen. Dazwischen war er ein Jahr zur Vertretung eines Ordinarius in Marburg tätig. Im Herbst 1905 übernahm er dann den Lehrstuhl in Aachen, den er bis zu seiner Vertreibung aus dem Amte im Herbst 1933 inne hatte. Sein Fortgang von Göttingen hat die Bindungen an Hilbert nicht gelockert. Seiner besonderen Stellung als ältester Schüler Hilberts hat Blumenthal sich zeit seines Lebens verpflichtet gefühlt. Seinem Meister zu helfen und im Interesse der schnell anwachsenden Göttinger Schule zu wirken, ist ihm allzeit eine Verpflichtung geblieben. So war er auch ausersehen, die Lebensgeschichte Hilberts zu schreiben [34]. Er führte diese Aufgabe mit größter Sorgfalt durch. Alle Einzelheiten aus dem Leben Hilberts, die er in Erfahrung bringen konnte, wurden auf die Verwendbarkeit in dieser umfangreichen und objektiven Darstellung von hohem Niveau geprüft. Das, was so entstand, ist von erstaunlicher Eindringlichkeit. Auch der junge Mathematiker unserer Tage, dem Hilbert und sein Kreis nicht mehr lebensnah sein kann, muß bei der Lektüre der Blumenthalschen Darstellung in ihren Bann gezogen werden.

In Blumenthals eigenem Sonderdruck liegt eine handgeschriebene Karte des Meisters, auf der dieser von seinem Glück schreibt, in Blumenthal einen so glänzenden Interpreten seines Lebenswerkes gefunden zu haben.

Eine weit umfangreichere Arbeit, die Blumenthal im Interesse der Göttinger Schule übernahm, war die Geschäftsführung der Mathematischen Annalen. 1902 war Hilbert neben Klein Herausgeber geworden. Doch Klein war völlig überlastet, und Hilbert lagen die Geschäfte nicht. So übernahm Blumenthal 1906 die Bürde der Geschäftsführung. Mit Sorgfalt las er jedes Manuskript und informierte Klein und Hilbert gewissenhaft über seine Eindrücke. 32 Jahre hat er so für die Annalen mit immer wachsendem Anteil an der Verantwortung gewirkt. In späteren Jahren ruhte die ganze Initiative der Redaktion bei ihm. In den Jahren 1925—1935, als 2, ja gelegentlich 3 Bände im Jahre

---

[5]) Siehe E. E. LEVI: Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni anal. di due o più var. compl. Ann. Mat. pur. appl. (3) **17** (1910); **18** (1911) und HEINRICH BEHNKE u. PETER THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Ergebn. Math. **3**, 3 (1938), II, 3 und IV, 3.

[6]) Siehe H. BEHNKE u. K. STEIN: Die Singularitäten der analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Nieuw Arch. Wisk. **23**, 227—242 (1949).

[7]) OKA, K.: VI. Domaines pseudoconvexes. Tohôku math. J. **49**, 15—52 (1942).

erschienen, hat er den größten Teil seiner Arbeitskraft unserer Zeitschrift gewidmet. Ihm gelang es, vor allem in dafür sehr ungünstigen Zeiten, den internationalen Charakter der Annalen zu wahren. Dazu verhalfen ihm seine Sprachkenntnisse und die Pflege der internationalen Beziehungen, wie er sie aus Göttingens Glanzzeit vor dem 1. Weltkrieg kannte.

Noch eine stattliche Reihe eigener Arbeiten hat er publiziert. Sie sind erstaunlich vielseitig. Sie betreffen Infinitesimalrechnung, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Differentialgeometrie und angewandte Mathematik. Sie zeugen alle von der umfangreichen Fachbildung, seinem Interesse an der neuesten Literatur und den Anregungen, die er aus seiner Lehrtätigkeit bezog.

Sein Lehramt in Aachen hat er jederzeit mit Eifer ausgefüllt und vielfach sich auch um solche Dinge bemüht, die nebenamtlich einem deutschen Professor anvertraut werden. Gegenüber jedem Studenten, der auch nur ein wenig echtes Interesse an der Mathematik zeigte, war er von großer Geduld und Hilfsbereitschaft. Güte und Humor ergänzten in glücklicher Weise diese so humanistisch gesinnte Persönlichkeit. Strahlende, gläubige Kinderaugen hat er sich bis in sein Alter bewahrt. Harte Worte liebte er gar nicht. Als er dann 1933 ohne zwingende Gründe aus dem Amte gestoßen wurde — er war das Opfer seiner für Völkerverständigung wirkenden Gesinnung — und diese Entlassung als Christ und als Frontkämpfer (die nach dem Gesetz vor Entlassungen geschützt waren) überhaupt nicht verstehen konnte, hat er in Gesprächen mit seinen Freunden Gehässigkeit gegen das Regime nicht geduldet. 1939 war auch für ihn durch die Rassengesetze das Leben in Deutschland unerträglich geworden. Holländische Freunde nahmen ihn auf. Nach der Besetzung der Niederlande kam er in ein Sammellager und dann nach Theresienstadt. Hier ist er nach langem, eindrucksvollen Ertragen geistigen und körperlichen Leidens als ein Mensch, der sich den Glauben an die hohen Güter des Menschengeschlechtes stets erhalten hat, am 12. November 1944 verstorben.

Veröffentlichungen von Otto Blumenthal

[1] Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern eines Stieltjesschen Kettenbruches. Diss. Göttingen 1898. 57 S.

[2] Die Bewegung der Ionen beim Zeemanschen Phänomen. Z. Math. u. Phys. **45**, 119—136 (1900).

[3, 4] Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. Math. Ann. **56**, 509—548 (1903); **58**, 497—527 (1904).

[5] Zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Math. Ann. **57**, 356—368 (1903).

[6] Über Thetafunktionen und Modulfunktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. dtsch. Math.-Ver. **13**, 120—133 (1904).

[7] Bemerkung zur Theorie der automorphen Funktionen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1904**, 92—97.

[8] Über die Zerlegung unendlicher Vektorfelder. Math. Ann. **61**, 235—250 (1905).

[9] Über ganze transzendente Funktionen. Jber. dtsch. Math-Ver. **16**, 97—109 (1907).

[10] Sur le mode de croissance des fonctions entières d'ordre infini. 147 S. Paris: Gauthier-Villars 1910.

[11] Principes de la théorie des fonctions entières. Bull. Soc. math. France **35**, 213—232 (1907).

1364

13 A

[12] Kanalflächen und Enveloppenflächen. Math. Ann. **70**, 377—404 (1911).

[13] Bemerkungen über die Singularitäten analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen. Festschrift Heinrich Weber 1912, 11—22.

[14] Über asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen, mit Anwendung auf eine asymptotische Theorie der Kugelfunktionen. Arch. Math. u. Phys. (3) **19**, 136—174 (1912).

[15] Über asymptotische Integration von Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung von Spannungen in Kugelschalen. Z. Math. u. Phys. **62**, 343—358 (1914). Auszug, vorher erschienen in Proc. fifth internat. Congress of Math., Cambridge **2**, 319—327 (1912).

[16] Genauigkeit der Wurzeln linearer Gleichungen. Z. Math. u. Phys. **62**, 359—362 (1914).

[17] Über die Druckverteilung längs Joukowskischer Tragflächen. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt **4**, 125—130 (1913).

[18] Einfache Beispiele ungleichmäßig konvergenter Reihen. Ann. Acad. Polytechn. Porto **8** (1913), 5 S.

[19] Zum Turbulenzproblem. S.-B. bayr. Akad. Wiss. **1913**, 563—595.

[20] Einige Minimums-Sätze über trigonometrische und rationale Polynome. Math. Ann. **77**, 390—403 (1916).

[21] KARL SCHWARZSCHILD. Jber. dtsch. Math. Ver. **26**, 56—75 (1917).

[22] Berechnung eines einstieligen Doppeldeckers mit Berücksichtigung der Kabelvorspannungen. Techn. Ber. herausgegeben von der Flugzeugmeisterei der Inspektion der Luftschiffertruppen **3**, 152—169 (1918).

[23] Über trigonometrische Polynome mit einer Minimumseigenschaft. Math. Z. **1**, 285 bis 302 (1918).

[24] Über eine neue Randwertaufgabe bei elastischen Membranen. Math. Z. **3**, 213—264 (1919).

[25] DAVID HILBERT. Naturwissenschaften **10**, 67—72 (1922).

[26, 27] Über rationale Polynome mit einer Minimumseigenschaft. Math. Ann. **85**, 160 bis 171 (1922); J. reine u. angew. Math. **165**, 137—245 (1931).

[28] Bemerkung zu der Arbeit des Herrn POPOFF: Über die Gewinnung summierbarer Potenzreihen aus summierbaren Fourier-Reihen. Math. Ann. **89**, 126—129 (1923).

[29] Einige Anwendungen der Sehnen- und Tangententrapezformeln. CHRISTIAN HUYGENS **3**, 1—17 (1924).

[30] Zur Einführung in die Infinitesimalrechnung. Z. math. u. phys. Unterr. **57**, 200—203 (1926).

[31] Einige Anwendungen der Integralform des Taylorschen Restglieds. „Probleme der modernen Physik. ARNOLD SOMMERFELD zum 60. Geburtstag gewidmet". S. 157—165. Leipzig: S. Hirzel 1928.

[32] Über Polynome mit gewissen Minimumseigenschaften, nebst einiger Anwendung auf die Theorie der ganzen Funktionen. Trav. I. Congrès Math. l'URSS. S. 262—268. Kharkow 1930.

[33] Zu den Entwicklungen nach Eigenfunktionen linearer symmetrischen Integralgleichungen. Math. Ann. **110**, 726—733 (1935).

[34] Lebensgeschichte von DAVID HILBERT. DAVID HILBERT, gesammelte Abhandlungen III. S. 388—429. Berlin: Julius Springer 1935.

[35] Über die Knickung eines Balkens durch Längskräfte. Z. angew. Math. u. Mech. **17**, 232—244 (1937).

[36] La Géométrie des Polynomes Binomiaux. C. R. Congrès Sci. Math. Liège, 17—22 juillet 1939.

[37] Enkele Benaderingsformules voor bepaalde Integralen. Mathematica B, **10**, 25—38 (1941—1942).

[38] Het Isoperimetrische Vraagstuk. (Gemeinsam mit J. WOLFF.) Zu HILBERTS 80. Geburtstag.

(Eingegangen am 9. November 1958)

STOLL, W.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 393—429 (1958)

Über meromorphe Abbildungen komplexer Räume. II

Von

WILHELM STOLL in Princeton, N.J.

Im Teil II werden weitere Kriterien für die Übereinstimmung der beiden Meromorphiebegriffe aufgestellt. Wie in Teil I bezeichnet τ eine holomorphe Abbildung einer offenen Teilmenge A eines komplexen Raumes G in einen komplexen Raum H, wobei $M = G - A$ dünn vorausgesetzt wird. Die Abbildung τ heißt lückenlos, wenn für jede konvergente $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} P^\nu = P \in M$ die Bildfolge $\tau(P^\nu)$ eine konvergente Teilfolge hat. Die Abbildung τ heißt R-meromorph (meromorph im Sinne von REMMERT), wenn ihr Graph $\overline{T}$, das ist die abgeschlossene Hülle von $T = \{(P, \tau(P)) \mid P \in A\}$ in $G \times H$, eine in $G \times H$ analytische Menge ist. Eine R-meromorphe und lückenlose Abbildung heißt SR-meromorph. Die andere Definition der Meromorphie benutzt den Begriff der Streumenge. Sind $R \subseteq M$ und $L \subseteq G$, so gehört $Q \in H$ dann und nur dann zu $\Sigma_\tau(R, L)$, wenn es eine Folge $P^\nu \in L \cap A$ mit

$$\lim_{\nu\to\infty} (P^\nu, \tau(P)) = (P, Q) \in R \times H$$

gibt. Die Abbildung heißt meromorph (bzw. schwach meromorph bzw. lückenfrei), wenn für jeden Punkt $P \in M$ und jede eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit L von G mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P\}$ die Streumenge $\Sigma_\tau(P, L)$ aus genau (bzw. höchstens, bzw. mindestens) einem Punkt besteht. Im übrigen sei auf die Definitionen und Bezeichnungsweise von Teil I verwiesen.

Nach einigen Vorbereitungen in § 6 werden die Kriterien in § 7 hergeleitet; sie werden in § 8 auf Modifikationen angewandt.

§ 6. Einige Hilfssätze

In diesem Paragraphen sollen einige später benötigten Hilfssätze bewiesen werden.

Hilfssatz 6.1. Voraussetzung. *Im Raum C^n von n komplexen Veränderlichen sei ein Gebiet G gegeben. Sei E die Ebene $\{\mathfrak{z} \mid z_{p+1} = \cdots = z_n = 0\}$ und $M = G \cap E$ zusammenhängend. Sei W ein Gebiet in der Zahlenebene C^1 der Veränderlichen w und W_1 ein beschränktes Teilgebiet mit $\overline{W}_1 \subseteq W$. Sei $W - \overline{W}_1$ ein Gebiet. Außerdem werde gesetzt:*

$$A = G - M\,, \qquad B = W \times A\,, \qquad V = W \times G$$
$$S = W \times M = V - B \qquad\qquad S_1 = \overline{W}_1 \times M \subseteq S\,.$$

In B sei eine rein p-dimensionale analytische Menge N gegeben, die auf $S - S_1$ regulär ist. N werde in einem Punkt von S_1 singulär. Zu jedem Punkt $\mathfrak{a} \in M$

werde die Ebene

$$L(\mathfrak{a}) = W \times \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \in G\,,\quad z_\nu = a_\nu\,,\quad \nu = 1, \ldots, p\} \qquad (\mathfrak{a} \in M)$$

definiert. Sei F die Menge aller $\mathfrak{a} \in M$ *so, daß die Punkte von N auf* $L(\mathfrak{a})$ *sich nicht gegen einen Punkt von S häufen.*

Behauptung. 1. *Zu jedem* $\mathfrak{a} \in M$ *gibt es ein* $w \in S_1$ *so, daß* N *in* $(w, \mathfrak{a})$ *singulär wird.*

2. *Die Menge F hat das Maß Null bezüglich des Lebesgueschen Maßes von* $2p$ *(reellen) Dimensionen auf E.*

Beweis. Die analytische Fortsetzung von N in $B_1 = B \cup (S - S_1) = V - S_1$ ist $N_1 = \overline{N} \cap B_1$. In $S - S_1$ ist $N_2 = N_1 \cap S$ analytisch mit $\dim N_2 \leq p - 1$. Sei $\pi : V \to G$ die natürliche Projektion $\pi(w, \mathfrak{z}) = \mathfrak{z}$.

Die Faser $N_2 \cap \pi^{-1}\pi(w, \mathfrak{z})$ der auf N_2 beschränkten Abbildung π hat höchstens die Dimension 1. Die Punkte $(w, \mathfrak{z})$, in denen diese Faser die Dimension 1 hat, bilden eine analytische Menge $N_3 \subseteq N_2$. Da $W - W_1$ zusammenhängend ist, hat N_3 die Gestalt $N_3 = (W - \overline{W}_1) \times \pi(N_3)$. Daher ist die Projektion $N_3' = \pi(N_3)$ analytisch. Es ist $\dim N_3' \leq \dim N_3 - 1 \leq p - 2$. Daher kann N nicht nur auf $\overline{W}_1 \times N_3'$ singulär werden. Außerdem zeigt sich, daß $M - N_3' = D$ zusammenhängt. Sei D_1 die Teilmenge der $\mathfrak{a} \in M$, für die $W \times \{\mathfrak{a}\}$ einen singulären Punkt von N enthält. Wie soeben festgestellt wurde, ist $D \cap D_1 \neq \emptyset$. Nun gilt:

a) *In M ist* D_1 *abgeschlossen*: Sei $\mathfrak{z}_0 \in \overline{D}_1 \cap M$. Dann gibt es eine Folge $(w^\nu, \mathfrak{z}^\nu) \in \overline{W}_1 \cap D_1$ von singulären Punkten von N mit $\mathfrak{z}_0 = \lim\limits_{\nu \to \infty} \mathfrak{z}^\nu$. Da $\overline{W}_1$ kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge w^{ν_μ} von $w^\nu \in \overline{W}_1$. Es ist $(w, \mathfrak{z}_0) = \lim\limits_{\mu \to \infty} (w^{\nu_\mu}, \mathfrak{z}^{\nu_\mu}) \in \overline{W}_1 \times M \subseteq W \times M$ ein singulärer Punkt von N. Also ist $\mathfrak{z}_0 \in D_1$. Daher sind D_1 in M und $D_1 \cap D$ in D abgeschlossen.

b) *In D ist* $D_1 \cap D$ *offen.* Sei $\mathfrak{z}_0 \in D_1 \cap D$. Es ist $\pi^{-1}(\mathfrak{z}_0) \cap N_2 = [W \times \{\mathfrak{z}_0\}] \cap N_2$ analytisch in B mit $\dim \pi^{-1}(\mathfrak{z}_0) \cap N_2 < 1$. Also gibt es ein beschränktes Gebiet W_2 mit $\overline{W}_1 \subseteq W_2 \subseteq \overline{W}_2 \subseteq W$ so, daß

$$N_2 \cap [(\overline{W}_2 - W_2) \times \{\mathfrak{z}_0\}] = \emptyset$$

ist. Da $(\overline{W}_2 - W_2) \times \{\mathfrak{z}_0\}$ kompakt ist, gibt es eine offene, zusammenhängende Umgebung U von $\mathfrak{z}_0$ in G so, daß $[(\overline{W}_2 - W_2) \times U] \cap N_1 = \emptyset$ ist. Seien

$$A^* = U \cap A = U - M\,,\qquad M^* = U \cap M = U - A^*,\quad B^* = W_2 \times A^*$$
$$V^* = W_2 \times U \qquad\qquad S^* = W_2 \times M^* = V^* - B^*,\quad N^* = N \cap V^* \subseteq A^*.$$

Man kann U so wählen, daß M^* zusammenhängend ist. Man hat nun

$$[(\overline{W}_2 - W_2) \times U] \cap \overline{N}^* = [(\overline{W}_2 - W_2) \times U] \cap N_1 = \emptyset\,.$$

Daher ist die Projektion $\pi^* : N^* \to A^*$ eigentlich. Jede Faser $\pi^{-1}(\mathfrak{z}_0) \cap N^*$ hat höchstens die Dimension Null. Daher ist $N' = \pi^*(N^*)$ in A^* analytisch und von der reinen Dimension p oder leer. Da aber N, also auch N^*, in einem Punkt von $\overline{W}_1 \times \{\mathfrak{z}_0\} \subseteq S$ singulär wird, sind $N^* \neq \emptyset$ und $N' \neq \emptyset$.

Angenommen, N' ist regulär auf M^*. Dann ist $\overline{N}' \cap M^*$ eine höchstens $(p-1)$-dimensionale analytische Menge und $\overline{N}^* \cap S^* \subseteq W_2 \times (\overline{N}' \cap M^*)$. Also

wird N^* nur auf der höchstens p-dimensionalen analytischen Menge $W_2 \times \times (\overline{N}' \cap M^*)$ singulär. Da N^* singulär wird, ist es singulär in jedem Punkt eines irreduzibeln Teiles $W_2 \times N''$ von $W_2 \times (\overline{N}' \cap M^*)$. Also ist

$$\theta \neq (\overline{W}_2 - W_2) \times N'' \subseteq \overline{N}^* \cap [(\overline{W}_2 - W_2) \times U] = \theta .$$

Widerspruch. Die analytische Menge N' ist in einem, also jedem Punkt von M^* singulär.

Wäre nun $a \in M^* - D_1$, so wäre N regulär auf $\overline{W}_2 \times \{a\}$, also auch regulär auf $\overline{W}_2 \times (U_1 \cap M^*)$, wobei U_1 eine offene Umgebung in U von a ist. Dann ist $\overline{N}' \cap U_1 = \pi(\overline{N} \cap (W_2 \times U_1)) = \pi(\overline{N}^* \cap (W_2 \times U_1))$ analytisch in U_1. Also wäre N' regulär in a, was falsch ist. Folglich ist $D \cap D_1 \supseteq M^*$ mit $M^* = U \cap M$. Es ist $D \cap D_1$ in D offen.

Da D zusammenhängend und $D \cap D_1 \neq \theta$ abgeschlossen und offen in D ist, folgt $D \cap D_1 = D$. Außerdem gilt $M = \overline{D} \cap M \subseteq \overline{D}_1 \cap M = D_1 \cap M \subseteq M$. Also ist $D_1 = M$. Die Behauptung 1 ist bewiesen.

c) ***Es ist $F \cap D$ eine Nullmenge.*** Dieselbe Konstruktion wie in b) werde zu $\mathfrak{z}_0 \in D$ durchgeführt. Sei F' die Menge aller $a \in M'$, für die sich die in

$$L'(a) = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \in G \,,\; z_\nu = a_\nu \,,\; \nu = 1, \ldots, p\}$$

enthaltenen Punkte von N' nicht gegen einen Punkt von M^*, d. h. nicht gegen a häufen. Dann ist F' eine Nullmenge[16]).

Sei $a \in M^* - F'$. Dann gibt es eine gegen a konvergierende Folge $\mathfrak{z}^\nu \in L'(a) \cap \cap N'$. Ein $w^\nu \in W_2 \subseteq \overline{W}_2$ existiert mit $(w^\nu, \mathfrak{z}^\nu) \in N^*$. Da $\overline{W}_2$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge w^{ν_μ} gegen ein $w \in \overline{W}_2 \subseteq W$. Es ist

$$(w, a) = \lim_{\mu \to \infty} (w^{\nu_\mu}, \mathfrak{z}^{\nu_\mu}) \in \overline{N}^* \cap (\overline{W}_2 \times M^*) \subseteq \overline{N} \cap S$$

mit

$$(w^{\nu_\mu}, \mathfrak{z}^{\nu_\mu}) \in [W \times L'(a)] \cap N = L(a) \cap N .$$

Also ist $a \in M^* - F$, woraus sich $F \cap U \subseteq F'$ ergibt. Da F' eine Nullmenge ist, ist auch $F \cap U$ und somit $F \cap D$ eine Nullmenge. $M - D = N_3'$ ist eine Nullmenge, also auch $F = (F \cap D) \cup (F \cap N_3')$, w.z.b.w.

Die Menge der Singularitäten von N braucht nicht analytisch zu sein, ja kann eine höhere (topologische) Dimension als N haben, wie man an Beispielen leicht sieht. Aus Hilfssatz 6.1. kann man einige Kriterien für die Fortsetzung analytischer Mengen erhalten.

Hilfssatz 6.2. Voraussetzung. *In einem komplexen Raum G sei eine analytische Menge M der reinen Dimension s gegeben. Sei $\pi: G \to H$ eine holomorphe Abbildung in einen komplexen Raum H. Der Rang der Abbildung π auf M sei $r(P, M) = s - \dim_P[\pi^{-1}\pi(P) \cap M] = q$ konstant.*

Behauptung: *In G ist $\pi(M)$ fastdünn von der Dimension q.*

Beweis. Sei (M^*, χ) der zu M gehörige Überlagerungsraum und $r^*(R)$ der Rang der holomorphen Abbildung $\pi\,\chi: M^* \to H$. Es ist $r^*(R) = s - \dim(\pi\,\chi)^{-1}\pi\,\chi(R)$. Sei $P_1 \in \pi^{-1}\pi(P) \cap M$, dann ist $\pi^{-1}\pi(P) \cap M = \pi^{-1}\pi(P_1) \cap M$ in P_1 $(s-q)$-dimensional. Also hat $\pi^{-1}\pi(P) \cap M$ die reine

[16]) Siehe STOLL [21], Zusatz zu Satz 2.

Dimension $s-q$. Da $\chi^{-1}(P)$ für jedes $P \in M$ nur aus endlich vielen Punkten besteht, hat $(\pi\,\chi)^{-1}\pi\,\chi(R) = \chi^{-1}(\pi^{-1}\pi\,\chi(R))$ die reine Dimension $s-q$. Daher ist $r^*(R) = q$ für alle $R \in M^*$. Zu jedem Punkt $R \in M^*$ gibt es nach Remmert [12], Satz 19 eine offene Umgebung U so, daß $\pi\,\chi(U)$ lokalanalytisch und rein q-dimensional ist. Abzählbar viele solcher Umgebungen U_ν überdecken M^*. Also ist

$$\pi(M) = \pi\,\chi(M^*) = \pi\,\chi\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} U_\nu\right) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \pi\,\chi(U_\nu)$$

fastdünn von der Dimension q, w.z.b.w.

Hilfssatz 6.3. Voraussetzung. *In einem komplexen Raum G sei eine analytische Menge M der reinen Dimension s gegeben. Sei $\pi: G \to H$ eine holomorphe Abbildung in einen komplexen Raum H mit dem Rang*

$$\begin{aligned} r(P, M) &= s - \dim_P[\pi^{-1}\pi(P) \cap M] \\ r(M) &= \operatorname*{Max}_{P\in M} r(P, M)\,. \end{aligned}$$

Sei $M_q = \{P \mid P \in M$ und $r(P, M) \leq q\}$.

Behauptung. 1. *Die Menge M_q ist analytisch*[17]). *Sind M_q^λ $(\lambda \in \Lambda_q)$ ihre irreduziblen Teile, so ist*

$$\begin{aligned} r(P, M_q^\lambda) &\leq q & &\textit{für} \quad P \in M_q^\lambda \\ r(P, M_q^\lambda) &= r_q^\lambda & &\textit{für} \quad P \in M_q^\lambda - M_{q-1} \\ r(P, M_q^\lambda) &\leq r_q^\lambda & &\textit{für} \quad P \in M_q^\lambda \cap M_{q-1}\,. \end{aligned}$$

2. *Die Bildmenge $\pi(M_q)$ ist fastdünn von der Dimension q in H.*

3. *Ist H rein p-dimensional mit $p > q$, so ist $\pi(M_q)$ in H fastdünn*[18]).

Beweis. Sei $P_0 \in M_q^\mu - \bigcup_{\substack{\lambda\in\Lambda_q \\ \lambda\neq\mu}} M_q^\lambda$. Sei $P \in \pi^{-1}\pi(P_0) \cap M$. Dann gilt

$$\dim_P \pi^{-1}\pi(P_0) \cap M = \dim_P \pi^{-1}\pi(P) \cap M \begin{cases} < s-q & \text{für } P \in M - M_q \\ \geq s-q & \text{für } P \in M_q \\ = s-q & \text{für } P \in M_q - M_{q-1}\,. \end{cases}$$

Daher gibt es einen irreduzibeln Teil F von $\pi^{-1}\pi(P_0) \cap M$ durch P_0 mit $\dim F \geq s-q$. Daher ist $F \subseteq M_q$. Da für eine Umgebung U von P_0 gilt $M_q^\mu \cap U = M_q \cap U$, folgt

$$s - q \leq \dim F \leq \dim_{P_0} \pi^{-1}\pi(P_0) \cap M_q = \dim_{P_0} \pi^{-1}\pi(P_0) \cap M_q^\mu\,,$$

d. h.

$$\begin{aligned} r(P_0, M_q^\mu) = \dim M_q^\mu - \dim_{P_0} \pi^{-1}\pi(P_0) \cap M_q^\mu \leq \dim M_q^\mu - (s-q) = r_q^\mu \leq \\ \leq \dim M - (s-q) = q \end{aligned}$$

für alle $P_0 \in M_q^\mu$ mit Ausnahme einer auf M_q^μ nirgendsdichten Menge D. Ist $P_0 \in M_q^\mu$ beliebig, so gibt es eine Umgebung U_1 von P_0 mit $r(P, M_q^\mu) \geq r(P_0, M_q^\mu)$ für alle $P \in U_1 \cap M_q^\mu$. Ein $P \in U_1 \cap M_q^\mu - D$ existiert, woraus $r(P_0, M_q^\mu) \leq$ $\leq r(P, M_q^\mu) \leq r_q^\mu \leq q$ folgt. Ist $P_0 \in M_q^\mu - M_{q-1}$, so ist

$$\begin{aligned} r(P_0, M_q^\mu) &= \dim M_q^\mu - \dim_{P_0} \pi^{-1}\pi(P_0) \cap M_q^\mu \geq \\ &\geq \dim M_q^\mu - \dim_{P_0} \pi^{-1}\pi(P_0) \cap M = \dim M_q^\mu - (s-q) = r_q^\mu\,. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung 1 bewiesen.

[17]) Dies folgt aus Remmert [12], Satz 16.

[18]) Speziell ist in Aussage 3 der Satz 10 von Grauert [4] enthalten.

2. Die zweite Behauptung ist für $q = 0$ richtig. Denn dann ist M_0 rein s-dimensional oder leer. Entweder ist $\pi(M_0) = \theta$, oder jede Faser $\pi^{-1}\pi(P_0) \cap \cap M_0$ ist leer oder besteht aus einer Vereinigung von irreduziblen Teilen von M. Daher gibt es höchstens abzählbar viele nicht leere Fasern, d. h. $\pi(P_0)$ ist höchstens abzählbar, also fastdünn von der Dimension Null.

Angenommen, die zweite Behauptung ist für $q-1$ richtig. Dann ist $\pi(M_{q-1})$ fastdünn von der Dimension $q-1$, also auch von der Dimension q. In $G - M_{q-1}$ ist $M_q^\lambda - M_{q-1}$ leer oder rein dimensional und hat den konstanten Rang $r_q^\lambda \leq q$. Also ist $\pi(M_q^\lambda - M_{q-1})$ fastdünn von der Dimension $r_q^\lambda \leq q$ gemäß Hilfssatz 6.2. Es ist

$$\pi(M_q) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_q} \pi(M_q^\lambda - M_{q-1}) \cup \pi(M_{q-1})$$

fastdünn von der Dimension q. Die Behauptung 2 ist bewiesen, woraus sofort die Behauptung 3 folgt.

Hilfssatz 6.4. *Sei M fastdünn von der Dimension p im komplexen Raum G und $\pi: G \to H$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist $\pi(M)$ fastdünn von der Dimension p in H.*

Beweis. Abzählbar viele höchstens p-dimensionale irreduzible lokalanalytische Mengen M_ν überdecken M. Jedes M_ν ist analytisch in einer Umgebung U_ν. Die Abbildung $\pi: U_\nu \to H$ hat auf M_ν den Rang $r(P, M_\nu) \leq \leq \dim M_\nu \leq p$. Also ist $\pi(M_\nu)$ fastdünn von der Dimension p. Dasselbe gilt dann von $\pi(M) \subseteq \pi\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \pi(M_\nu)$, w.z.b.w.

Hilfssatz 6.5. Voraussetzung. *In einem Gebiet G des $C^n = C^{n-p} \times C^p$ sei eine von der Dimension $n-p$ fastdünne Menge M gegeben. Sei F die Menge der Punkte $\mathfrak{x} \in C^{n-p}$,* für die *$M \cap (\{\mathfrak{x}\} \times C^p)$ mehr als abzählbar viele Punkte enthält.*

Behauptung. *Die Menge F ist fastdünn in C^{n-p}.*

Beweis. Sei $\pi: C^n \to C^{n-p}$ die natürliche Projektion $\pi(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{n-p})$. Es gibt abzählbar viele lokalanalytische und irreduzible Mengen M_ν, die M überdecken: $M \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ mit $\dim M_\nu \leq n-p$. Es ist $r(\mathfrak{z}, M_\nu) = \dim M_\nu - \dim(\pi^{-1}\pi(\mathfrak{z}) \cap M_\nu)$ der lokale Rang von π in $\mathfrak{z} \in M_\nu$ bezüglich M_ν und $r(M_\nu) = \underset{\mathfrak{z} \in M_\nu}{\operatorname{Max}}\, r(\mathfrak{z}, M_\nu)$ der globale Rang von π bezüglich M_ν.

1. Fall. Es sei $r(M_\nu) = n-p$. Wegen $\dim M_\nu \leq n-p$ ist $\dim(\pi^{-1}\pi(\mathfrak{z}) \cap M_\nu) = 0$, wenn $r(\mathfrak{z}, M_\nu) = n-p$ ist. Die Menge $\hat{M}_\nu = \{\mathfrak{z} \mid r(\mathfrak{z}, M_\nu) < n-p\}$ ist analytisch auf M_ν mit $\dim M_\nu \leq n-p-1$. Also ist der Rang auf jedem irreduzibeln Teil $\hat{M}_\nu'$ von $\hat{M}_\nu$

$$r(\hat{M}_\nu') = \underset{\mathfrak{z} \in \hat{M}_\nu'}{\operatorname{Max}}\, r(\mathfrak{z}, \hat{M}_\nu') \leq \dim \hat{M}_\nu' \leq n-p-1 .$$

Daher ist $\pi(\hat{M}_\nu) = F_\nu$ fastdünn in C^{n-p}. Wenn $\mathfrak{x} \in C^{n-p} - F_\nu$ ist, so ist $\pi^{-1}(\mathfrak{x}) \cap M_\nu$ leer oder lokalanalytisch von der Dimension Null, d. h. höchstens abzählbar.

2. Fall. Es sei $r(M_\nu) < n - p$. Nach Hilfssatz 6.3 ist $F_\nu = \pi(M_\nu)$ fastdünn in C^{n-p}. Wenn $\mathfrak{x} \in C^{n-p} - F_\nu$ ist, so ist $\pi^{-1}(\mathfrak{x}) \cap M_\nu = \emptyset$.

Nun ist $F' = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ fastdünn in C^{n-p}. Ist $\mathfrak{x} \in C^{n-p} - F'$, so ist $\mathfrak{x} \notin F_\nu$ für jedes ν. Folglich gilt

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \pi^{-1}(\mathfrak{x}) \cap M_\nu = \pi^{-1}(\mathfrak{x}) \cap \bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \supseteq (\{\mathfrak{x}\} \times C^p) \cap M$$

ist höchstens abzählbar, d. h. $\mathfrak{x} \in C^{n-p} - F$. Wegen $F \subseteq F'$ ist F fastdünn in C^{n-p}, w.z.b.w.

Daraus erhält man leicht

Hilfssatz 6.6. Voraussetzung. *In einem Gebiet G des C^n sei eine fastdünne Menge M gegeben. Der komplexprojektive Raum P^{n-1} werde als Graßmannmannigfaltigkeit der durch den Ursprung gehenden komplexen Geraden aufgefaßt. Sei F die Menge der Geraden $g \in P^{n-1}$, für die $g \cap M$ mehr als abzählbar viele Punkte enthält.*

Behauptung. *Die Menge F ist fastdünn in P^{n-1}.*

Beweis. Sei $E = \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\}$. Durch

$$\tau(\mathfrak{z}) = \left(\frac{z_1}{z_n}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, z_n\right)$$

wird $C^n - E$ umkehrbar holomorph auf sich abgebildet. Seien $(z_1 : \ldots : z_n)$ homogene Koordinaten von P^{n-1} und sei $D = \{(z_1 : \ldots : z_n) \mid z_n = 0\}$. Die komplexe Gerade $g = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = z\,\mathfrak{a}\}$ mit $\mathfrak{a} \neq 0$ wird durch den Punkt $g = (a_1 : \ldots : a_n)$ von P^{n-1} repräsentiert. Sei $g \in P^{n-1} - D$; dann wird durch

$$\lambda(g) = \left(\frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, 0\right)$$

eine umkehrbar holomorphe Abbildung von $P^{n-1} - D$ auf E gegeben. Die Menge F' aller $\mathfrak{b} \in E$, zu denen es überabzählbar viele Punkte $(\mathfrak{b}, z_n) \in \tau(M - E)$ gibt, ist nach dem letzten Hilfssatz fastdünn in E. Sei nun $g = (a_1 : \ldots : a_n)$ eine Gerade aus $F - D$. Dann ist $M \cap g - E$, also auch

$$\begin{aligned}\tau(M \cap g - E) &= \tau(M - E) \cap \tau(g - E)\\ &= \tau(M - E) \cap \left\{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = \left(\frac{a_1}{a_n}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}, z\,a_n\right),\ 0 < |z| < \infty\right\}\\ &= \tau(M - E) \cap \{(\lambda(g), z_n) \mid 0 < |z_n| < \infty\}\end{aligned}$$

überabzählbar. Also ist $\lambda(g) \in F'$, d. h. $g \in \lambda^{-1}(F')$, woraus $F - D \subseteq \lambda^{-1}(F')$ folgt. Da F' und somit auch $\lambda^{-1}(F')$ fastdünn sind, ist auch $F - D$, also F fastdünn, w.z.b.w.

Nun soll noch Satz 2.8 verallgemeinert werden; dazu wird zunächst bewiesen:

Hilfssatz 6.7. Voraussetzung. *Sei G ein Gebiet des C^n und E eine q-dimensionale komplexe Ebene von C^n. Sei $M = G \cap E$ zusammenhängend und N eine rein p-dimensionale analytische Menge aus $A = G - M$, die höchstens auf einer abgeschlossenen und von der Dimension $p - 1$ fastdünnen Teilmenge S von M innerhalb G singulär wird.*

Behauptung. *Durch $\overline{N}$ wird S eindeutig in G fortgesetzt.*

Beweis. Für $p \geqq q$ ist die Behauptung richtig nach Satz 2.8. Angenommen, die Behauptung ist richtig für $q - 1 \geqq p$, so werde sie für q bewiesen. Sei $\mathfrak{a}_0 \in S$ beliebig gewählt. Man wählt $\mathfrak{a}_0$ als Ursprung eines Koordinatensystemes, dessen letzten q-Koordinatenachsen die Ebene E aufspannen. Da $q - 1 \geqq p$ und $S \cup [\overline{N} \cap (M - S)] = (S \cup \overline{N}) \cap M$ fastdünn von der Dimension $p - 1$ auf E ist, kann man nach Hilfssatz 6.6 die letzte Koordinatenachse so wählen, daß sie $(S \cup \overline{N}) \cap M$ in höchstens abzählbar vielen Punkten schneidet. Eine Umgebung U des Nullpunktes der folgenden Art existiert

$$U_1 = \{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \mid |z_\nu| < s_\nu, \nu = 1, \ldots, n-1\},$$
$$U_2 = \{z_n \mid |z_n| < s_n\}, \quad U_2' = \{z_n \mid |z_n| \leqq r\} \qquad (0 < r < s_n),$$
$$U = U_1 \times U_2, \qquad U' = U_1 \times U_2',$$
$$M_0 = M \cap U = \{(0, \ldots, 0, z_{n-q+1}, \ldots, z_n) \mid |z_\nu| < s_\nu\},$$
$$N_0 = N \cap U \subseteq U', \quad S_0 = U \cap S \subseteq M_0 \cap U' = M_0'.$$

Angenommen, N ist in einem Punkt von S_0 singulär. Dann ist N_0 im selben Punkt singulär und $N_0 \neq \emptyset$ eine rein p-dimensionale analytische Teilmenge von $A_0 = U \cap A = U - M_0$. Sei π die Projektion $\pi(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Es ist $\pi(U) = U_1$ offen und $\pi(M_0) = M_1 \subseteq U_1$ ein zusammenhängender Schnitt mit einer $(q-1)$-dimensionalen komplexen Ebene. Da N_0 in U' enthalten ist, ist die Projektion $\pi: N_0 \to U_1 - M_1 = A_1$ eigentlich und jede Faser ist nulldimensional. Also ist $N_1 = \pi(N_0)$ in A_1 analytisch und rein p-dimensional. Nach Satz 6.4 ist $S_1 = \pi(S_0) \subseteq M_1$ fastdünn von der Dimension $p - 1$. Ist $\mathfrak{z}^\nu \in S_1$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} \mathfrak{z}^\nu = \mathfrak{z} \in M_1$, so gibt es eine Folge $(\mathfrak{z}^\nu, z_n^\nu) \in S_0$. Da $|z_n^\nu| \leqq r$ ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $z_n^{\nu_\mu}$ mit $z_n = \lim\limits_{\mu \to \infty} z_n^{\nu_\mu}$, wobei $|z_n| \leqq r$ ist. Es ist

$$(\mathfrak{z}, z_n) = \lim_{\mu \to \infty} (\mathfrak{z}^{\nu_\mu}, z_n^{\nu_\mu}) \in \overline{S}_0 \cap U = S_0 .$$

Daher ist $\mathfrak{z} \in \pi(S_0) = S_1$. Die Menge S_1 ist abgeschlossen in M_1. Es ist $\overline{N}_0 \cap (U - \pi^{-1}(S_1)) = \widetilde{N}_0$ analytisch in $U - \pi^{-1}(S_1)$ mit $\widetilde{N}_0 \cap A_0 = N_0$. Wegen $N_0 \subseteq U' - \pi^{-1}(S_1)$ ist $\widetilde{N}_1 = \pi(\widetilde{N}_0)$ analytisch in $U_1 - S_1$ mit $\widetilde{N}_1 \cap A_1 = N_1$. Also wird N_1 höchstens auf S_1 singulär. Nach Induktionsannahme ist das nicht der Fall. In U_1 ist $\overline{N}_1 \cap U_1$ analytisch. Es ist $N_0 \subseteq \pi^{-1}(\overline{N}_1) \cap U$, wobei $\pi^{-1}(\overline{N}_1) \cap M_0 = \pi^{-1}(\overline{N}_1 \cap M_1)$ höchstens p-dimensional ist. Wird daher N_0 singulär, so in jedem Punkt eines irreduzibeln Teiles $N_2 \times U_2$ von $\pi^{-1}(\overline{N}_1) \cap M_0$, wobei N_2 irreduzibeler Teil von $\overline{N}_1 \cap M_1$ ist. Daher ist $N_2 \times U_2 \subseteq S_0 \subseteq U_1 \times U_2'$, was wegen $N_2 \neq \emptyset$ und $N_2 \subseteq U_1$ falsch ist. Widerspruch! N ist in keinem Punkt von S_0, also auch S singulär, w.z.b.w.

Daraus folgt nun die Verallgemeinerung des Satzes 2.8:

Hilfssatz 6.8. Voraussetzung. *In einem komplexen Raum G sei eine dünne abgeschlossene Menge S gegeben, die auch fastdünn von der Dimension $p - 1$ ist. In $G - S$ sei eine rein p-dimensionale analytische Menge N gegeben, die frei von S ist.*

Behauptung. *Durch $\overline{N}$ wird N eindeutig in G fortgesetzt.*

Beweis. Sei $C \subseteq S$ die Menge der singulären Stellen von N. Sei $P_0 \in C$ und U eine offene Umgebung von C, für die die analytische Hülle C_0 von $C \cap U$ in U dünn ist. Ist U hinreichend klein, so gibt es eine in U analytische Menge $S_0 \supseteq S \cap U$, die keinen irreduzibeln Teil von $U \cap N$ enthält. Wegen $C_0 \subseteq S_0$ enthält auch C_0 keinen irreduzibeln Teil von $U \cap N$. Es ist also $U \cap N$ rein p-dimensional und singulär auf $C \cap U \neq \theta$. Man kann U dabei so klein wählen, daß U als analytische Menge eines Gebietes U_1 des C^n aufgefaßt werden kann. Sei $\hat{C}_0$ die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von C_0. Dann ist $\hat{C}_0$ echte Teilmenge von C_0 und analytisch in U. Daher ist $\hat{C}_0 \not\supseteq C \cap U$. Also gibt es eine offene Teilmenge V von U mit $C \cap V = (C - \hat{C}_0) \cap V \neq \theta$, die man als analytische Menge in einem Gebiet V_1 des C^n auffassen kann, wobei $C_0 \cap V = E \cap V_1$ für eine geeignete q-dimensionale komplexe Ebene E gilt. Da C_0 nirgends dicht auf $N \cap U$ ist, ist $C_0 \cap V$ nirgendsdicht auf $N \cap V$, enthält also keinen irreduzibeln Teil von $N \cap V$. In $V_1 - C_0$ ist $V \cap N - C_0$ analytisch und rein p-dimensional und wird höchstens auf der von der Dimension $p-1$ fastdünnen Menge $V_1 \cap C$ singulär. Nach Satz 6.7. wird $V \cap N - C_0$ durch $\overline{V \cap N - C_0} \cap V_1$ fortgesetzt. Da $V \cap C_0 - S$ keinen irreduzibeln Teil von $V \cap N$ enthält, gilt

$$V \cap \overline{N} = \overline{V \cap N} \cap V_1 = \overline{V \cap N - C_0} \cap V_1 .$$

Also ist $\overline{N}$ in V analytisch und N auf $C \cap V \neq \theta$ regulär, was falsch ist. Also ist $C = \theta$ und N wird durch $\overline{N}$ nach Satz 2.7 fortgesetzt, w.z.b.w.

§ 7. Die Übereinstimmung der Meromorphiebegriffe in einigen Spezialfällen

Die Gleichheit der Meromorphiebegriffe läßt sich zeigen, wenn an den Bildraum besondere Anforderungen gestellt werden. So hat sich die Übereinstimmung (meromorph = R-meromorph) für lückenfreie Abbildungen in H-vollständige Räume bereits in Satz 4.5 gezeigt. Dies gilt dann auch für Teilräume, Produkträume und Überlagerungsräume, denn aus Satz 3.8 und Satz 3.9 folgt:

Satz 7.1. *Stimmen die Begriffe meromorph und R-meromorph für alle lückenfreie Abbildungen in die Räume H_ν überein, so auch für das Produkt $\prod_{\nu=1}^{r} H_\nu = H$.*

Beweis. Sei $\tau : A \to H$ auf $G \supseteq A$ meromorph. Sei $\psi_\nu : H \to H_\nu$ die natürliche Projektion. Nach Satz 3.8 ist $\psi_\nu \tau : A \to H_\nu$ in G meromorph, also R-meromorph. Nach Satz 3.9 ist τ R-meromorph. Ist τ R-meromorph und lückenfrei, so auch meromorph nach Satz 3.3, w.z.b.w.

Satz 7.2. a) *Stimmen die Begriffe meromorph und R-meromorph für alle lückenfreie Abbildungen in den komplexen Raum $\tilde{H}$ überein, so auch für jeden komplexen Teilraum H von $\tilde{H}$.*

b) *Stimmen die Begriffe schwach meromorph und R-meromorph für alle Abbildungen in den komplexen Raum H überein, so auch für jeden abgeschlossenen komplexen Teilraum H von $\tilde{H}$.*

Beweis. Sei $\tau: A \to H$ auf $G \supseteq A$ (schwach) meromorph. Nach Satz 3.12 ist auch $\tau: A \to \tilde{H}$ meromorph (schwach meromorph, wenn H abgeschlossen in $\tilde{H}$ ist). Also ist $\tau: A \to \tilde{H}$ R-meromorph mit $\tau(A) \subseteq H$. Nach Satz 3.13 ist $\tau: A \to H$ R-meromorph. Ist τ R-meromorph, so ist τ schwach meromorph. Ist τ außerdem lückenfrei, so ist τ meromorph, w.z.b.w.

Satz 7.3. Voraussetzung. *Sei $\chi: H \to F$ eine offene und holomorphe Abbildung. Die Faser $\chi^{-1}\chi(Q)$ bestehe aus höchstens abzählbar vielen Punkten. Für jede lückenfreie Abbildung in F stimmen die Begriffe meromorph und R-meromorph überein.*

Behauptung. *Die Begriffe meromorph und R-meromorph stimmen auch für jede lückenfreie Abbildung τ in H überein.*

Zusatz. *Ist χ lokaleigentlich, so gilt Satz 7.3. auch noch, wenn man das Wort „lückenfrei" ausläßt und „meromorph" durch „schwach meromorph" ersetzt.*

Beweis. a) Sei $\tau: A \to H$ auf $G \supseteq A$ meromorph. Dann ist $\chi\tau: A \to F$ meromorph, also R-meromorph. Nach Satz 3.11 ist τ R-meromorph.

b) Ist $\tau: A \to H$ lückenfrei und R-meromorph, so meromorph.

c) Sei $\tau: A \to H$ auf $G \supseteq A$ schwach meromorph und $\chi: H \to F$ lokaleigentlich. Sei $R_0 \in \Sigma_{\chi\tau}(P_0, L)$, wobei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$ ist. Eine Folge $P^\nu \in L \cap A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty}(P^\nu, \chi\tau(P^\nu)) = (P_0, R_0)$ existiert. Sei U eine relativ kompakte, offene Umgebung von R_0. Für $\nu \geq \nu_0$ ist $\chi\tau(P^\nu) \in U$, also $\tau(P^\nu) \subseteq \chi^{-1}(U) \subseteq \chi^{-1}(\bar{U})$. Da χ lokaleigentlich ist, kann U so klein gewählt werden, daß $\chi^{-1}(\bar{U})$ kompakt ist. Eine Teilfolge $\tau(P^{\nu_\mu})$ konvergiert, $\lim\limits_{\mu\to\infty}\tau(P^{\nu_\mu}) = Q_0$. Es ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0, L)$ und $\chi(Q_0) = \lim\limits_{\mu\to\infty}\chi\tau(P^{\nu_\mu}) = R_0$. Daher ist $\chi(\Sigma_\tau(P_0, L)) \supseteq \Sigma_{\chi\tau}(P_0, L)$, d. h. $\Sigma_{\chi\tau}(P_0, L)$ besteht aus höchstens einem Punkt. Die Abbildung $\chi\tau$ ist schwach meromorph. Unter der Annahme des Zusatzes ist sie dann auch R-meromorph; also ist τ nach Satz 3.11 R-meromorph, w.z.b.w.

In Satz 7.3 kann man die Rolle von H und F vertauschen:

Satz 7.4. Voraussetzung. *Sei $\chi: H \to F$ eine holomorphe Abbildung. Die Faser $\chi^{-1}\chi(Q)$ bestehe höchstens aus abzählbar vielen Punkten. Für jede lückenlose Abbildung in H stimmen die Begriffe meromorph und R-meromorph überein.*

Behauptung. *Sie stimmen auch für jede lückenlose Abbildung τ in F überein, die die Form* $\chi\tilde{\tau} = \tau$ hat, *wobei $\tilde{\tau}: A \to H$ holomorph und lückenlos ist.*

Zusatz. *Ist χ offen und lokaleigentlich, so gilt Satz 7.4 auch noch, wenn man das Wort „lückenlos" ausläßt und „meromorph" durch „schwach meromorph" ersetzt.*

Beweis. a) Sei $\tau = \chi\tilde{\tau}: A \to F$ meromorph und lückenlos auf G. Nach Satz 3.10 mit $\chi = \tau_{Q_0}$ für jedes Q_0 ist $\tilde{\tau}: A \to H$ auf G meromorph. Nach Voraussetzung ist $\tilde{\tau}: A \to H$ auch lückenlos. Also ist $\tilde{\tau}: A \to H$ SR-meromorph. Nach Satz 3.5 ist $\tau = \chi\tilde{\tau}$ SR-meromorph.

b) Sei $\tau = \chi\tilde{\tau} : A \to F$ R-meromorph und lückenlos, also auch schwach meromorph und lückenfrei, d. h. meromorph.

c) Sei χ offen und lokaleigentlich und $\tau = \chi\tilde{\tau} : A \to F$ schwach meromorph. Nach Satz 3.10 ist $\tilde{\tau}$ schwach meromorph, also $\tilde{\tau} : A \to H$ R-meromorph, wenn man die Voraussetzungen des Zusatzes macht. Nach Satz 3.11 ist $\chi\tilde{\tau}$ R-meromorph, w.z.b.w.

Sieht man von Feinheiten ab, so kann man sagen, die beiden Meromorphiebegriffe stimmen überein für eine gewisse Klasse $\mathfrak{K}$ von Bildräumen, die mit jedem Raum auch alle Teilräume und Überlagerungsräume enthält, sowie jeden Produktraum endlich vieler Räume aus $\mathfrak{K}$. Die Klasse $\mathfrak{K}$ enthält alle M-vollständigen Räume, insbesondere alle algebraischen Räume. Dabei heiße ein Raum algebraisch, wenn er abgeschlossener komplexer Teilraum eines komplexprojektiven Raumes ist. Nun kommt es darauf an, noch andere Räume in $\mathfrak{K}$ zu finden. Dazu ist es nötig, den Graphen T über $M \times H$ fortzusetzen. Dabei ist häufig $\dim T < \dim M \times H$, und für diesen Fall gibt es keine brauchbaren Fortsetzungssätze. Jedoch wird Hilfssatz 6.1 etwas weiterhelfen. Er ermöglicht den folgenden Satz:

Satz 7.5. Voraussetzung. 1. *Die Menge S der singulären Stellen der Abbildung τ sei dünn von der Codimension $p - 1$ und fastdünn von der Codimension $p \geqq 2$.*

2. *Sei S_R die Menge der R-Singularitäten von τ und sei $\Sigma_\tau(S_R)$ dünn von der Dimension p.*

3. *Wenn L lokalanalytisch und rein p-dimensional in G ist, wenn $\bar{L}$ kompakt ist, wenn $L \cap M$ auf L dünn ist, wenn $(\bar{L} - L) \cap S = \theta$ ist, wenn $L \cap S$ aus höchstens abzählbar vielen Punkten besteht und wenn $L \cap S$ dünn von der Dimension 1 auf L ist, dann enthalte $\Sigma_\tau(L \cap S, L)$ keine p-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von H.*

Behauptung. *Die Abbildung τ ist R-meromorph.*

Beweis. Sei $A_0 = G - S$ und τ_0 die analytische Fortsetzung von τ in A_0. Es reicht, den Satz für eine genügend kleine Umgebung eines jeden Punktes von G zu beweisen. O.B.d.A. kann man daher G als n-dimensionale, irreduzible und lokalirreduzible analytische Menge eines Gebietes G_1 des C^t mit $t \geqq n$ annehmen, wobei sogar M in einer analytischen Menge M_0 der reinen Dimension $n - 1$ und S in einer analytischen Menge S_0 der Dimension $n - - p + 1$ enthalten ist. Sei $q = n - p$. Sei S_a die analytische Hülle von S_R in G_1. Es ist $S_a \subseteq G$ und $\dim S_a \leqq q + 1$. Angenommen, $S_R \neq \theta$. Die Menge $\hat{S}_a$ der nichtgewöhnlichen Punkte von S_a enthält nicht $S_R \neq \theta$. Daher kann man annehmen, daß S_R auf einer komplexen Teilmannigfaltigkeit mit nur gewöhnlichen Punkten (in G_1) liegt, deren Dimension $q + 1$ nicht übersteigt. Folglich kann man annehmen, daß $S_R \neq \theta$ auf einer höchstens $(q + 1)$-dimensionalen komplexen Ebene liegt, durch die man eine $(q + 1)$-dimensionale komplexe Ebene E legt: $S_R \subseteq E$. Nun wird ein spezielles Koordinatensystem gewählt. Der Ursprung sei ein Punkt von S_R. Die ersten $(q + 1)$ Koordinatenachsen sollen die Ebene E aufspannen. Nun ist S fastdünn von der Dimension q (d. h. Codimension p) in G, also ist $S \cap E$ fastdünn (von der Dimension q) in E.

Nach Hilfssatz 6.4 kann man die erste Koordinatenachse so wählen, daß sie $S \cap E$ in höchstens abzählbar vielen Punkten schneidet. Weil $q + 1 = n - - p + 1 \leq n = \dim G$ ist, kann man die letzten $t - n$ Koordinatenachsen so wählen, daß sie eine Ebene $\mathfrak{E}$ aufspannen, die G im Ursprung isoliert schneidet. Dieses Teilkoordinatensystem werde zu einem vollen ergänzt.

Sei E_2 die Ebene, die von der 2. bis $(q+1)$-ten Koordinatenachse aufgespannt wird. Sei $\pi : C^t \to E_2$ die Projektion

$$\pi(z_1, \ldots, z_t) = (0, z_2, \ldots, z_{q+1}, 0, \ldots, 0) .$$

Dann ist $L(\mathfrak{a}) = \pi^{-1}(\mathfrak{a})$ eine $(t-q)$-dimensionale komplexe Ebene für jedes $\mathfrak{a} \in E_2$. Weil S fastdünn von der Dimension q ist, ist die Menge

$$F_0 = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in E_2 \text{ und } L(\mathfrak{a}) \cap S \text{ überabzählbar}\}$$

nach Hilfssatz 6.5 fastdünn auf E_2.

Seien $M_0^\lambda (\lambda \in \Lambda)$ die irreduzibeln Teile von M_0 und $r_\pi(\mathfrak{z}, M_0^\lambda) = n - 1 - - \dim(\pi^{-1}\pi(\mathfrak{z}) \cap M_0^\lambda)$ der Rang von π bezüglich M_0^λ. Auf M_0^λ ist $\widetilde{M}^\lambda = \{\mathfrak{z} \mid r_\pi(\mathfrak{z}, M_0^\lambda) \leq q - 1\}$ analytisch. Nach Hilfssatz 6.3 ist die Projektion $\pi(\widetilde{M}^\lambda)$ fastdünn in E_2. Auch $F_2 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi(\widetilde{M}^\lambda)$ ist in E_2 fastdünn. Also hat $\pi^{-1}(\mathfrak{a}) \cap M_0^\lambda$ für $\mathfrak{a} \in E_2 - F_1$ höchstens die Dimension $\dim \pi^{-1}(\mathfrak{a}) \cap M_0^\lambda = n - - 1 - r_\pi(\mathfrak{a}, M_0^\lambda) \leq n - 1 - q = p - 1 < p$. Daher ist $\pi^{-1}(\mathfrak{a}) \cap M_0 = L(\mathfrak{a}) \cap M_0$ höchstens $(p-1)$-dimensional für $\mathfrak{a} \in E_2 - F_2$.

Seien $S_0^\lambda (\lambda \in \Lambda_1)$ die irreduzibeln Teile von S_0 und $r_\pi(\mathfrak{z}, S_0^\lambda) = \dim S_0^\lambda - - \dim \pi^{-1}\pi(\mathfrak{z}) \cap S_0^\lambda$ der Rang von π bezüglich S_0. Auf S_0^λ ist $\widetilde{S}^\lambda = \{\mathfrak{z} \mid r_\pi(\mathfrak{z}, S_0^\lambda) \leq \leq q - 1\}$ analytisch. Nach Hilfssatz 6.3 ist die Projektion $\pi(\widetilde{S}^\lambda)$ fastdünn in E_2. Auch $F_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} \pi(\widetilde{S}^\lambda)$ ist in E_2 fastdünn. Also hat $\pi^{-1}(\mathfrak{a}) \cap S_0^\lambda$ für $\mathfrak{a} \in E_2 - F_1$ höchstens die Dimension

$$\dim \pi^{-1}(\mathfrak{a}) \cap S_0^\lambda = \dim S_0^\lambda - r_\pi(\mathfrak{a}, S_0^\lambda) \leq q + 1 - q = 1 .$$

Daher ist $\pi^{-1}(\mathfrak{a}) \cap S_0 = L(\mathfrak{a}) \cap S_0$ höchstens eindimensional für $\mathfrak{a} \in E_2 - F_1$.

In jedem Punkt von $\mathfrak{z} \in L(\mathfrak{a}) \cap G$ gilt

$$\dim_{\mathfrak{z}} L(\mathfrak{a}) \cap G \geq \dim_{\mathfrak{z}} L(\mathfrak{a}) + \dim_{\mathfrak{z}} G - \dim_{\mathfrak{z}} C^t = t - q + n - t = p .$$

Andererseits schneidet die Ebene $\mathfrak{E}$ die Menge $G \cap L(0)$ isoliert im Nullpunkt, wobei $\mathfrak{E} \subseteq L(0)$ ist. Nach der Definition der Dimension gilt

$$\dim_0 L(0) \cap G \leq \dim_0 L(0) - \dim_0 \mathfrak{E} = t - q - (t - n) = p .$$

Der Rang r_π der Projektion $\pi : G \to E_2$ ist also: $r_\pi(0) = n - p = q$ und $r_\pi(\mathfrak{z}) \leq \leq n - p = q$ für $\mathfrak{z} \in G$. Die Menge $\{\mathfrak{z} \mid r_\pi(\mathfrak{z}) \leq q - 1\}$ ist abgeschlossen in G und enthält den Nullpunkt nicht. Man kann daher eine offene Umgebung U des Nullpunktes wählen, auf der $r_\pi(\mathfrak{z}) = q$ für $\mathfrak{z} \in G \cap U$ ist. Da auf der ersten Koordinatenachse in E nur abzählbar viele Punkte von S liegen, kann man einen Kreisring $\{(z_1, 0, \ldots, 0) \mid r \leq |z_1| \leq s\}$ in $U \cap (G_1 - S)$ finden. Eine offene Umgebung $\widetilde{U}_1$ des Nullpunktes des C^{t-1} existiert so, daß

$$\{\mathfrak{z} \mid (z_2, \ldots, z_t) \in \widetilde{U}_1 ,\ r \leq |z_1| \leq s\} \subseteq U \cap (G_1 - S)$$

ist. O.B.d.A. kann man neben den Voraussetzungen des Satzes also annehmen:

a) *Es seien*

$$E_1 = \{z_1 \mid |z_1| < s\} \qquad R_1 = E_1 \times \{(0,\ldots,0)\} \subseteq C^t$$
$$E_1' = \{z_1 \mid |z_1| \leqq r\} \qquad R_1' = E_1' \times \{(0,\ldots,0)\} \subseteq C^t, \qquad (0 < r < s)$$
$$E_2 = \{(z_2,\ldots,z_{q+1}) \mid |z_\nu| < s_\nu, \quad \nu = 2,\ldots,q+1\}$$
$$E_3 = \{(z_{q+2},\ldots,z_t) \mid |z_\nu| < s_\nu, \quad \nu = q+2,\ldots,t\}$$
$$R_2 = \{0\} \times E_2 \times \{(0,\ldots,0)\} \subseteq C^t,$$
$$R_3 = \{(0,\ldots,0)\} \times E_3 \subseteq C^t,$$
$$E = E_1 \times E_2 \qquad R = E \times \{(0,\ldots,0)\} \subseteq C^t,$$
$$E' = E_1' \times E_2 \qquad R' = E' \times \{(0,\ldots,0)\} \subseteq C^t,$$
$$G_1 = E \times E_3 \qquad G_1' = E' \times E_3 = E_1' \times E_2 \times E_3\,.$$

b) *In G_1 ist G analytisch, rein n-dimensional und lokalirreduzibel.*

c) *Es ist $0 \subseteq S_R \subseteq R'$ und $S \subseteq G_1' \cap G$.*

d) Sei $L(\mathfrak{a}) = E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times E_3$ für $\mathfrak{a} \in E_2$. Dann hat $L(\mathfrak{a}) \cap G$ die reine Dimension p.

e) Die Menge $F_0 = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in E_2$ mit $L(\mathfrak{a}) \cap S$ überabzählbar$\}$ ist fastdünn in E_2. Die Mengen $F_1 = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in E_2$ mit $\dim^a_{G_1} L(\mathfrak{a}) \cap S > 1\}$ und $F_2 = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in E_2$ mit $\dim^a_{G_1} L(\mathfrak{a}) \cap M \geqq p\}$ sind fastdünn in E_2.

Sei (P, Q) ein singulärer Punkt des Graphen T in G_1. Es ist $P \in S_R$ und $(P, Q) \in (\bar{T} - T) \cap (G_1 \times H)$. Daher gibt es eine Folge (P^ν, Q^ν) in T mit $\lim_{\nu \to \infty} (P^\nu, Q^\nu) = (P, Q)$. Wegen $Q^\nu = \tau(P^\nu)$ ist $Q \in \Sigma_\tau(P) \subseteq \Sigma_\tau(S_R)$. Daher wird T innerhalb G_1 höchstens auf $S_R \times \Sigma_\tau(S_R)$ singulär.

Sei (O, Q_0) ein singulärer Punkt von T. Dann ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(S_R)$. Also gibt es eine offene Umgebung V von Q_0 mit einer in V analytischen und höchstens p-dimensionalen Menge N_0, die $V \cap \Sigma_\tau(S_R)$ enthält. Sei C die Menge der Singularitäten von T innerhalb $G \times V$. Es ist

$$(O, Q_0) \in C \subseteq (G \times V) \cap (S_R \times \Sigma_\tau(R)) = S_R \times (V \cap \Sigma_\tau(R)) \subseteq S_R \times N_0\,.$$

Sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller in V analytischen Mengen N mit $C \subseteq S_R \times N$. Wegen $N_0 \in \mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ und $N_1 = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N$ analytisch in V mit $p_1 = \dim N_1 \leqq p$. Es ist

$$\emptyset \neq C \subseteq \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} S_R \times N = S_R \times \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N = S_R \times N_1\,.$$

Man konnte dabei die offene Umgebung V von Q_0 so klein annehmen, daß es eine umkehrbare holomorphe Abbildung $\alpha : V \to V'$ gibt, wobei V' eine irreduzible und lokalirreduzible analytische Teilmenge eines Gebietes $\tilde{V}$ des C^u mit $u \geqq m$ ist. In $\tilde{V}$ ist $\alpha(N_1) = N_1'$ analytisch. Die Menge $\hat{N}_1'$ der nichtgewöhnlichen Punkte von N_1' ist analytisch und eine echte Teilmenge von N_1'. Also ist die in V analytische Menge $\hat{N}_1 = \alpha^{-1}(N_1')$ nicht in $\mathfrak{N}$ enthalten. Ein Punkt $(O, Q_1) \in C$ mit $Q_1 \in N_1 - \hat{N}_1$ existiert. Man wählt in $V - \hat{N}_1$ eine offene, zusammenhängende Umgebung W_1 von (O, Q_1) so, daß $N_1 \cap W_1$ zusammenhängend ist. In einem Teilgebiet W von V ist $W_1' = \alpha(W_1) = \tilde{W} \cap V'$ analytisch, irreduzibel und lokalirreduzibel. Da $\alpha(O, Q_1)$ gewöhnlicher Punkt von

N_1' ist, kann man in $\tilde{W}$ ein Teilgebiet $\tilde{W}^*$, das $\alpha(O, Q_1)$ enthält, und eine umkehrbar holomorphe Abbildung β von $\tilde{W}^*$ auf einen Polyzylinder $\hat{W}$ von C^u finden so, daß $\beta(N_1' \cap \tilde{W}^*)$ der Durchschnitt von $\hat{W}$ mit der durch die ersten p_1 Koordinatenachsen aufgespannten Ebene ist. Identifiziert man $\tilde{W}^*$ mit $\hat{W}$ vermöge β und $W = \alpha^{-1}(\tilde{W}^* \cap W_1')$ mit $\tilde{W}^* \cap W_1'$, so kann man annehmen:

f) *Es seien*:

$$U_1 = \{(w_1, \ldots, w_p) \mid |w_\nu| < t_\nu \text{ für } \nu = 1, \ldots, p\}$$
$$U_2 = \{(w_{p+1}, \ldots, w_u) \mid |w_\nu| < t_\nu \text{ für } \nu = p+1, \ldots, u\}$$
$$\tilde{W} = U_1 \times U_2$$
$$N = U_1 \times \{(0, \ldots, 0)\} \subseteq \tilde{W}.$$

g) *W ist eine offene Teilmenge von H und zugleich eine lokalirreduzible, rein m-dimensionale analytische Menge in $\tilde{W}$ mit $\tilde{W} \cap H = W$.*

h) *Sei $B = G_1 \times \tilde{W} - R \times N$. Dann ist $T_1 = T \cap B$ analytisch in B und in $G \times W$ enthalten. Es ist T_1 rein n-dimensional und wird höchstens auf $R' \times N$ innerhalb $G_1 \times \tilde{W}$ singulär.*

i) *In einem Punkt von $R' \times N$ ist T_1 singulär.*

Aus den Eigenschaften a)—i) soll nun ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes hergeleitet werden. Dazu wendet man Hilfssatz 6.1 an, dessen Voraussetzungen man mittels der folgenden Übersetzungstabelle leicht nachprüft.

Tabelle

Satz 6.1	C^u	G	E	M	W
Hier	C^{t+u-1}	$E_2 \times E_3 \times \tilde{W}$	$z_\nu = 0$ für $\nu = q+2, \ldots, t$ $w_\mu = 0$ für $\mu = p+1, \ldots, u$	$E_2 \times \{(0, \ldots, 0)\} \times N$	E_1

Satz 6.1	W_1	A	B	V	S	S_1
Hier	E_1'	$E_2 \times E_3 \times \tilde{W} - E_2 \times \{(0,\ldots,0)\} \times N$	B	$G_1 \times W$	$R \times N$	$R' \times N$

Satz 6.1	p	N	$L(\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{a} \in M$	F
Hier	n	T_1	$E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times E_3 \times \{\mathfrak{b}\} \times U_2 = L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für $\mathfrak{a} \in E_2, \mathfrak{b} \in U_1$	F

F hat also das $2n$-dimensionale Maß Null und ist die Menge aller $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in E_2 \times U_1$, für die die Punkte von T_1 auf

$$L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times E_3 \times \{\mathfrak{b}\} \times U_2$$

sich nicht gegen einen Punkt von $R \times N$ häufen, also nicht gegen einen Punkt von $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap (R \times N) = E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times \{(0, \ldots, 0)\} \times \{\mathfrak{b}\} \times \{(0, \ldots, 0)\}$.

Nun wird behauptet, daß $T_1 \cap (M \times H)$ dünn auf T_1 ist. Es ist $T \cap [(G - S_R) \times H]$ in $(G - S_R) \times H$ analytisch und rein $2n$-dimensional und der Graph von τ über $G - S_R$. Nach Satz 2.11 ist $T \cap [(M - S_R) \times H]$ dünn auf $T \cap [(G - S_R) \times H]$. Ist $(P, Q) \in T_1 = B \cap T$, so ist $P \notin S_R$; denn für

$P \in S_R$ wäre $Q \in \Sigma_\tau(S_R)$, also $(P, Q) \in S_R \times \Sigma_\tau(S_R) \cap B \subseteq (R \times N) \cap B = \theta$. Daher ist $T_1 = B \times \bar{T} = B \cap \bar{T} \cap [(G - S_R) \times H]$ und

$$M_1 = T_1 \cap (M \times H) = B \cap \bar{T} \cap [(G - S_R) \times H] \cap [M \times H]$$
$$= B \cap \bar{T} \cap [(M - S_R) \times H].$$

Da B offen ist, ist $M_1 = T_1 \cap (M \times H)$ dünn auf T_1, also dünn von der Dimension $n - 1$ in $G_1 \times W$. Die Projektion M_2 von M_1 in $E_2 \times U_1$ ist also fastdünn in $E_2 \times U_1$, hat also das $2n$-dimensionale Maß Null in $E_2 \times U_1$, wobei $E_2 \times U_1$ die reelle Dimension $2(q + p) = 2n$ hat. Die Fasern der Projektion sind $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap M_1$. In $E_2 \times U_1$ ist $F_3 = F \cup M_2$ eine Nullmenge. Eine Nullmenge $D \subseteq E_2$ existiert so, daß $F_3(\mathfrak{a}) = F_3 \cap (\{\mathfrak{a}\} \times U_1)$ eine Nullmenge für jedes $\mathfrak{a} \in E_2 - D$ ist. Die Menge $F_0 \cup F_1 \cup F_2$ ist fastdünn in E_2, also eine Nullmenge in E_2. Daher ist $E_2 - (D \cup F_0 \cup F_1 \cup F_2)$ nicht leer und ein $\mathfrak{a} \in E_2 - (D \cup F_0 \cup F_1 \cup F_2)$ werde nun fest gewählt. Weil $\mathfrak{a} \in E_2 - F_0$ ist, enthält $L(\mathfrak{a}) = E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times E_3$ nach e) höchstens abzählbar viele Punkte von S, wobei

$$L(\mathfrak{a}) = \{(z_1, a_2, \ldots, a_{q+1}, z_{q+2}, \ldots, z_t) \mid |z_\nu| < s_\nu\}$$

ist. Also kann man Zahlen v_ν mit $r < v_1 < s_1$ und $0 < v_\nu < s_\nu$ für $\nu = q + 2, \ldots, t$ so wählen, daß $(\bar{L}^* - L^*) \cap S = \theta$ ist mit

$$L^* = \{(z_1, a_2, \ldots, a_{q+1}, z_{q+2}, \ldots, z_t) \mid |z_\nu| < v_\nu\}.$$

Es ist L^* offen und relativ kompakt in $L(\mathfrak{a})$. Weil

$$L(\mathfrak{a}) \cap R = (E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times E_3) \cap (E_1 \times E_2 \times \{(0, \ldots, 0)\})$$
$$= E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times \{(0, \ldots, 0)\}$$

eine eindimensionale analytische Menge in G_1 ist, ist $G \cap L(\mathfrak{a}) \cap R$ analytisch und höchstens eindimensional in G. Daher ist

$$T(\mathfrak{a}) = (G_1 \times \hat{W}) \cap \{(P, \tau_0(P)) \mid P \in A_0 \cap L(\mathfrak{a}) \cap R\}$$

eine höchstens eindimensionale lokalanalytische Menge in $G_1 \times \hat{W}$. Der Rang der Projektion $G_1 \times \hat{W} \to U_1$ auf $T(\mathfrak{a})$ ist höchstens 1, während $\dim U_1 = p > 1$ ist. Daher ist die Projektion $T'(\mathfrak{a})$ von $T(\mathfrak{a})$ fastdünn in U_1, hat also das $2p$-dimensionale Lebesguesche Maß Null. Weil $\mathfrak{a} \notin D$ ist, gibt es für fast alle $\mathfrak{b} \in U_1$, d. h. alle $\mathfrak{b} \in U_1 - (T'(\mathfrak{a}) \cup F_3(\mathfrak{a}))$ eine Folge $(P^\nu, Q^\nu) \in L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap T_1$ mit $\lim_{\nu \to \infty} (P^\nu, Q^\nu) = (P, Q)$, wobei $(P, Q) \in (R \times N) \cap L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \subseteq G_1 \times \hat{W}$ ist. Wegen

$$(R \times N) \cap L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times \{(0, \ldots, 0)\} \times \{\mathfrak{b}\} \times \{(0, \ldots, 0)\}$$

ist $Q = (\mathfrak{b}, 0, \ldots, 0) \in N$. Wegen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in E_2 \times U_1 - F_3 \subseteq E_2 \times U_1 - M_2$ ist $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap M_1 = \theta$ mit $M_1 = T_1 \cap (M \times H)$. Also ist $P^\nu \in A \cap L(\mathfrak{a})$ mit $\lim_{\nu \to \infty} P^\nu = P \in L(\mathfrak{a}) \cap G$ und $Q^\nu = \tau(P^\nu)$. Angenommen, $P \in A_0$. Dann ist $Q = \tau_0(P)$ mit $P \in A_0 \cap L(\mathfrak{a}) \cap R$, also $(P, Q) \in T(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{b} \in T'(\mathfrak{a})$, was falsch ist. Daher gilt

$$P \in S \cap L(\mathfrak{a}) \cap R \subseteq G_1' \cap (E_1 \times \{\mathfrak{a}\} \times \{(0, \ldots, 0)\})$$
$$= E_1' \times \{\mathfrak{a}\} \times \{(0, \ldots, 0)\} \subseteq L^*.$$

Also ist $P \in S \cap R \cap L^*$. Sei $L = L^* \cap G$. Da L^* offen auf $L(\mathfrak{a})$ ist und

$P^\nu \in L(\mathfrak{a})$ gegen $P \in L^*$ strebt, ist $P^\nu \in L^*$ für $\nu \geqq \nu_0$. Es ist $P^\nu \in L^* \cap A = L \cap A$ für $\nu \geqq \nu_0$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P, Q)$ und $P \in S$, woraus sich $Q \in \Sigma_\tau(L \cap S, L)$ für fast alle $Q = (\mathfrak{b}, 0, \ldots, 0) \in N$ ergibt. Es ist $L \cap S = L^* \cap S = \bar{L}^* \cap S$ kompakt, weil $\bar{L}^*$ kompakt und S abgeschlossen ist und $\bar{L}^*$ in der offenen Umgebung G_1 liegt. Daher ist die auf N dichte Menge $\Sigma_\tau(L \cap S, L)$ in G, also auch G_1, abgeschlossen, enthält also N, woraus unter anderem auch $N \subseteq H$ folgt.

Andererseits gilt:

$$L \cap S = \overline{L^* \cap G} \cap S \subseteq \bar{L}^* \cap S = L \cap S\,,$$

d. h. $(\bar{L} - L) \cap S = \theta$. Wegen $L \cap A \neq \theta$ ist $L(\mathfrak{a}) \cap G$ und $L = L^* \cap G$ je eine rein p-dimensionale, lokalanalytische Menge. Wegen $\mathfrak{a} \in E_2 - F_0$ enthält $L(\mathfrak{a}) \cap S$, also erst recht $L \cap S$ höchstens abzählbar viele Punkte. Wegen $\mathfrak{a} \in E_2 - F_1$ ist $L(\mathfrak{a}) \cap S$ in einer in G_1 höchstens ein-dimensionalen analytischen Mengen enthalten, d. h. $L \cap S$ ist dünn von der Dimension 1 auf L. Wegen $\mathfrak{a} \in E_2 - F_2$ ist $L(\mathfrak{a}) \cap M$, also auch $L \cap M$, in einer in G höchstens $(p-1)$-dimensionalen analytischen Menge enthalten, also dünn (von der Dimension $p-1$) auf L. Weil $\bar{L} \subseteq \bar{L}^* \subseteq L(\mathfrak{a}) \subseteq G_1$ und G in G_1 abgeschlossen ist, und weil $L \subseteq G$ ist, folgt $\bar{L} \subseteq G$. Weil $\bar{L}^*$ kompakt ist, ist auch die abgeschlossene Hülle von L in G nämlich $\bar{L} \cap G = \bar{L}$ kompakt. Nach Voraussetzung 3 enthält $\Sigma_\tau(L \cap S, L)$ keine p-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von H, speziell ist N nicht in $\Sigma_\tau(L \cap S, L)$ enthalten. Ein Widerspruch zur Annahme $S_R \neq \theta$ wurde hergeleitet, w.z.b.w.

Der Satz 7.5 wurde für $p = 1$ nicht bewiesen. In diesem Fall ist S dünn, weil $M \supseteq S$ ist. Daher fällt die erste Voraussetzung weg. Ist aber S dünn von der Codimension p, so kann man die dritte Voraussetzung abschwächen. Man erhält den

Satz 7.6. Voraussetzung. *1. Die Menge S der singulären Stellen von τ sei dünn von der Codimension $p \geqq 1$.*

2. Sei S_R die Menge der R-Singularitäten von τ und sei $\Sigma_\tau(S_R)$ dünn von der Dimension p.

3. Wenn L lokalanalytisch und rein p-dimensional in G ist, wenn $\bar{L}$ kompakt ist, wenn $L \cap M$ dünn auf L ist, wenn $(\bar{L} - L) \cap S = \theta$ und $L \cap S = \{P_0\}$ ist, so enthalte $\Sigma_\tau(P_0, L)$ keine p-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von H.

Behauptung. *Die Abbildung τ ist R-meromorph.*

Beweis. Sei $A_0 = G - S$ und τ_0 die analytische Fortsetzung von τ in A_0. Es reicht, den Satz für eine genügend kleine Umgebung eines jeden Punktes von G zu beweisen. O.B.d.A. kann man daher G als n-dimensionale, irreduzible und lokalirreduzible analytische Menge eines Gebietes G_1 des C^t mit $t \geqq n$ annehmen, wobei sogar M in einer analytischen Menge M_0 der reinen Dimension $n-1$ und S in einer analytischen Menge S_0 der Dimension $q = n - p$ enthalten ist. Sei S_a die analytische Hülle von S_R in G_1. Es ist $S_a \subseteq G$ und $\dim S_a \leqq q$. Angenommen, $S_R \neq \theta$. Die Menge $\dot{S}_a$ der nichtgewöhnlichen Punkte von S_a enthält nicht $S_R \neq \theta$. Daher kann man annehmen, daß S_R auf einer komplexen Teilmannigfaltigkeit mit nur (in G_1) gewöhnlichen Punkten

liegt, deren Dimension q nicht übersteigt. Daher kann man annehmen, daß $S_R \neq \emptyset$ auf einer höchstens q-dimensionalen Ebene liegt, durch die man eine q-dimensionale Ebene E legt. Nun wird ein spezielles Koordinatensystem gewählt. Der Ursprung sei ein Punkt von S_R. Die ersten q-Koordinatenachsen sollen die Ebene E aufspannen. Weil $q = n - p < n = \dim G$ ist, kann man die letzten $t - n$ Koordinatenachsen so wählen, daß sie eine Ebene $\mathfrak{E}$ aufspannen, die G im Ursprung isoliert schneidet. Dieses Teilkoordinatensystem werde zu einem vollen, aber vorläufigen ergänzt. Sei $\widetilde{E}$ die von den ersten n-Koordinatenachsen aufgespannte Ebene. Nach dem Einbettungssatz von REMMERT und STEIN [13] führt die Projektion $C^t \to \widetilde{E}$ die Menge S_0 in eine im Ursprung analytische Menge S'_0 der Dimension q über, da S_0 durch $\mathfrak{E}$ im Ursprung nur isoliert geschnitten wird. Da $S'_0 \cup E$ in $\widetilde{E}$ enthalten und im Ursprung analytisch und q-dimensional ist, kann die $(q+1)$-te bis n-te Koordinatenachse so gewählt werden, daß die durch sie aufgespannte Ebene die Menge $S'_0 \cup E$ im Nullpunkt isoliert schneidet. Dann schneidet die durch die $(q+1)$-te bis t-te Koordinatenachse aufgespannte Ebene die Menge S_0 im Ursprung isoliert.

Sei $\pi : C^t \to E$ die Projektion $\pi(z_1, \ldots, z_t) = (z_1, \ldots, z_q, 0, \ldots, 0)$. Dann ist $L(\mathfrak{a}) = \pi^{-1}(\mathfrak{a})$ eine $(t-q)$-dimensionale komplexe Ebene für jedes $\mathfrak{a} \in E$. Weil $\pi^{-1}(0) \cap S_0$ den Ursprung als isolierten Punkt enthält, gibt es eine offene Umgebung U^* des Nullpunktes und eine Zahl k, so daß $L(\mathfrak{a}) \cap S \cap U^*$ höchstens aus k Punkten besteht.

Seien M_0^λ $(\lambda \in \Lambda)$ die irreduzibeln Teile von M_0 und $r_\pi(\mathfrak{z}, M_0^\lambda) = n - 1 - \dim(\pi^{-1}\pi(\mathfrak{z}) \cap M_0^\lambda)$ der Rang von π bezüglich M_0. Auf M_0^λ ist $\widetilde{M}^\lambda = \{\mathfrak{z} \mid r_\pi(\mathfrak{z}, M_0^\lambda) < q\}$ analytisch. Nach Hilfssatz 6.3 ist die Projektion $\pi(\widetilde{M}^\lambda)$ fastdünn in E. Auch $F_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi(\widetilde{M}^\lambda)$ ist in E fastdünn. Also hat $\pi^{-1}(\mathfrak{a}) \in M_0^\lambda$ für $\mathfrak{a} \in E - F_1$ höchstens die Dimension $\dim \pi^{-1}(\mathfrak{a}) \cap M_0^\lambda = n - 1 - r_\pi(\mathfrak{a}, M_0^\lambda) \leq \leq n - 1 - q = p - 1 < p$. Daher ist $\pi^{-1}(\mathfrak{a}) \cap M_0 = L(\mathfrak{a}) \cap M_0$ höchstens $(p-1)$-dimensional für $\mathfrak{a} \in E - F_1$.

In jedem Punkt $\mathfrak{z} \in L(\mathfrak{a}) \cap G$ gilt

$$\dim_{\mathfrak{z}} L(\mathfrak{a}) \cap G \geq \dim_{\mathfrak{z}} L(\mathfrak{a}) + \dim_{\mathfrak{z}} G - \dim_{\mathfrak{z}} C^t = t - q + n - t = p\,.$$

Andererseits schneidet die Ebene $\mathfrak{E}$ die Menge $G \cap L(0)$ isoliert im Nullpunkt, wobei $\mathfrak{E} \subsetneq L(0)$ ist. Nach Definition der Dimension ist

$$\dim_0 L(0) \cap G \leq \dim_0 L(0) - \dim_0 \mathfrak{E} = t - q - (t - n) = p\,.$$

Der Rang r_π der Projektion $\pi : G \to E$ ist also

$$r_\pi(0) = n - p = q\,, \quad r_\pi(\mathfrak{z}) \leq n - p = q \qquad \text{für } \mathfrak{z} \in G$$

Die Menge $\{\mathfrak{z} \mid r_\pi(\mathfrak{z}) \leq q - 1\}$ ist abgeschlossen in G und enthält den Nullpunkt nicht. Man kann daher eine offene Umgebung U des Nullpunktes wählen, auf der $r_\pi(\mathfrak{z}) = q$ für $\mathfrak{z} \in G \cap U$ ist. Da die Ebene, die durch die letzten $(t-q)$ Koordinatenachsen aufgespannt wird, die Menge S_0 im Ursprung nur isoliert schneidet, kann man eine offene Umgebung U_1 des Nullpunktes

und Zahlen $0 < r_\nu < s_\nu$ für $\nu = q + 1, \ldots, t$ finden, so daß

$$\{(z_1, \ldots, z_t) \mid (z_1, \ldots, z_q, 0, \ldots, 0) \in \bar{U}_1 \cap E, r_\nu \leq |z_\nu| < s_\nu, \nu = q + 1, \ldots, t\}$$

in $U \cap (G_1 - S_0)$ liegt.

O.B.d.A. kann man neben den Voraussetzungen des Satzes also annehmen:

a) *Es seien*

$$\begin{aligned}
E &= \{(z_1, \ldots, z_q) \mid |z_\nu| < s_\nu, \nu = 1, \ldots, q\} \\
E_3 &= \{(z_{q+1}, \ldots, z_t) \mid |z_\nu| < s_\nu, \nu = q + 1, \ldots, t\} \\
E_3' &= \{(z_{q+1}, \ldots, z_t) \mid |z_\nu| \leq r_\nu, \nu = q + 1, \ldots, t\} \qquad (0 < r_\nu < s_\nu) \\
R &= E \times \{(0, \ldots, 0)\} \subseteq C^t \\
R_3 &= \{(0, \ldots, 0)\} \times E_3 \subseteq C^t \\
R_3' &= \{(0, \ldots, 0)\} \times E_3' \subseteq C^t \\
G_1 &= E \times E_3 \\
G_1' &= E \times E_3' .
\end{aligned}$$

b) *In G_1 ist G analytisch, rein n-dimensional und lokalirreduzibel.*

c) *Es ist $0 \in S_R \subseteq R$ und $S \subseteq S_0 \subseteq G_1' \subseteq G$, wobei S_0 analytisch und rein q-dimensional ist.*

d) *Sei $L(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{a}\} \times E_3$ für $\mathfrak{a} \in E$. Dann hat $G \cap L(\mathfrak{a})$ die reine Dimension p.*

e) *Die Menge $L(\mathfrak{a}) \cap S$ besteht aus höchstens k Punkten für jedes $\mathfrak{a} \in E$. Die Menge $F_1 = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in E_2$ mit $\dim_{G_1}^{\mathfrak{a}} L(\mathfrak{a}) \cap M \geq p\}$ ist fastdünn in E.*

Wie im Beweis von Satz 7.5 ergibt sich, daß man weiterhin annehmen kann:

f) *Es seien*

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(w_1, \ldots, w_p) \mid |w_\nu| < t_\nu \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, p\} \\
U_2 &= \{(w_{p+1}, \ldots, w_u) \mid |w_\nu| < t_\nu \text{ für } \nu = p + 1, \ldots, u\} \\
\hat{W} &= U_1 \times U_2 \\
N &= U_1 \times \{(0, \ldots, 0)\} \subseteq \hat{W} .
\end{aligned}$$

g) *W ist eine offene Teilmenge von H und zugleich eine lokalirreduzible, rein m-dimensionale analytische Menge in $\hat{W}$ mit $\hat{W} \cap H = W$.*

h) *Sei $B = G_1 \times \hat{W} - R \times N$. Dann ist $T_1 = \bar{T} \cap B$ analytisch in B und in $G \times W$ enthalten. Es ist T_1 rein n-dimensional.*

i) *In einem Punkt von $R \times N = E \times \{(0, \ldots, 0)\} \times U_1 \times \{(0, \ldots, 0)\}$, also jedem Punkt von $R \times N$ wird T_1 singulär.*

Die Menge F aller $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in E \times U_1$, für die die Punkte von T_1 auf $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \{\mathfrak{a}\} \times E_3 \times \{\mathfrak{b}\} \times U_2$ sich nicht gegen einen Punkt von $R \times N$, also nicht gegen $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = (\mathfrak{a}, 0, \ldots, 0, \mathfrak{b}, 0, \ldots, 0) \in C^{t+u}$ häufen, hat das $2n$-dimensionale Lebesguesche Maß Null[16]).

Wie im Beweis von Satz 7.5 folgt, daß $T_1 \cap (M \times H) = M_1$ dünn in T_1 ist. Die Projektion M_2 von M_1 in $E \times U_1$ hat also das $2n$-dimensionale Maß Null, wobei $2n$ die reelle Dimension von $E \times U_1$ ist. In $E \times U_1$ ist $F_3 = F \cup M_2$ eine Nullmenge. Eine Nullmenge $D \subseteq E$ existiert so, daß $F_3(\mathfrak{a}) = F_3 \cap \cap (\{\mathfrak{a}\} \times U_1)$ eine Nullmenge für jedes $\mathfrak{a} \in E - D$ ist. Ein $\mathfrak{a} \in E - (D \cup F_1) \neq \emptyset$

werde nun fest gewählt. Weil

$$L(\mathfrak{a}) = \{(a_1, \dots, a_q, z_{q+1}, \dots, z_t) \mid |z_\nu| < s_\nu\}$$

höchstens k Punkte von S enthält, kann man Zahlen v_ν mit $0 < v_\nu < s_\nu$ für $\nu = q + 1, \dots, t$ finden so, daß $(\bar{L}^* - \{(\mathfrak{a}, 0, \dots, 0)\}) \cap S = \emptyset$ ist mit

$$L^* = \{(a_1, \dots, a_q, z_{q+1}, \dots, z_t) \mid |z_\nu| < v_\nu\}.$$

Es ist L^* offen und relativ kompakt in $L(\mathfrak{a})$. Weil $\mathfrak{a} \notin D$ ist, gibt es für fast alle $\mathfrak{b} \in U_1$, d. h. alle $\mathfrak{b} \in U_1 - F_3(\mathfrak{a})$ eine Folge (P^ν, Q^ν) aus $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap T_1$ mit $\lim_{\nu\to\infty} (P^\nu, Q^\nu) = P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = (P, Q)$, wobei $P = (\mathfrak{a}, 0, \dots, 0) \in C^t$ und $Q = (\mathfrak{b}, 0, \dots, 0) \in N$ ist. Wegen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in E \times U_1 - F_3 \subseteq E \times U_1 - M_2$ ist $L(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cap M_1 = \emptyset$ mit $M_1 = T_1 \cap (M \times H)$. Also ist $P^\nu \in A \cap L(\mathfrak{a})$ mit $\lim_{\nu\to\infty} P^\nu = P \in L(\mathfrak{a}) \cap G$ und $Q^\nu = \tau(P^\nu)$. Angenommen, $P \in A_0$. Dann ist $Q = \tau_0(P) = \tau_0(\mathfrak{a}, 0, \dots, 0)$ für fast alle $Q \in N$, was falsch ist, da $\tau_0(P)$ einen Punkt darstellt. Also ist $P \in S$ und $L^* \cap S = \bar{L}^* \cap S = \{P\}$. Sei $L = L^* \cap G$. Da L^* offen auf $L(\mathfrak{a})$ ist und $P^\nu \in L(\mathfrak{a}) \cap A$ gegen $P \in L^*$ strebt, ist $P^\nu \in L^* \cap A = L \cap A$ für $\nu \geqq \nu_0$ mit $\lim_{\nu\to\infty} (P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P, Q)$ und $P \in S$, woraus sich $Q \in \Sigma_\tau(P, L)$ für fast alle $Q = (\mathfrak{b}, 0 \dots, 0) \in N$ ergibt. Weil $\Sigma_\tau(P, L)$ in G, also in G_1 abgeschlossen ist, folgt $N \subseteq \Sigma_\tau(P, L) \subseteq H$.

Andererseits gilt

$$\bar{L} \cap S = \overline{L^* \cap G} \cap S \subseteq \bar{L}^* \cap S = L^* \cap S = L \cap G \cap S = L \cap S,$$

d. h., $(\bar{L} - L) \cap S = \emptyset$ und $L \cap S = L^* \cap S = \{P\}$. Es ist $\bar{L} \subseteq \bar{L}^* \subset G_1$ und $L \subseteq G$ und G abgeschlossen in G_1; also folgt $\bar{L} \cap G = \bar{L}$, wobei $\bar{L}$ als abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt ist. Wegen $L \cap A \neq \emptyset$ ist $L(\mathfrak{a}) \cap G$ und auch $L^* \cap G = L$ eine rein p-dimensionale, lokalanalytische Menge. Wegen $\mathfrak{a} \in E - F_1$ ist $L(\mathfrak{a}) \cap M_1$, also auch $L \cap M$, in einer höchstens $(p-1)$-dimensionalen in G_1 analytischen Menge enthalten, also dünn (von der Dimension $p - 1$) auf L. Nach Voraussetzung 3 enthält $\Sigma_\tau(P, L)$ keine p-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von H, speziell ist N nicht in $\Sigma_\tau(P_0, L)$ enthalten. Die Annahme $S_R \neq \emptyset$ stößt also auf einen Widerspruch, w.z.b.w.

Anmerkungen zu den Sätzen 7.5 und 7.6:

1. **Anmerkung.** *Ist G eine komplexe Mannigfaltigkeit, so braucht man die Voraussetzung 3 in den Sätzen 7.5 und 7.6 nur für komplexe Teilmannigfaltigkeiten L zu verlangen.*

Beweis. Man kann dann im Beweis des Satzes $t = n$, $G = G_1$, $\mathfrak{C} = \{0\}$ und $L^* = L$ annehmen. Offensichtlich ist L dann eine komplexe Teilmannigfaltigkeit.

2. **Anmerkung.** *In den Sätzen 7.5 und 7.6 ist unter Annahme der Voraussetzung 2 die Voraussetzung 3 äquivalent zu:*

3'. *Wenn L eine rein p-dimensionale, lokalanalytische Teilmenge von G ist, wenn $\bar{L}$ kompakt ist, wenn $L \cap M$ dünn auf L ist, wenn $(\bar{L} - L) \cap S$ leer ist, wenn $L \cap S$ aus höchstens abzählbar vielen Punkten besteht und dünn von der Dimension 1 auf L ist (bzw. wenn im Falle des Satzes 7.6 $L \cap S = \{P_0\}$ gilt), so ist $\tau_L = \tau \mid L \cap A$ R-meromorph auf L.*

Beweis. *Aus 3 folgt 3'*: Der Graph von $\tau \mid L \cap A$ ist $T \cap [(L \cap A) \times H] = T_L$, und es ist zu zeigen, daß $\bar{T}_L \cap (\bar{L} \times H)$ in $G \times H$ lokalanalytisch ist. Es gibt eine offene Umgebung U von L mit $\bar{L} \cap U = L$. In U ist L analytisch. Sei C die Menge der R-Singularitäten von $\tau \mid L \cap A$. Es ist $C \subseteq \bar{L} \cap S$. Also ist C höchstens abzählbar. Angenommen, $C \neq \theta$. Dann gibt es einen isolierten Punkt $P_0 \in C$ und eine offene Umgebung $U_0 \subseteq U$ von P_0 so, daß $(\bar{U}_0 - U_0) \cap S \cap L = \theta$ und $\bar{U}_0 \cap C = \{P_0\}$ ist. Dann wird $\bar{T}_L \cap (U_0 \times H)$ höchstens auf $\{P_0\} \times H$ singulär. Sei C^* die Menge der Singularitäten von $\bar{T}_L$ in $U_0 \times H$. Nach Annahme existiert $(P_0, Q_0) \in C^*$. Nach Satz 1.1 ist

$$\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0, L) = (\{P_0\} \times H) \cap \bar{T}_L \supseteq C^* \cap (U_0 \times H) .$$

Es gibt eine offene Umgebung V von $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0, L) \cap C^*$ mit einer in V p-dimensionalen analytischen Menge N, die $\Sigma_\tau(P_0, L) \cap V$ umfaßt. Also wird die rein p-dimensionale analytische Menge $\bar{T}_L \cap [(U_0 \cap A) \times V]$ in (P_0, Q_0) singulär und höchstens auf $\{P_0\} \times N$ singulär; sie wird in jedem Punkt eines irreduzibeln Teiles $\{P_0\} \times N'$ von $\{P_0\} \times N$ singulär, wobei N' p-dimensionaler irreduzibeler Teil von N ist. Wegen

$$\{P_0\} \times N' \subseteq C^* \cap (\{P_0\} \times H) = C^* \cap (U_0 \times H) \subseteq \{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0, L)$$

enthält $\Sigma_\tau(P_0, L)$ die Menge N', die wiederum eine p-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von H enthält entgegen Voraussetzung 2.

Aus 3' folgt 3: Es sei $U \supseteq L$ offen mit $U \cap \bar{L} = U \cap L$. In $U \times H$ ist $T_L \cap (U \times H) = \bar{T}_L \cap (L \times H)$ analytisch. Für $P_0 \in M \cap L$ ist $(\{P_0\} \times H) \cap \bar{T}_L = \{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0, L)$ in $U \times H$ analytisch und in $\bar{T}_L \cap (U \times H)$ enthalten, aber auf dieser Menge nirgends dicht. Daher ist die abgeschlossene Menge $\Sigma_\tau(P_0, L)$ eine höchstens $(p-1)$-dimensionale analytische Menge in H. Es ist $\Sigma_\tau(S \cap L, L) = \bigcup_{P_0 \in S \cap L} \Sigma_\tau(P_0, L)$ fastdünn von der Dimension $p-1$, enthält also keine p-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von H, w.z.b.w.

3. Anmerkung. *In den Sätzen 7.5 und 7.6 ist unter der Annahme der Voraussetzung 2 die Voraussetzung 3 äquivalent zu:*

3''. *Wenn L eine rein p-dimensionale lokalanalytische Teilmenge von G ist, wenn $\bar{L}$ kompakt ist, wenn $L \cap M$ dünn auf L ist, wenn $(\bar{L} - L) \cap S$ leer ist, wenn $L \cap S$ aus höchstens abzählbar vielen (im Falle des Satzes 7.6 aus einem) Punkten besteht und dünn von der Dimension 1 auf L ist, dann sei $\Sigma_\tau(P_0, L)$ eine höchstens $(p-1)$-dimensionale analytische Menge in H für jedes $P_0 \in L \cap S$.*

Beweis. a) *Aus 3'' folgt 3*: Denn $\Sigma_\tau(S \cap L, L) = \bigcup_{P_0 \in S \cap L} \Sigma_\tau(P_0, L)$ ist dann fastdünn von der Dimension $p-1$, enthält also keine p-dimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von H.

b) *Aus 3 folgt 3''*: Denn zunächst folgt 3' und aus dem Beweis von Anmerkung 2 (b) geht hervor, daß $\Sigma_\tau(P_0, L)$ eine höchstens $(p-1)$-dimensionale analytische Menge in H für jedes $P_0 \in L \cap S$ (ja sogar $P_0 \in L \cap M$) ist, w.z.b.w.

4. Anmerkung. *Im Satz 7.6 ist im Falle $p = 1$ die Voraussetzung 3 unter Annahme der Voraussetzung 2 äquivalent zu:*

3'''. *Wenn L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $\bar{L} \cap M = L \cap M = \{P_0\}$ ist, so enthalte $\Sigma_\tau(P_0, L)$ höchstens einen Punkt.*

Beweis. *Aus 3 folgt 3‴*: Denn aus 3 folgt 3″. Sei U eine offene, relativ kompakte Umgebung U von P_0 mit $L_0 = U \cap L = U \cap \bar{L}$. Dann ist $\bar{L}_0$ kompakt, $L_0 \cap M = \bar{L}_0 \cap M = \{P_0\}$ dünn auf der rein eindimensionalen, lokalanalytischen Teilmenge L_0 von G. Ist $P_0 \in G - S$, so besteht $\Sigma_\tau(P_0, L) = \Sigma_\tau(P_0, L_0)$ genau aus dem Punkt $\tau_0(P_0)$, wenn τ_0 die analytische Fortsetzung von τ in $A_0 = G - S$ ist. Für $P_0 \in S$ ist $L_0 \cap S = \{P_0\}$, also besteht die höchstens nulldimensionale analytische Menge $\Sigma_\tau(P_0, L) = \Sigma_\tau(P_0, L_0)$ nur aus isolierten Punkten, also nach Satz 1.4 höchstens aus einem Punkt.

Aus 3‴ folgt 3: Sei L eine eindimensionale lokalanalytische Menge in G mit $\bar{L}$ kompakt, $(\bar{L} - L) \cap S = \theta$ und $L \cap M$ dünn auf L mit $L \cap S = \{P_0\}$. Da $L \cap M$ abgeschlossen und dünn von der Dimension O ist, besteht $L \cap M$ nur aus isolierten Punkten. Es gibt eine Umgebung U von P_0 mit $U \cap \bar{L} = U \cap L = \bigcup_{\nu=1}^{r} L_\nu$, wobei L_ν eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten aus H mit $L_\nu \cap M = \bar{L}_\nu \cap M = \{P_0\}$ sind. Es ist $\Sigma_\tau(P_0; L) \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{r} \Sigma_\tau(P_0, L_\nu)$ endlich, enthält also keine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von H, w.z.b.w.

Anmerkung 4 besagt aber nichts anderes als: τ ist schwach meromorph. Daher ist bewiesen:

Satz 7.7. *Wenn τ schwach meromorph ist und wenn $\Sigma_\tau(M)$ dünn von der Dimension 1 ist, so ist τ R-meromorph.*

Speziell ist also jede schwach meromorphe Abbildung in eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit R-meromorph.

Um nun die Sätze 7.5 und 7.6 weiter ausnützen zu können, müssen also Abbildungen τ lokalanalytischer Mengen L untersucht werden, die höchstens abzählbar viele Singularitäten haben; dabei kann man sich gemäß § 5 auf komplexe Räume L beschränken.

Satz 7.8. (Casorati-Weierstrass)

Voraussetzung. *Die komplexen Räume G und H seien rein n-dimensional und H zusammenhängend. Die Menge S_R der R-Singularitäten der Abbildung τ sei höchstens abzählbar.*

Behauptung. 1. $S_R = \{P \mid \Sigma_\tau(P) = H, P \in M\}$.

2. *Zu jedem $P_0 \in S_R$ gibt es eine Nullmenge $N_{P_0} \subseteq H$ so, daß es zu jedem $Q \in H - N_{P_0}$ eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0$ und $\tau(P^\nu) = Q$ gibt.*

Beweis. a) *Ist τ R-meromorph in P_0*, so gibt es eine offene Umgebung U von P_0 so, daß $(U \times H) \cap \bar{T}$ analytisch und rein n-dimensional in $U \times H$ ist. Wählt man U zusammenhängend, so ist auch $U \cap A$ und damit $[(U \cap A) \times H] \cap T$ zusammenhängend. Die in $(U \cap A) \times H$ irreduzible analytische Menge $[(U \cap A) \times H] \cap T$ wird durch $(U \times H) \cap \bar{T}$ fortgesetzt. Daher ist $(U \times H) \cap \bar{T}$ irreduzibel. Also ist $(\{P_0\} \times H) \cap \bar{T}$ analytisch und höchstens $(n-1)$-dimensional. Wegen $\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0) = (\{P_0\} \times H) \cap \bar{T}$ ist $\Sigma_\tau(P_0)$ analytisch und höchstens $(n-1)$-dimensional in H, d. h. $\Sigma_\tau(P_0) \neq H$.

b) Ist τ R-singulär in P_0 und P_0 ein isolierter Punkt von S_R, so gibt es eine offene Umgebung U von P_0 mit $S_R \cap \bar{U} = \{P_0\}$. Außerdem kann man U

so klein wählen, daß $\overline{U}$ kompakt ist, daß eine in U analytische Menge M_0 mit $M_0 \supseteq M \cap U$ existiert und daß man U als rein n-dimensionale, irreduzibele und lokalirreduzibele analytische Teilmenge eines Gebietes U_1 des C^t annehmen kann. Sei T singulär in $(P_0, Q_0) \in M \times H$. Die Menge $\hat{H}$ der nichtuniformisierbaren Punkte von H ist dünn von der Dimension $n-2$. Also kann $\overline{T} \cap [(U - \{P_0\}) \times H]$ nicht nur auf $\{P_0\} \times \hat{H}$ singulär werden. Ein $Q_0 \in H - \hat{H}$ existiert, für das (P_0, Q_0) singulärer Punkt von T ist. Sei Q_0 irgendein solcher Punkt. Eine offene und zusammenhängende Umgebung V von Q_0 existiert, die man als Teilgebiet des C^n auffassen kann. Dann ist $T_1 = \overline{T} \cap [(U_1 - \{P_0\}) \times \times V]$ in $(U_1 - \{P_0\}) \times V = W$ analytisch und in einem, also jedem, Punkt von $\{P_0\} \times V$ singulär. Dabei ist $U_1 \times V$ ein Gebiet in $C^t \times C^n = C^{t+n}$ und $\{P_0\} \times V$ ein n-dimensionales Ebenenstück. Nach Stoll [21] hat die Menge F_{P_0} aller Punkte $Q \in V$, zu denen es keine Folge $(P^\nu, Q) \in T_1$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0$ gibt, das $2n$-dimensionale Lebesguesche Maß Null auf V. Seien

$$N_{P_0} = \{Q \mid P_0 \notin \overline{\tau^{-1}(Q)}\}$$
$$D_{P_0} = \{Q \mid (P, Q) \in [(M_0 - \{P_0\}) \times H] \cap \overline{T}\}.$$

Ist $Q \in (N_{P_0} - (F_{P_0} \cup D_{P_0})) \cap V$, so gibt es eine Folge $(P^\nu, Q) \in T_1$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0$. Weil $T_1 \subseteq \overline{T} \subseteq G \times H$ ist, folgt $P^\nu \in U_1 \cap G = U$ mit $P^\nu \neq P_0$. Weil $Q \notin D_{P_0}$ ist, folgt $(P^\nu, Q) \notin [(M_0 - \{P_0\}) \times H] \cap \overline{T}$. Weil $P^\nu \neq P_0$ ist, folgt $P^\nu \notin M_0 - \{P_0\}$, also $P^\nu \notin M_0$. Also ist $P^\nu \in A$. Es ist $\tau(P^\nu) = Q \in V$, d. h., $P_0 = \lim\limits_{\nu \to \infty} P^\nu \in \overline{\tau^{-1}(Q)}$. Daher ist $Q \notin N_{P_0}$, was falsch ist. Folglich ist

$$N_{P_0} \cap V \subseteq (F_{P_0} \cup D_{P_0}) \cap V.$$

Es ist $[(M_0 - \{P_0\}) \times H] \cap \overline{T}$ analytisch in $(U - \{P_0\}) \times H$. Weil $[(U - - \{P_0\}) \times H] \cap \overline{T}$ irreduzibel ist, hat $[(M_0 - \{P_0\}) \times H] \cap \overline{T}$ höchstens die Dimension $n-1$. Die Projektion D_{P_0} in H ist also eine $2n$-dimensionale Nullmenge[19]) in H. Daher ist $N_{P_0} \cap V$ eine Nullmenge in V. Weil T singulär auf $\{P_0\} \times V$ ist, ist die Menge der Singularitäten von T offen und abgeschlossen auf dem zusammenhängenden Raum $\{P_0\} \times (H - \hat{H})$. Also wird T in jedem Punkt von $\{P_0\} \times (H - \hat{H})$, also in jedem Punkt von $\{P_0\} \times H$ singulär. Es ist

$$\{P_0\} \times H \subseteq (\{P_0\} \times H) \cap \overline{T} = \{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0).$$

[19]) Denn diese Projektion ist fastdünn in H. Eine Teilmenge M einer komplexen Mannigfaltigkeit H ist eine Nullmenge, wenn es zu jedem Punkt von H eine offene Umgebung U und eine umkehrbar holomorphe Abbildung $\alpha: U \to U'$ auf ein Gebiet U' des C^n gibt so, daß $\alpha(M \cap U)$ eine Lebesguesche Nullmenge in U' ist. Eine Teilnahme M eines rein n-dimensionalen komplexen Raumes H, dessen nichtuniformisierbare Punkte die Menge $\hat{H}$ bilden, heißt Nullmenge, wenn $M \cap (H - \hat{H})$ Nullmenge auf der komplexen Mannigfaltigkeit $H - \hat{H}$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es zu jedem Punkt von H eine offene Umgebung U und eine umkehrbare holomorphe Abbildung $\alpha: U \to U'$ auf eine lokalirreduzible, rein n-dimensionale lokalanalytische Menge des C^u mit $u \geq n$ gibt so, daß $\alpha(U \cap M)$ eine Nullmenge des $2n$-dimensionalen Oberflächenmaßes von Carathéodory ist.

Also ist $H = \Sigma_\tau(P_0)$. Außerdem überdecken abzählbar viele Mengen V die offene Teilmenge $H - \hat{H}$ von H, also auch $N_{P_0} - \hat{H}$. Daher ist $N_{P_0} - \hat{H}$ eine Nullmenge. Da $\hat{H}$ selbst eine ist, ist N_{P_0} eine Nullmenge auf H. Ist $Q \in H - N_{P_0}$, so ist $P_0 \in \overline{\tau^{-1}(Q)}$; also gibt es eine Folge $P_\nu \in \tau^{-1}(Q) \in A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0$ und $\tau(P^\nu) = Q$. Die Aussage 2 ist für jeden isolierten Punkt von S_R bewiesen. Außerdem gilt für jeden isolierten Punkt $P_0 \in S_R$ die Gleichheit $H = \Sigma_\tau(P_0)$.

c) Sei $P_0 \in S_R$ Häufungspunkt von isolierten Punkten P^ν von S_R. Man kann $P_0 = \lim\limits_{\nu\to\infty} P^\nu$ annehmen. Sei ϱ eine Metrik auf G. Zu jedem $Q \in H - \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} N_{P^\nu}$ gibt es eine Folge $P^\nu_\mu \in A$ mit $\tau(P^\nu_\mu) = Q$. Eine Folge μ_ν mit $\varrho(P^\nu_{\mu_\nu}, P^\nu) < \frac{1}{\nu}$ werde gewählt. Wegen $\varrho(P^\nu_{\mu_\nu}, P_0) < \frac{1}{\nu} + \varrho(P^\nu, P_0)$ strebt $P^\nu_{\mu_\nu} \in A$ gegen P_0 mit $\tau(P^\nu_{\mu_\nu}) = Q$. Die Aussage 2 gilt also für P_0, wenn z. B. $N_{P_0} = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} N_{P^\nu}$ gewählt wird. Es ist $H - N_{P_0} \subseteq \Sigma_\tau(P_0)$. Da N_{P_0} als Nullmenge keine offene Menge enthält und $\Sigma_\tau(P_0)$ in H abgeschlossen ist, folgt $H = \Sigma_\tau(P_0)$. Wie das folgende Lemma zeigt, gilt dann $H = \Sigma_\tau(P_0)$ für alle $P_0 \in S_R$ und Aussage 2 für alle $P_0 \in S_R$, womit der Satz bewiesen ist.

Lemma: *Ist S eine abgeschlossene, höchstens abzählbare Menge in einem metrischen, vollständigen Raum G und ist R eine abgeschlossene Teilmenge von S, die alle isolierten Punkte von S enthält, so ist $R = S$.*

Beweis. Angenommen, $P \in S - R$ existiert. Dann gibt es eine offene Kugel K um P mit $\bar{K} \cap R = \theta$ und $(\bar{K} - K) \cap S = \theta$. Im vollständigen metrischen Raum $\bar{K}$ ist $\bar{K} \cap S \neq \theta$ abzählbar, abgeschlossen, also nicht perfekt. Ein isolierter Punkt $P_1 \in \bar{K} \cap S = K \cap S$ existiert. Da K offen ist, ist P_1 isolierter Punkt von S. Wegen $K \cap R = \theta$ gehört P_1 nicht zu R, was falsch ist.

Nun kann man leicht einige weitere Kriterien für die Gleichheit der beiden Meromorphiebegriffe herleiten.

Satz 7.9. Voraussetzung. *1. Die komplexen Räume G und H seien rein n-dimensional und H zusammenhängend.*

2. Die holomorphe Abbildung $\tau : A \to H$ sei auf G meromorph.

3. Die Menge S_R der R-Singularitäten sei höchstens abzählbar.

4. Auf H gebe es eine nichtkonstante holomorphe Funktion f.

Behauptung. *Die Abbildung τ ist R-meromorph.*

Beweis. Nach Satz 4.1 läßt sich die in A holomorphe Funktion $f\tau$ analytisch zu f^* in G fortsetzen. Angenommen, es gibt ein $P_0 \in S_R$. Nach Satz 7.8 gibt es zu fast jedem $Q \in H$ eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0$ und $\tau(P^\nu) = Q$. Es ist $f^*(P_0) = \lim\limits_{\nu\to\infty} f^*(P^\nu) = \lim\limits_{\nu\to\infty} f\tau(P^\nu) = f(Q)$, d. h. f hat in fast allen Punkten von H denselben Wert $f^*(P_0)$. Also ist f konstant entgegen Voraussetzung 4. Es ist $S_R = \theta$, w.z.b.w.

Allgemeiner gilt sogar:

Satz 7.10. Voraussetzung. *1. Die komplexen Räume G und H seien rein n-dimensional und H zusammenhängend.*

2. Die Abbildung τ sei meromorph.

3. Die Menge S_R der R-Singularitäten sei höchstens abzählbar.

4. Auf H gibt es $n-1$ meromorphe unabhängige Funktionen $f_1, \ldots, f_{n-1}$. Das heißt: Ist $\hat{H}$ die Menge der nichtuniformisierbaren Punkte von H, so ist die auf $H-\hat{H}$ meromorphe äußere Differentialform $df_1 \wedge \cdots \wedge df_{n-1} \not\equiv 0$.

Behauptung. *Die Abbildung τ ist R-meromorph.*

Beweis. O.B.d.A. kann man G zusammenhängend annehmen. Angenommen, die Menge S_R ist nicht leer. Dann enthält $\tau(A)$ fast jeden Punkt von H. In H ist die Menge N_ν der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von f_ν eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge oder leer. Daher ist $\tau(A) \subsetneq N_\nu$, weshalb die in A analytische Menge $\tau^{-1}(N_\nu)$ dünn ist. Daher ist die auf $A-\tau^{-1}(N_\nu)$ holomorphe Funktion $f_\nu\tau$ zu einer in G meromorphen Funktion f_ν^* fortsetzbar. In G ist die Menge N_ν^* der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von f_ν^* leer oder rein $(n-1)$-dimensional. Die Menge $\hat{G}$ (bzw. $\hat{H}$) der nicht uniformisierbaren Punkte von G (bzw. H) ist analytisch und höchstens $(n-2)$-dimensional in G (bzw. H). In A ist $\tau^{-1}(\hat{H})$ analytisch; wegen $\tau(A) \not\subset \hat{H}$ ist $\tau^{-1}(\hat{H})$ höchstens $(n-1)$-dimensional. Ist $r(P)$ der Rang von τ in A, so ist $B = \{P \mid r(P) < n\}$ analytisch in A. Wäre $B = A$, so wäre $\tau(A)$ fastdünn in H, also eine Nullmenge in H. Weil aber $H-\tau(A)$ eine Nullmenge in H ist, kann das nicht sein. Daher ist B höchstens $(n-1)$-dimensional. Also ist

$$A_1 = A - (G \cup B \cup \tau^{-1}(H) \cup \bigcup_{\nu=1}^{n-1} N_\nu^*) \neq \emptyset$$

eine offene zusammenhängende Teilmenge von A und $M_1 = A - A_1$ ist analytisch und höchstens $(n-1)$-dimensional in A. Es ist $\tau(A_1) \subseteq H - \hat{H} = \tilde{H}$. Da der Rang der auf M_1 beschränkten Abbildung τ auf jedem irreduzibeln Teil von M_1 höchstens $n-1$ ist, ist $\tau(M_1)$ fastdünn auf H, also eine Nullmenge auf H. Wegen $\tau(A_1) \supseteq \tau(A) - \tau(M_1)$ enthält $\tau(A_1)$ fast jeden Punkt von H. Es ist $\tau: A_1 \to \tilde{H}$ eine holomorphe Abbildung einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit A_1 in eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $\tilde{H}$ mit Rang n. Also ist die Funktionaldeterminante der Abbildung nicht identisch Null. Die Nullstellen der Funktionaldeterminante bilden vielmehr eine in A_1 leere oder rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge D. Die offene Menge $A_2 = A_1 - D$ ist zusammenhängend und $\tau(D)$ eine Nullmenge in $\tilde{H}$. Daher enthält $\tau(A_2) \supseteq \tau(A_1) - \tau(D)$ fast jeden Punkt von H.

Auf A_1 ist $df_1^* \wedge \cdots \wedge df_2^*$ holomorph und $f_\nu^* = f_\nu\tau$. Die Menge C der Nullstellen dieses Differentiales ist analytisch in A_1. Angenommen, $\dim C = n$. Dann ist $C = A_1$. Zu jedem Punkt $P_0 \in A_2$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq A_2$ von P_0 und eine offene Umgebung V von $\tau(P_0) \in \tilde{H}$ mit $\tau(U) \subseteq V \subseteq \tilde{H}$, auf denen es umkehrbar holomorphe Abbildungen $\alpha: U \to U'$ und $\beta: V \to V'$

auf Gebiete U', V' des C^n gibt. Es sei $\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \beta\,\tau\,\alpha^{-1}(\mathfrak{z})$. Weil $U \subseteq A_2 = A_1 - D$ ist, gilt

$$\frac{\partial(w_1, \ldots, w_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} = \Delta(\mathfrak{z}) \neq 0 \quad \text{für } \mathfrak{z} \in U'.$$

Dann ist

$$0 = df_1^* \wedge \cdots \wedge df_{n-1}^*$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-1})}{\partial(w_1, \ldots, w_{\mu-1}, w_{\mu+1}, \ldots, w_n)} \cdot \frac{\partial(w_1, \ldots, w_{\mu-1}, w_{\mu+1}, \ldots, w_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_{\nu-1}, z_{\nu+1}, \ldots, z_n)} \times$$

$$\times\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{\nu-1} \wedge dz_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge dz_n\,.$$

Da $\Delta(\mathfrak{z}) \neq 0$ ist, ergibt sich

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-1})}{\partial(w_1, \ldots, w_{\mu-1}, w_{\mu+1}, \ldots, w_n)} = 0 \qquad \text{für } \mu = 1, \ldots, n$$

in $\tau(P_0)$, also $df_1 \wedge \cdots \wedge df_{n-1} = 0$ in $\tau(A_2)$, d. h., fast überall auf H. Es ist $df_1 \wedge \cdots \wedge df_{n-1} \equiv 0$, was falsch ist. Also ist $\dim C < n$. Es sei $A_3 = A_2 - C$. Dann ist A_3 offen in G, und $\tau(A_3)$ enthält fast alle Punkte von H. Außerdem ist A_3 dicht in A_2, also dicht in A_1, also dicht in A, also dicht in G. Es ist $\tau(A - A_3)$ eine Nullmenge in H.

Sei $P_0 \in S_R$ und N_{P_0} die Nullmenge in H nach Satz 7.8. Eine offene Umgebung U von P_0 mit einer in U analytischen Menge $M_0 \supseteq M \cap U$ existiert, wobei $\dim M_0 \leq n - 1$ ist. Es ist $\tau(M_0 \cap A)$ eine Nullmenge in H. Sei $Q_0 \in H - (\tau(A - A_3) \cup N_{P_0} \cup \tau(M_0 \cap A))$. Eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\tau(P^\nu) = Q_0$ und $\lim_{\nu\to\infty} P^\nu = P_0$ existiert. Wegen $\tau(P^\nu) = Q_0 \notin \tau(A - A_3)$ ist $P^\nu \in A - (A - A_3) = A_3$. Auf A_3 ist f_μ^* holomorph und $f_\mu^*(P^\nu) = f_\mu(\tau(P^\nu)) = f_\mu(Q_0)$. Da f_μ^* meromorph auf G ist, wird durch

$$L_0 = \bigcap_{\mu=1}^{n-1} \{P \mid f_\mu^*(P) = f_\mu(Q_0)\,,\ P \in G\}$$

eine in G analytische Menge definiert, wobei einer meromorphen Funktion an jeder Unbestimmtheitsstelle jeder Funktionswert zugeschrieben werde. Die Vereinigung L aller irreduzibeln Teile von L_0, die in A_3 eindringen, ist analytisch in G und wegen $P^\nu \in L_0 \cap A_3$ nicht leer. Wegen $df_1^* \wedge \cdots \wedge df_{n-1}^* \neq 0$ und holomorph auf A_3 ist $L \cap A_3$, also auch L rein eindimensional. Eine offene Umgebung $U_1 \subseteq U$ von P_0 existiert so, daß $L \cap U_1$ nur endlich viele irreduzible Teile $L_\varrho(\varrho = 1, \ldots, r)$ hat, die komplexe Teilmannigfaltigkeiten sind und die paarweise nur den Punkt P_0 gemeinsam haben. Für $\nu \geq \nu_0$ ist $P^\nu \in \bigcup_{\varrho=1}^{r} L_\varrho = L \cap U_1$. Eine Teilfolge P^{ν_μ} liegt auf einem einzigen L_ϱ. In U_1 ist $L_\varrho \cap M_0$ analytisch und enthält P_0. Angenommen, $L_\varrho \cap M_0$ ist eindimensional. Weil L_ϱ in U_1 irreduzibel und eindimensional ist, gilt $L_\varrho \cap M_0 = L_\varrho$, d. h., $Q_0 = \tau(P^{\nu_\mu}) \in \tau(L_\varrho \cap A) = \tau(L_\varrho \cap M_0 \cap A) \subseteq \tau(M_0 \cap A)$, was falsch ist. Deshalb ist $L_\varrho \cap M_0$ nulldimensional. Es gibt eine offene Umgebung U_2 von P_0 mit $L_\varrho \cap U_2 = L^*$ und $L^* \cap M = \bar{L}^* \cap M = \{P_0\}$, so daß L^* irreduzibel in U_2 ist. Da τ meromorph ist, da $\tau(P^{\nu_\mu}) = Q_0$ mit $\lim_{\mu\to\infty} P^{\nu_\mu} = P_0$ und $P^{\nu_\mu} \in L^*$

für $\mu \geqq \mu_0$ gilt, wird L^* durch

$$\tau_0(P) = \begin{cases} \tau(P) & \text{für } P \in L^* \cap A \\ Q_0 & \text{für } P = P_0 \end{cases}$$

holomorph in H abgebildet. Wegen $\tau_0(P^{\nu_\mu}) = Q_0$ und $\lim\limits_{\mu \to \infty} P^{\nu_\mu} = P_0 \in L^*$ und $P^{\nu_\mu} \in L^*$ ist $\tau_0(P) = Q_0$, d. h. $\tau(P) = Q_0$ für alle $Q_0 \in L^* \cap A$. Wegen $\tau(P) = Q_0 \in H - \tau(A - A_3)$ ist $P \in A_3$ für alle $P \in L^* \cap A$, d. h., $L^* \cap A_3 = L \cap A_3$. Der Rang von τ für $P \in L^* \cap A$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} r(P) &= \dim_P G - \dim_P \tau^{-1}\tau(P) = n - \dim_P \tau^{-1}(Q_0) \\ &\leqq n - \dim_P L^* \cap A = n - 1 \,. \end{aligned}$$

Daher ist $\theta \neq L^* \cap A_3 = L^* \cap A \subseteq B \subseteq A - A_1 \subseteq A - A_3$. Widerspruch! Die Menge S_R ist leer, w.z.b.w.

Für eine lückenlose Abbildung in einen nichtkompakten Raum ergibt sich leicht:

Satz 7.11. Voraussetzung. *1. Die komplexen Räume G und H seien rein n-dimensional. Der Raum H sei zusammenhängend und nicht kompakt.*

2. Die Abbildung τ sei lückenlos.

3. Die Menge S_R der R-Singularitäten sei höchstens abzählbar.

Behauptung. *Die Abbildung τ ist R-meromorph und dann natürlich SR-meromorph.*

Beweis. Nach Satz 7.8 gilt $H = \Sigma_\tau(P)$ für $P \in S_R$, und nach Satz 1.2 ist $\Sigma_\tau(P)$ kompakt, also auch H kompakt, was falsch ist. Daher ist S_R leer, w.z.b.w.

Bemerkenswerterweise wurde in Satz 7.11 nicht die Meromorphie der Abbildung τ vorausgesetzt. Übrigens gibt es meromorphe und nicht lückenlose (aber doch lückenfreie) Abbildungen, wie das Beispiel am Ende von § 8 zeigt. Wie in der Einleitung gezeigt wurde, gibt es wesentlich singuläre Abbildungen $\tau : A \to H$, wobei G und H n-dimensionale und zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten sind und M genau aus einem Punkt besteht, in dem τ wesentlich singulär wird. Nun kann man die Sätze 7.5 und 7.6 einerseits mit den Sätzen 7.8 bis 7.11 andererseits kombinieren:

Satz 7.12. Voraussetzung. *1. Die Menge S der singulären Stellen der Abbildung τ sei dünn von der Codimension $p - 1$ und fastdünn von der Codimension $p \geqq 2$.*

2. Der Bildraum H sei zusammenhängend und p-dimensional. Wenigstens eine der folgenden Annahmen gelte:

a) *Die Abbildung τ ist meromorph und auf H existiert eine nichtkonstante holomorphe Funktion.*

b) *Die Abbildung τ ist meromorph und auf H existieren $p - 1$ unabhängige meromorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_{p-1}$, d. h., die abgesehen von den nichtuniformisierbaren Stellen definierte äußere Differentialform $d f_1 \wedge \cdots \wedge d f_{p-1}$ ist nicht identisch Null.*

c) *Die Abbildung τ ist lückenlos und H nicht kompakt.*

Behauptung. *Die Abbildung τ ist R-meromorph.*

Beweis. Nach Satz 7.5 und Anmerkung 2 ist zu beweisen, daß die Abbildung τ auf jeder rein p-dimensionalen lokalanalytischen Teilmenge L von G, auf der $L \cap M$ dünn ist, wobei $L \cap S = \bar{L} \cap S$ höchstens abzählbar und dünn von der Dimension 1 ist, R-meromorph ist. Sei (L^*, χ) der zu L gehörige komplexe Überlagerungsraum. Es ist $\tau\,\chi: \chi^{-1}(A \cap L) \to H$ holomorph und $L^* - \chi^{-1}(A \cap L) = \chi^{-1}(L \cap M)$ dünn in L^*. Es ist $\tau\,\chi$ regulär sicher bis auf die höchstens abzählbar vielen Punkte der Menge $\chi^{-1}(L \cap S) \subseteq \chi^{-1}(L \cap M)$. Der Raum L^* ist rein p-dimensional. Unter der Annahme a) oder b) ist $\tau\,\chi$ meromorph nach Satz 3.4, also R-meromorph nach Satz 7.9 bzw. 7.10. Unter der Annahme c) ist $\tau\,\chi$ lückenlos (vgl. den Beweis von Satz 5.3), also nach Satz 7.11 R-meromorph. Nach Satz 5.3 ist $\tau: L \cap A \to H$ R-meromorph. Nach Satz 7.5 und Anmerkung 2 zu diesem Satz ist $\tau: A \to H$ in G R-meromorph, w.z.b.w.

Der Satz 7.6 gibt keine Verbesserung des Satzes 7.12 außer im Falle $p = 1$, geht dann aber in einen Spezialfall von Satz 7.7 über. Im Falle einer meromorphen Abbildung ist Voraussetzung 1 von Satz 7.12 von selbst für $p = 2$ erfüllt; denn nach Satz 3.6 ist S dünn und von der Codimension 2 fastdünn. Die Bedingung 2 b) besagt im Falle $p = 2$, daß es eine meromorphe Funktion mit nicht identisch verschwindender Ableitung, d. h. eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf H gibt. Es folgt also:

Satz 7.13. *Gibt es auf jeder zweidimensionalen Zusammenhangskomponente des zweidimensionalen komplexen Bildraumes H der lückenfreien Abbildung τ eine nichtkonstante meromorphe Funktion, so ist τ dann und nur dann R-meromorph, wenn τ meromorph ist.*

Mittels der Bedingung c) erhält man:

Satz 7.14. *Gibt es auf jeder kompakten Zusammenhangskomponente der Dimension 2 des zweidimensionalen komplexen Bildraumes H der lückenlosen Abbildung τ eine nichtkonstante meromorphe Funktion f, so ist τ dann und nur dann R-meromorph, wenn τ meromorph ist. Speziell ist eine lückenlose Abbildung τ in einen nichtkompakten, zusammenhängenden komplexen Raum der Dimension 2 oder 1 immer R-meromorph.*

§ 8. Meromorphe Modifikationen

Nun sollen die vorhergehenden Ergebnisse auf meromorphe Modifikationen angewandt werden. Nach Stoll [16] liegt eine *Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ vor, wenn gilt:

1. *G und H sind rein n-dimensionale komplexe Räume.*

2. *Durch τ wird die offene Teilmenge A von G umkehrbar holomorph auf die offene Teilmenge B von H abgebildet. Es ist $v = \tau^{-1}: B \to A$.*

3. *Es sind $M = G - A$ dünn in G und $N = H - B$ dünn in H.*

Die Umkehrung $\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} H, B, N, v \\ G, A, M, \tau \end{pmatrix}$ ist wieder eine Modifikation. Die Modifikation $\mathfrak{M}$ heißt offen, wenn $\tau(U \cap A) \cup N$ für jede *offene* Umgebung U

von M offen ist, was genau dann der Fall ist, wenn v lückenlos ist[20]). Die Modifikation $\mathfrak{M}$ heiße *beiderseits offen*, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ offen sind, d. h. wenn v und τ lückenlos sind. Eine Modifikation heiße *lückenfrei (lückenlos)*, wenn τ es ist; sie heiße *beiderseits lückenfrei (lückenlos)*, wenn τ und v es sind. Die Modifikation heiße *meromorph (schwach meromorph, R-meromorph, SR-meromorph)*, wenn es τ ist. Sie heiße *beiderseits meromorph (schwach meromorph, R-meromorph, SR-meromorph)*, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$, d. h. τ und v es sind. Eine R-meromorphe Modifikation ist offensichtlich beiderseits R-meromorph, weil der Graph von τ in den von v durch die Transformation $(P, Q) \to (Q, P)$ übergeht. Eine Modifikation heißt *holomorph*, wenn v in jedem Punkt von N regulär ist. Eine holomorphe Modifikation ist beiderseits R-meromorph (und natürlich auch beiderseits schwach meromorph). Eine Modifikation heiße *trivial*, wenn sich τ zu einer holomorphen und eineindeutigen Abbildung $\tau^*: G \to H$ auf H fortsetzen läßt. Der Graph der Modifikation $\mathfrak{M}$ sei der Graph von τ über G.

Satz 8.1. *Ist die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *R-meromorph, so gibt es einen komplexen Raum K und zwei holomorphe Modifikationen*

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau_1 \\ K, C, S, \psi \end{pmatrix} \quad \mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} H, B, N, v_1 \\ K, C, S, \varphi \end{pmatrix},$$

wobei

$$\varphi\,\tau_1(P) = \tau(P) \quad \textit{für} \quad P \in A$$
$$\psi\, v_1(Q) = v(Q) \quad \textit{für} \quad Q \in B$$

gilt und wobei jede konvergente Folge $P^\nu \in A$, deren Bildfolge $\tau(P^\nu)$ konvergiert, eine Teilfolge P^{ν_μ} hat, für die $\tau_1(P^{\nu_\mu})$ konvergiert.

Zusatz 1. *Ist $Q^\nu \in B$ und konvergieren die Folgen Q^ν und $v(Q^\nu)$, so konvergiert $v_1(Q^{\nu_\mu})$ für eine geeignete Teilfolge ν_μ.*

Zusatz 2. *Sind ψ_0, φ_0 die Fortsetzungen von ψ bzw. φ auf K, so ist $\Sigma_\tau(P_0) = \varphi_0\,\psi_0^{-1}(P_0)$ für $P_0 \in M$ und $\Sigma_v(Q_0) = \psi_0\,\varphi_0^{-1}(Q_0)$ für $Q_0 \in N$.*

Zusatz 3. *Man kann für K speziell den Cartanschen Überlagerungsraum T^* des Graphen T wählen, wobei $\chi: T^* \to T$ die zugehörige Projektion sei. Sind $\tilde\psi: T \to G$ und $\tilde\varphi: T \to H$ die Projektionen $\tilde\psi(P, Q) = P$ und $\tilde\varphi(P, Q) = Q$, so ist dabei $\psi = \tilde\psi\,\chi$ und $\varphi = \tilde\varphi\,\chi$.*

Zusatz 4. *Wenn τ lückenlos, d. h. $\mathfrak{M}^{-1}$ offen ist, so ist ψ_0 eigentlich. Wenn insbesondere $\mathfrak{M}$ beiderseits offen ist, so sind $\psi_0: K \to G$ und $\varphi_0: K \to H$ eigentlich.*

Zusatz 5. *Wenn $n = 2$ und in A keine nichtuniformisierbaren Punkte liegen, so kann man für K eine komplexe Mannigfaltigkeit wählen.*

Beweis. Der Graph T ist analytisch in $G \times H$. Sei $(K, \chi) = (T^*, \chi)$ der zugehörige Überlagerungsraum. Seien $\tilde\psi: T \to G$ und $\tilde\varphi: T \to H$ die Projektionen $\tilde\psi(P, Q) = P$ und $\tilde\varphi(P, Q) = Q$. Es sind $\psi_0 = \tilde\psi\,\chi: K \to G$ und $\varphi_0 = \tilde\varphi\,\chi: K \to H$ holomorph. Durch $\tilde\tau(P) = (P, \tau(P))$ wird A umkehrbar holomorph auf T mit $\tilde\tau^{-1} = \tilde\psi \mid T$ abgebildet. Der Graph T der holomorphen Abbildung $\tau: A \to H$ ist lokalirreduzibel. Daher ist $\chi: \chi^{-1}(T) \to T$ holomorph umkehrbar. Durch $\xi = \chi^{-1} \mid T$ wird T holomorph auf die offene Teilmenge

[20]) Siehe Stoll [16], Satz 2.3.

$\chi^{-1}(T) = C$ von K abgebildet mit $\xi^{-1} = \chi \mid C$. Die Abbildung $\tau_1 = \xi\,\tilde{\tau} : A \to C$ ist holomorph umkehrbar. Die Umkehrung ist $\psi = \tilde{\tau}^{-1}\xi^{-1} = \tilde{\psi}\,\chi \mid C = \psi_0 \mid C$. Da $S = K - C = K - \chi^{-1}(T) = \chi^{-1}(\dot{T} - T)$ auf K dünn ist, wird durch $\mathfrak{M}'$ eine holomorphe Modifikation definiert. Ebenso wird durch $\mathfrak{M}''$ eine holomorphe Modifikation definiert, wenn man $v_1 = \xi\,\tilde{v} : A \to C$ und $\varphi = \tilde{v}^{-1}\xi^{-1} = \tilde{\varphi}\,\chi \mid C = \varphi_0 \mid C$ setzt.

Für $P \in A$ und $Q \in B$ gilt

$$\varphi\,\tau_1(P) = \tilde{\varphi}\,\chi\,\xi\,\tilde{\tau}(P) = \tilde{\varphi}(P, \tau(P)) \quad = \tau(P)$$
$$\psi\,v_1(Q) = \tilde{\psi}\,\chi\,\xi\,\tilde{v}(Q) = \tilde{\psi}(v(Q), Q) \quad = v(Q)\,.$$

Ist $P^\nu \in A$ eine konvergente Folge, deren Bildfolge $\tau(P^\nu)$ konvergiert, so konvergiert $\tilde{\tau}(P^\nu) = (P^\nu, \tau(P^\nu)) \to (P_0, Q_0) \in \dot{T}$ für $\nu \to \infty$. Da $\chi : K \to \dot{T}$ lokaleigentlich mit $\chi(K) = \dot{T}$ ist, gibt es eine konvergente Folge $\tilde{P}^{\nu\mu} \in K$ mit $\chi(\tilde{P}^{\nu\mu}) = \tilde{\tau}(P^{\nu\mu})$. Da $\tilde{\tau}(P^{\nu\mu}) \in T$ ist, folgt $\tilde{P}^{\nu\mu} = \chi^{-1}\tau(P^{\nu\mu}) = \tau_1(P^{\nu\mu})$. Die Folge $\tau_1(P^{\nu\mu}) = \tilde{P}^{\nu\mu}$ konvergiert. Der Satz und Zusatz 3 sind bewiesen.

Beweis zu Zusatz 1. Sei $Q^\nu \in B$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty}(v(Q^\nu), Q^\nu) = (P, Q)$. Dann konvergiert $\tau_1 v(Q^{\nu\mu}) = \tau_1\psi\,v_1(Q^{\nu\mu}) = v_1(Q^{\nu\mu})$ für eine geeignete Teilfolge $Q^{\nu\mu}$, w.z.b.w.

Beweis zu Zusatz 2. Sei $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$ für $P_0 \in M$. Eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$ existiert. Für eine Teilfolge $P^{\nu\mu}$ konvergiert $\tau_1(P^{\nu\mu}) \to R_0$ für $\mu \to \infty$. Es ist $\varphi_0\tau_1(P^{\nu\mu}) = \tau(P^{\nu\mu})$, also $\varphi_0(R_0) = Q_0$ und $P^{\nu\mu} = \psi_0\tau_1(P^{\nu\mu})$, also $P_0 = \psi_0(R_0)$, d. h., $Q_0 = \varphi_0(R_0) \in \varphi_0\psi_0^{-1}(P_0)$.

Sei $Q_0 \in \varphi_0\psi_0^{-1}(P_0)$ für $P_0 \in M$. Ein $R_0 \in K$ mit $\varphi_0(R_0) = Q_0$ und $\psi_0(R_0) = P_0$ existiert. Weil $P_0 \in M$ ist, gehört R_0 zu S; nun ist aber S dünn auf K, also gibt es eine Folge $R^\nu \in C$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} R^\nu = R_0$. Es ist $\psi(R^\nu) \in A$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty}\psi(R^\nu) = \psi(R_0) = P_0$. Es strebt $\tau\,\psi(R^\nu) = \varphi\,\tau_1\psi(R^\nu) = \varphi(R^\nu) \to \varphi_0(R_0) = Q_0$ für $\nu \to \infty$. Also ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$. Insgesamt folgt $\Sigma_\tau(P_0) = \varphi_0\,\psi_0^{-1}(P_0)$ für $P_0 \in M$. Ebenso beweist man $\Sigma_v(Q_0) = \psi_0^{-1}\,\varphi_0(Q_0)$ für $Q_0 \in N$.

Beweis zu Zusatz 4. Sei τ lückenlos. Sei $L \subseteq G$ kompakt und $R^\nu \in \psi_0^{-1}(L)$. Eine Folge $R^\nu_\mu \in C$ mit $\lim\limits_{\mu\to\infty} R^\nu_\mu = R^\nu$ existiert. Sei ϱ eine Metrik auf G und σ eine Metrik auf K. Da L kompakt ist, kann man eine — wieder mit R^ν bezeichnete — Teilfolge auswählen, für die $\psi_0(R^\nu) \to P_0$ für $\nu \to \infty$ strebt. Es ist $P_0 \in L$. Es strebt $\psi(R^\nu_\mu) \to \psi_0(R^\nu)$ für $\mu \to \infty$. Für eine Folge μ_ν ist

$$\varrho(\psi(R^\nu_{\mu_\nu}), \psi_0(R^\nu)) < \frac{1}{\nu} \text{ und } \sigma(R^\nu_{\mu_\nu}, R^\nu) < \frac{1}{\nu}\,.$$

Es ist

$$\varrho(\psi_0(R^\nu_{\mu_\nu}), P_0) \leq \frac{1}{\nu} + \varrho(\psi_0(R^\nu), P_0)\,.$$

Daher strebt $\psi_0(R^\nu_{\mu_\nu}) \to P_0$ für $\nu \to \infty$. Da $\psi_0(R^\nu_{\mu_\nu}) \in A$ ist, gibt es eine Teilfolge $\tilde{R}^{\nu\lambda} = R^{\nu\lambda}_{\mu_{\nu_\lambda}}$ mit $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\psi_0(\tilde{R}^{\nu\lambda}), \tau\,\psi_0(\tilde{R}^{\nu\lambda})) = (P_0, Q_0)$. Also konvergiert für eine mit $\tilde{\tilde{R}}_{\lambda_\varrho} = R^{\nu\lambda_\varrho}$ bezeichnete Teilfolge die Folge $\tau_1\,\psi(\tilde{\tilde{R}}_{\lambda_\varrho}) \to R_0$ für $\varrho \to \infty$.

Das heißt $\lim\limits_{\varrho\to\infty} \tilde{\tilde{R}}_{\lambda_\varrho} = R_0$. Aus

$$\sigma(R^{\nu_{\lambda_\varrho}}, R_0) \leq \sigma(R_0, \tilde{\tilde{R}}_{\lambda_\varrho}) + \frac{1}{\nu_{\lambda_\varrho}}$$

folgt $\lim\limits_{\varrho\to\infty} R^{\nu_{\lambda_\varrho}} = R_0$. Da $L' = \psi_0^{-1}(L)$ abgeschlossen und $R^{\nu_{\lambda_\varrho}} \in L'$ ist, folgt $R_0 \in L'$ und damit die Kompaktheit von L'. Daher ist ψ_0 eigentlich, w.z.b.w.

Beweis zu Zusatz 5. Sei $n = 2$. Seien $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ zunächst bestimmt wie in Zusatz 3 und ψ_0, φ_0 wie in Zusatz 2. Es ist K ein rein zweidimensionaler komplexer Raum. Da A keine nichtuniformisierbaren Punkte enthält, hat auch $C = \tau_1(A)$ keine nichtuniformisierbaren Punkte. Die Menge E der nichtuniformisierbaren Punkte ist vielmehr in S enthalten. Sie besteht nur aus isolierten Punkten. Nach Hirzebruch [8] gibt es eine beiderseits offene holomorphe Modifikation

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} K, & D, & E, & \lambda \\ K^*, & \tilde{C}, & \tilde{S}, & \sigma \end{pmatrix},$$

wobei K^* eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Die Abbildungen $\tau_1^* = \lambda\,\tau_1 : A \to C^*$ mit $C^* = \lambda(C) \subseteq K^*$ und $v_1^* = \lambda\, v_1 : B \to C^*$ sind umkehrbar holomorph mit $\psi^* = (\tau_1^*)^{-1} = \psi\,\sigma = \psi_0 \sigma_0 | C^*$, und $\varphi^* = (v_1^*)^{-1} = \varphi\,\sigma = \varphi_0\sigma_0 | C^*$, wobei $\sigma_0 : K^* \to K$ die analytische Fortsetzung von σ ist. In K^* ist $S^* = K - C^* = \sigma_0^{-1}(K - C) = \sigma_0^{-1}(S) = \lambda(S \cap D) \cup \tilde{S}$ dünn. Also werden durch

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, & A, & M, & \tau_1^* \\ K^*, & C^*, & S^*, & \psi^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}^{**} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, & B, & N, & v_1^* \\ K^*, & C^*, & S^*, & \varphi^* \end{pmatrix}$$

holomorphe Modifikationen definiert. Für $P \in A$ und $Q \in B$ gilt

$$\varphi^* \tau_1^*(P) = \varphi\,\sigma\,\lambda\,\tau_1(P) = \varphi\,\tau_1(P) = \tau(P)$$
$$\psi^* v_1^*(Q) = \psi\,\sigma\,\lambda\, v_1(Q) = \varphi\, v_1(Q) = v(Q)\,.$$

Ist $P^\nu \in A$ eine konvergente Folge, deren Bildfolge $\tau(P^\nu)$ konvergiert, so gibt es eine — wieder mit P^ν bezeichnete — Teilfolge, für die $\tau_1(P^\nu) \in C$ konvergiert. Ist $R_0 = \lim\limits_{\nu\to\infty} \tau_1(P^\nu) \in D$, so konvergiert $\tau^*(P^\nu) = \lambda\,\tau_1(P^\nu) \to \lambda(R_0)$ für $\nu \to \infty$. Ist $R_0 \in E$, so gibt es eine Teilfolge $\tau_1(P^{\nu_\mu})$, für die $\lambda\,\tau_1(P^{\nu_\mu}) = \tau^*(P^{\nu_\mu})$ konvergiert, da $\tilde{\mathfrak{M}}$ beiderseits offen ist. Zusatz 5 ist bewiesen.

Wie nun gezeigt werden soll, stimmen die beiden Meromorphiebegriffe für $n = 1, 2, 3$ überein.

Satz 8.2. *Sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine Modifikation. Sei S_R^τ die Menge der R-Singularitäten von τ und S_R^v die Menge der R-Singularitäten von v. Dann wird der Graph T von τ über A höchstens auf $S_R^\tau \times S_R^v$ singulär, speziell höchstens auf $M \times N$. Es ist $(\bar{T} - T) \subseteq M \times N$.*

Beweis. Sei (P_0, Q_0) eine singuläre Stelle von $\bar{T}$. Dann gehört P_0 zu S_R^τ nach Definition von S_R^τ. Es ist $\bar{T} = \overline{\{(v(Q), Q) \mid Q \in B\}}$ der Graph von v und (P_0, Q_0) singulärer Punkt von $\bar{T}$. Also ist $Q_0 \in S_R^v$ R-singuläre Stelle von v. Es ist $(P_0, Q_0) \in S_R^\tau \times S_R^v$. Ist $(P_0, Q_0) \in \bar{T} - T$, so ist $P_0 \in M$, weil T Graph von τ über A und $Q_0 \in N$, weil T Graph von v über B ist. Also ist $\bar{T} - T \subseteq M \times N$, w.z.b.w.

Satz 8.3. *Im Fall $n = 1$ ist jede Modifikation $\mathfrak{M}$ R-meromorph und jede beiderseits offene Modifikation trivial.*

Beweis. M und N sind analytisch und nulldimensional, also auch $M \times N$. Daher läßt sich die rein eindimensionale analytische Menge T, die höchstens auf $M \times N$ singulär wird, in $G \times H$ durch $\overline{T}$ analytisch fortsetzen. $\mathfrak{M}$ ist R-meromorph. Für jeden Punkt $P_0 \in M$ ist $\Sigma_\tau(P_0) \subseteq N$, besteht also höchstens aus isolierten Punkten, also höchstens aus einem Punkt. Ist $\mathfrak{M}^{-1}$ offen, also τ lückenlos, so ist $\Sigma_\tau(P_0) \neq \theta$ für jedes $P_0 \in M$, also besteht $\Sigma_\tau(P_0)$ aus genau einem Punkt. Die Abbildung τ ist zu einer holomorphen Abbildung $\tau_0 : G \to H$ fortsetzbar. Ist auch $\mathfrak{M}$ offen, so ist v zu einer holomorphen Abbildung $v_0 : H \to G$ fortsetzbar mit $\tau_0 v_0(Q) = Q$ für $Q \in H$ und $v_0 \tau_0(P) = P$ für $P \in G$. Daher ist τ_0 eine konforme Abbildung von G auf H, w.z.b.w.

Satz 8.4. *Im Falle $n = 2$ ist jede schwach meromorphe Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ R-meromorph. Ist P_0 eine singuläre Stelle der schwach meromorphen Abbildung τ, so ist $\Sigma_\tau(P_0)$ leer oder eine rein eindimensionale analytische Menge. Es ist v regulär auf $\Sigma_\tau(P_0)$, abgesehen von einer höchstens abzählbaren Menge D_{P_0}. Ist v_0 die Fortsetzung, so ist $v_0(Q) = P_0$ für $Q \in \Sigma_\tau(P_0) - D_{P_0}$. Ist S_0 die Menge der singulären Stellen von τ, die keine Lücken sind (d. h., $\Sigma_\tau(P_0) \neq \theta$), so ist S_0 höchstens abzählbar.*

Beweis. Weil $\Sigma_\tau(M) \subseteq N$ und N dünn von der Dimension 1 ist, ist τ R-meromorph gemäß Satz 7.7. Also ist $\overline{T}$ analytisch in $G \times H$. Es ist $\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0) = (\{P_0\} \times H) \cap \overline{T}$ analytisch, d. h. $\Sigma_\tau(P_0)$ analytisch. Ist $\Sigma_\tau(P_0) \neq \theta$, so besteht $\Sigma_\tau(P_0)$ entweder aus genau einem Punkt, dann ist τ in P_0 regulär, oder es enthält $\Sigma_\tau(P_0)$ mehr als einen Punkt; dann hat $\Sigma_\tau(P_0)$ in jedem Punkt von $\Sigma_\tau(P_0)$ eine Dimension größer als Null, ist dünn und analytisch, folglich ist $\Sigma_\tau(P_0)$ analytisch und rein eindimensional. Sei $\psi : \overline{T} \to G$ die natürliche Projektion. Die Fasern der Projektion sind $(\{P_0\} \times H) \cap \overline{T} = \{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0)$, d. h., der Rang der Abbildung ist kleiner als zwei in (P_0, Q_0), dann und nur dann, wenn P_0 singulärer Punkt von τ ist. Ist S die Menge der singulären Stellen von τ, so ist also $S_1 = \psi^{-1}(S)$ analytisch und rein eindimensional oder leer. Es ist $\psi(S_1) = \psi\psi^{-1}(S) = S_0$ die Menge der singulären Stellen von τ mit $\Sigma_\tau(P_0) \neq \theta$. Es ist $S_1 = \bigcup_{P_0 \in S_0} \{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0)$. Da $[\{P_0\} \times \Sigma_\tau(P_0)] \cap [\{P_1\} \times \Sigma_\tau(P_1)] = \theta$ für $P_0 \neq P_1$ ist, ist $P_0 \times \Sigma_\tau(P_0)$ Vereinigung von irreduzibeln Teilen von S_1 oder leer. Da S_1 hochstens abzählbar viele irreduzibele Teile hat, enthält S_0 höchstens abzählbar viele Punkte.

Für v gelten dieselben Aussagen wie für τ. Sind S_v die Menge der singulären Stellen von v und S_v^0 die Menge der singulären Stellen, die keine Lücken sind, so sei $D_{P_0} = \Sigma_\tau(P_0) \cap S_0^v$. Es ist D_{P_0} höchstens abzählbar. Ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0) - D_{P_0}$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in A$ mit $\lim_{\nu \to \infty} (P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$. Wegen $\tau(P^\nu) \in B$ und $v\tau(P^\nu) = P^\nu$ ist $P_0 \in \Sigma_v(Q_0)$, d. h. $\Sigma_v(Q_0) \neq \theta$. Also ist $Q_0 \notin S_v - S_v^0$ und $Q_0 \notin S_v^0$. Also ist v in Q_0 regulär. Für die Fortsetzung v_0 gilt:

$$v_0(Q_0) = \lim_{\nu \to \infty} v_0 \tau(P^\nu) = \lim_{\nu \to \infty} v\tau(P^\nu) = \lim_{\nu \to \infty} P^\nu = P_0,$$

w.z.b.w.

Aus Satz 3.7 folgt sofort:

Zusatz. *Ist* $\mathfrak{M}^{-1}$ *offen, also* τ *lückenlos, so ist* $S = S_0$. *Es ist* S *analytisch und höchstens nulldimensional, besteht also höchstens aus isolierten Punkten.*

Der Satz 8.4 mit Zusatz ist eine Verallgemeinerung des „Hauptsatzes über meromorphe Modifikationen", wie er von STOLL [18] bewiesen wurde. Aus Satz 8.1 mit Zusatz 5 und dem Satz von HOPF (STOLL [19], Satz 11.1 und STOLL [20], Satz 14.1 und Satz 14.2 und HOPF [10]) folgt dann unmittelbar, daß man jede schwach meromorphe, insbesondere jede beiderseits meromorphe Modifikation zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten durch σ-Prozesse und Umkehrungen von σ-Prozessen „auflösen" kann. Somit haben sich die wesentlichen Resultate von STOLL [18, 19 und 20] wieder ergeben, und zwar in einer etwas allgemeineren Form, nämlich:

1. *Die Mengen* M *sind hier in einem etwas allgemeineren Sinne dünn.*
2. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *braucht nicht beiderseits offen zu sein.*
3. *Die Menge* $\Sigma_\tau(P_0)$ *ist als analytisch nachgewiesen.*

Andererseits gelten die hiesigen Ergebnisse nur für komplexe Räume, bzw. Mannigfaltigkeiten mit einer abzählbaren Basis der offenen Mengen.

Genauso wie Satz 8.4 beweist man

Satz 8.5. *Wenn* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *eine schwach meromorphe Modifikation und* N *dünn von der Dimension 1 ist, so ist* $\mathfrak{M}$ *R-meromorph.*

Satz 8.6. *Im Falle* $n = 3$ *ist eine beiderseits meromorphe Modifikation R-meromorph.*

Beweis. Sei S^τ die Menge der Singularitäten von τ und S^v die Menge der Singularitäten von v. Sei T der Graph von τ. In $G \times H - S^\tau \times S^v$ ist $\bar{T} - - S^\tau \times S^v$ analytisch und frei von der Menge $S^\tau \times S^v$, die in $G \times H$ dünn von der Dimension 4 und fastdünn von der Dimension 2 ist, wie sofort aus Satz 3.6 folgt. Nach Hilfssatz 6.8 ist $\bar{T}$ analytisch in $G \times H$, w.z.b.w.

Sei $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ eine Modifikation. Seien G und H zusammenhängend. Seien $K(G)$ der Körper der meromorphen Funktionen auf G und $K(H)$ der Körper der meromorphen Funktionen auf H. Da $\tau(A) = B$ nicht in der Menge der Pol- und Unbestimmtheitsstellen irgendeiner Funktion $f \in K(H)$ enthalten ist, wird durch $\tilde{\tau}(f) = f\tau$ eine meromorphe Funktion auf A definiert. Sei $K'_\tau(H)$ die Teilmenge der $f \in K(H)$, für die sich $\tilde{\tau}(f)$ zu einer in G meromorphen Funktion $\tau^*(f)$ fortsetzen läßt. Ist $\tau^*(f) \equiv 0$, so ist $f\tau \equiv 0$ auf A, d. h. $f \equiv 0$ auf B, d. h. $f \equiv 0$ auf H. Daher ist $K'_\tau(H)$ ein Körper und $\tau^*: K'_\tau(H) \approx> K(G)$ ein Körperisomorphismus in $K(G)$.

Ist $f \in K'_\tau(H)$, so gilt $\tau^*(f) = f\tau$ auf G, abgesehen von einer dünnen Menge (nämlich M und der Menge der Pol- und Unbestimmtheitsstellen von $\tau^*(f)$). Es ist $\tau^*(f)\,v = f\tau v = f$, abgesehen von einer dünnen analytischen Menge auf B, wobei f die Funktion $\tau^*(f)v$ meromorph in H fortsetzt. Daher ist $\tau^*(f) \in K'_v(G)$. Das heißt, es ist $\tau^*(K'_\tau(H)) \subseteq K'_v(G)$. Ist $f \in K'_v(G)$, so ist $v^*(f) \in K'_\tau(G)$ und $f = \tau^* v^*(f) \in \tau^*(K'_\tau(H))$. Daher ist $\tau^*: K'_\tau(H) \approx K'_v(G)$ ein Isomorphismus auf $K'_v(G)$.

Der Satz 4.5 ergibt nun:

Satz 8.7. *Sei $\mathfrak{M}$ eine Modifikation zwischen M-vollständigen, zusammenhängenden komplexen Räumen G und H, die beiderseits lückenfrei ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist meromorph.*
2. *Die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ ist meromorph.*
3. *Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist R-meromorph.*
4. *Die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ ist R-meromorph.*
5. *$K'_\tau(H) = K(H)$, d. h. $\mathfrak{M}$ definiert einen Isomorphismus von $K(H)$ in $K(G)$.*
6. *$K'_\tau(G) = K(G)$, d. h. $\mathfrak{M}$ definiert einen Isomorphismus von $K(G)$ in $K(H)$.*
7. *$K'_\tau(H) = K(H)$ und $K'_\tau(G) = K(G)$, d. h. $\tau^* : K(H) \approx K(G)$ ist ein Isomorphismus des Körpers der meromorphen Funktionen auf H auf den Körper der meromorphen Funktionen auf G.*

Beweis. Aus 1 folgt 3 nach Satz 4.5. Aus 3 folgt trivialerweise 4. Aus 4 folgt 2, weil τ lückenfrei ist. Aus 2 folgt 1 wegen $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}^{-1})^{-1}$. Aus 1 folgt 5 und aus 5 folgt 1 gemäß Satz 4.5. Aus 2 folgt 6 und aus 6 folgt 2 gemäß Satz 4.5. Aus 5 folgt 1, aus 1 folgt 2, aus 2 folgt 6, aus 5 und 6 folgt 7 und aus 7 folgt 5 und 6. Also sind alle Aussagen äquivalent, w.z.b.w.

Eine beiderseits lückenfreie Modifikation zwischen M-vollständigen, zusammenhängenden komplexen Räumen ist also dann und nur dann (beiderseits) meromorph (R-meromorph), wenn die Modifikation einen Isomorphismus der Körper der meromorphen Funktionen bewirkt.

Eine lückenlose Abbildung braucht nicht lückenfrei zu sein, wie jetzt in einem Beispiel angegeben werden soll[21]). Seien

$$G = G_0 = C^2 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < \infty, |z_2| < \infty\}\,,$$
$$M = R_0 = \{(z_1, z_2) \mid z_2 = 0\}\,, \qquad A = G - M\,,$$
$$P_0 = (0, 0)\,, \quad M_0 = \{P_0\}\,, \qquad A_0 = G - M_0\,.$$

Im Ursprung P_0 werde ein σ-Prozeß ausgeführt, d. h. eine holomorphe beiderseits offene Modifikation

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G_0, & A_0, & M_0, & \sigma_1 \\ G_1 & B_1, & N_1, & v_1 \end{pmatrix},$$

die durch die Forderung, daß G_1 eine komplexe Mannigfaltigkeit und N_1 eine eindimensionale, kompakte, zusammenhängende, komplexe Teilmannigfaltigkeit ist, bis auf analytische Äquivalenz eindeutig bestimmt[22]) ist. Es ist $\sigma_1(R_0) = R_1$ und $R_1 \cap N_1 = \{P_1\} = M_1$. Ein Atlas $\mathfrak{U}_1 = \{U_{11}, U_{12}\}$ auf G_1 existiert mit in $U_{1\mu}$ lokalen Koordinaten $x_{1\mu}, y_{1\mu}$, so daß die analytische Fortsetzung v_1^* von v_1 durch

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_{11} \\ z_2 &= x_{11} y_{11} \end{aligned}\right\} \text{ auf } U_{11} \text{ und } \left.\begin{aligned} z_1 &= x_{12} y_{12} \\ z_2 &= x_{12} \end{aligned}\right\} \text{ auf } U_{12}$$

[21]) Dieses Beispiel wurde zu einem anderen Zweck zuerst von H. HOPF [10], S. 145 angegeben.

[22]) Siehe HOPF [10] und STOLL [19].

gegeben wird. Auf $U_{11} \cap U_{12}$ ist $y_{11} \neq 0$ und $y_{12} \neq 0$. Es ist

$$N_1 \cap U_{1\nu} = \{(x_{1\nu}, y_{1\nu}) \mid x_{1\nu} = 0\}$$
$$R_1 = R_1 \cap U_{11} = \{(x_{11}, y_{11}) \mid y_{11} = 0\}$$
$$A_1 = G_1 - M_1 \qquad P_1 : x_{11} = y_{11} = 0 .$$

Übt man nun in P_1 wieder einen σ-Prozeß aus, so erhält man durch induktive Konstruktion eine Folge von σ-Prozessen:

$$\mathfrak{S}_\nu = \mathfrak{M}_\nu \begin{pmatrix} G_{\nu-1}, & A_{\nu-1}, & M_{\nu-1}, & \sigma_\nu \\ G_\nu, & B_\nu, & N_\nu, & v_\nu \end{pmatrix} \qquad (v = 1, 2, \ldots)$$

und eine Menge von rein eindimensionalen irreduzibeln analytischen Mengen R_ν, N_ν^μ $(\mu = 1, \ldots, \nu - 1)$ so, daß gilt

a) Auf G_ν existiert ein Atlas $\mathfrak{U}_\nu = \{U_{\nu 1}, \ldots, U_{\nu,\nu+1}\}$ mit lokalen Koordinaten $x_{\nu,\mu}$, $y_{\nu,\mu}$ auf $U_{\nu\mu}$, so daß die holomorphe Fortsetzung v_ν^* von v_ν auf G_ν durch

$$\left.\begin{aligned} x_{\nu-1,1} &= x_{\nu,1} \\ y_{\nu-1,1} &= x_{\nu,1} y_{\nu,1} \end{aligned}\right\} \text{ auf } U_{\nu,1}$$
$$\left.\begin{aligned} x_{\nu-1,1} &= x_{\nu,2} y_{\nu,2} \\ y_{\nu-1,1} &= x_{\nu,2} \end{aligned}\right\} \text{ auf } U_{\nu,2}$$
$$\left.\begin{aligned} x_{\nu-1,\mu} &= x_{\nu,\mu+1} \\ y_{\nu-1,\mu} &= y_{\nu,\mu+1} \end{aligned}\right\} \text{ auf } U_{\nu\mu} \qquad \text{für } \mu = 3, \ldots, \nu + 1$$

gegeben wird, wobei $y_{\nu 1} \neq 0$ und $y_{\nu 2} \neq 0$ auf $U_{\nu 1} \cap U_{\nu 2}$ sind. Es ist

$$N_\nu \cap U_{\nu\mu} = \{(x_{\nu\mu}, y_{\nu\mu}) \mid x_{\nu\mu} = 0\} \quad \text{für } \mu = 1, 2,$$
$$N_\nu \cap U_{\nu\mu} = \emptyset \qquad \text{für } \mu = 3, \ldots, \nu + 1 .$$

b) Es ist

$$R_\nu = R_\nu \cap U_{\nu,1} = \{(x_{\nu,1}, y_{\nu,1}) \mid y_{\nu,1} = 0\}$$
$$v_\nu(R_\nu) = R_{\nu-1}$$
$$\{P_\nu\} = M_\nu = R_\nu \cap N_\nu \text{ mit } P_\nu : x_{\nu,1} = y_{\nu,1} = 0 .$$

c) Es ist

$$G_\nu - \sigma_\nu \ldots \sigma_1(A_0) = \tilde{N}_\nu = N_\nu \cup \bigcup_{\mu=1}^{\nu-1} N_\nu^\mu ,$$

wobei N_ν und N_ν^μ kompakt und die irreduzibeln Teile von $\tilde{N}_\nu$ sind. Für $\mu = 1, \ldots, \nu - 1$ ist $N_\nu^\mu = \sigma_\nu \sigma_{\nu-1} \ldots \sigma_{\mu+2} \overline{\sigma_{\mu+1}(N_\mu \cap A_\mu)}$ kompakt.

d) Es gilt $G_\nu - \sigma_\nu \ldots \sigma_1(A) = R_\nu \cup \tilde{N}_\nu$, wobei R_ν irreduzibeler Teil von $\tilde{N}_\nu \cup R_\nu$ ist.

Die Mannigfaltigkeiten A_ν sollen nun entlang den offenen Teilmengen

$$A_{\mu\nu} = \begin{cases} A_\nu & \text{für } \nu \leq \mu \\ \sigma_\nu \ldots \sigma_{\mu+1}(A_\mu) & \text{für } \nu > \mu \end{cases}$$

vermöge der Abbildungen

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{cases} \sigma_\mu \ldots \sigma_{\nu+1} & \text{für} \quad \nu < \mu \\ \text{Identität} & \text{für} \quad \nu = \mu \\ v_{\mu+1} \ldots v_\nu & \text{für} \quad \nu > \mu \end{cases}$$

identifiziert werden. Durch $\gamma_{\mu\nu}$ wird $A_{\mu\nu} \subseteq A_\nu$ umkehrbar holomorph auf $A_{\nu\mu}$ abgebildet. Die Voraussetzungen des Identifizierungssatzes lassen sich leicht nachprüfen[23]). Also gibt es eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H und umkehrbar holomorphe Abbildungen α_ν von A_ν auf die offene Teilmenge H_ν von H so, daß gilt

1. $H = \bigcup\limits_{\nu=0}^{\infty} H_\nu$,
2. $H_\nu \cap H_\mu = \alpha_\nu(A_{\mu\nu}) = \alpha_\mu(A_{\nu\mu})$,
3. Für $Q \in A_{\mu\nu}$ gilt $\alpha_\mu^{-1}\alpha_\nu(Q) = \gamma_{\mu\nu}(Q)$.

Sei nun $\tau = \alpha_0 | A$ und $B = \tau(A)$ und $N = H - B$ und $v = \tau^{-1}$. Es ist

$$N \cap H_\nu = \alpha_\nu(A_\nu) - \alpha_\nu(\sigma_\nu \ldots \sigma_1(A)) = \alpha_\nu(A_\nu \cap (R_\nu \cup \tilde{N}_\nu))$$
$$= \alpha_\nu(A_\nu \cap R_\nu) \cup \alpha_\nu(A_\nu \cap N_\nu) \cup \bigcup_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha_\nu(N_\nu^\mu).$$

Daher ist $N \cap H_\nu$ analytisch und rein eindimensional und hat die irreduzibeln Teile $\alpha_\nu(A_\nu \cap R_\nu)$, $\alpha_\nu(A_\nu \cap N_\nu)$, $\alpha_\nu(N_\nu^\mu)$. Daher ist N analytisch und rein eindimensional. Da $\alpha_\nu(N_\nu^\mu) \subseteq H_\nu$ kompakt sind, ist jedes $\alpha_\nu(N_\nu^\mu)$ ein irreduzibeler Teil von N.

1. *Die irreduzibeln Teile* $\hat{N}_\nu = \alpha_\nu(N_\nu^{\nu-1})$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ *sind alle verschieden*: Für $\mu > \nu$ gilt nämlich

$$\hat{N}_\mu \cap \hat{N}_\nu = \alpha_\mu(N_\mu^{\mu-1}) \cap \alpha_\mu \sigma_\mu \ldots \sigma_{\nu+1}(N_\nu^{\nu-1}) = \alpha_\mu(N_\mu^{\mu-1} \cap N_\mu^{\nu-1}).$$

Da $N_\mu^{\mu-1}$ und $N_\mu^{\nu-1}$ verschieden kompakte irreduzibele analytische Mengen der Dimension 1 sind, besteht $N_\mu^{\mu-1} \cap N_\mu^{\nu-1}$ für $\mu \neq \nu$ höchstens aus endlich vielen Punkten, also sind $\hat{N}_\mu$ und $\hat{N}_\nu$ verschieden für $\mu \neq \nu$.

2. *Es ist* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_2\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *eine holomorphe Modifikation.* Offensichtlich ist $\mathfrak{M}$ eine Modifikation. Die Abbildung $v_\nu\colon B_\nu \to A_{\nu-1}$ läßt sich holomorph zu $v_\nu^*\colon G_\nu \to G_{\nu-1}$ fortsetzen. Also wird $v_1 \ldots v_\nu\colon A_{0\nu} \to A_0$ durch $v_1^* v_2^* \ldots v_\nu^*\colon G_\nu \to G$ holomorph fortgesetzt. Auf H_ν ist $v_1^* \ldots v_\nu^* \alpha_\nu^{-1}\colon H_\nu \to A_0$ holomorph. Auf $H_0 \cap H_\nu$ ist $\alpha_0^{-1} = \gamma_{0\nu}\alpha_\nu^{-1} = v_1 \ldots v_\nu \alpha_\nu^{-1} = v_1^* \ldots v_\nu^* \alpha_\nu^{-1}$. Weil $H_\nu - H_0$ dünn ist, wird α_0^{-1} auf $H_\nu - H_0$ regulär und läßt sich eindeutig in H_ν fortsetzen. Also ist $v = \alpha_0^{-1} | B$ auf $H_\nu - B$ regulär, d. h., v läßt sich holomorph zu $v^*\colon H \to G_0$ fortsetzen, wobei

$$v(Q) = v_1^* \ldots v_\nu^* \alpha_\nu^{-1}(Q) \qquad \text{für } Q \in H_\nu$$

gilt. Die Modifikation ist holomorph.

[23]) Siehe z. B. Stoll [19], Satz 10.1.

3. *Es ist* $(v^*)^{-1}(P_0) = \Sigma_\tau(P_0) = \bigcup_{\nu=2}^{\infty} \hat{N}_\nu$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} v^*(\hat{N}_\nu) &= v_1^* \dots v_\nu^* \, \alpha_\nu^{-1} \alpha_\nu (N_\nu^{\nu-1}) \quad = v_1^* \dots v_\nu^* \, \overline{\sigma_\nu (N_{\nu-1} \cap A_{\nu-1})} \\ &= v_1^* \dots v_{\nu-1}^* (N_{\nu-1} \cap A_{\nu-1}) = v_1^* \dots v_{\nu-2}^* (\{P_{\nu-2}\}) = \{P_0\}, \end{aligned}$$

d. h., $\bigcup_{\nu=2}^{\infty} N_\nu \subseteq (v^*)^{-1}(P_0)$. Sei $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$. Eine Folge $P_\nu \in A$ mit $\lim_{\nu\to\infty}(P^\nu, \tau(P^\nu)) = (P_0, Q_0)$ existiert. Sei λ die kleinste ganze Zahl mit $Q_0 \in H_\lambda$. Es ist $Q_0 = \alpha_\lambda(\tilde{P})$ mit $\tilde{P} \in A_\lambda$. Es strebt

$$\begin{aligned} &\alpha_\lambda \sigma_\lambda \dots \sigma_1(P^\nu) = \alpha_0(P^\nu) \to \alpha_\lambda(\tilde{P}) && \text{für} \quad \nu \to \infty, \quad \text{d. h.} \\ &\sigma_\lambda \dots \sigma_1(P^\nu) \to \tilde{P} && \text{für} \quad \nu \to \infty, \quad \text{d. h.} \\ &\sigma_{\lambda-1} \dots \sigma_1(P^\nu) \to v_\lambda^*(\tilde{P}) && \text{für} \quad \nu \to \infty. \end{aligned}$$

Wäre $v_\lambda^*(P) \in A_{\lambda-1}$, so wäre $\alpha_{\lambda-1} v_\lambda^*(\tilde{P}) = \alpha_\lambda(\tilde{P}) = Q_0$, d. h., $Q_0 \in H_{\lambda-1}$, was falsch ist. Also ist $v_\lambda^*(\tilde{P}) = P_\lambda$, d. h., $\tilde{P} \in (v_\lambda^*)^{-1}(P_\lambda) \in N_\lambda$ und $\sigma_{\lambda+1}(\tilde{P}) \in \sigma_{\lambda+1}(N_\lambda \cap A_\lambda) \subseteq N_{\lambda+1}^*$, d. h.

$$Q_0 = \alpha_\lambda(\tilde{P}) \in \alpha_{\lambda+1}\sigma_{\lambda+1}(N_\lambda \cap A_\lambda) \subseteq \alpha_{\lambda+1}(N_{\lambda+1}^\lambda) = \hat{N}_\lambda .$$

Daraus folgt $\bigcup_{\lambda=2}^{\infty} \hat{N}_\lambda = \bigcup_{\lambda=2}^{\infty} \alpha_\lambda(N_\lambda^{\lambda-1}) \supseteq \Sigma_\tau(P_0)$. Ist $v^*(Q_0) = P_0$, so gibt es eine Folge $Q^\nu \in B$ mit $\lim_{\nu\to\infty} Q^\nu = Q_0$. Es ist $v(Q^\nu) \in A$ und $\lim_{\nu\to\infty}(v(Q^\nu), \tau\, v(Q^\nu)) = (v^*(Q_0), Q_0) = (P_0, Q_0)$. Daher ist $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$. Insgesamt folgt

$$(v^*)^{-1}(P_0) = \bigcup_{\nu=2}^{\infty} \hat{N}_\nu = \Sigma_\tau(P_0) .$$

4. *Die Abbildung* $\tau: A \to H$ *ist lückenfrei und sogar meromorph.* Denn sei L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit mit $L \cap M = \bar{L} \cap M = \{P_0\}$. Sei ν eine Nummer, für die $\sigma_\nu \sigma_{\nu-1} \dots \sigma_1(P) \to P_\nu$ für $P \to P_0$ mit $P \in L \cap A$ strebt. Dann ist $Q = \sigma_\nu \dots \sigma_1(P) \in U_{\nu 1}$, wenn P genügend nahe bei P_0 ist. Seien $x_{\nu 1}, y_{\nu 1}$ die Koordinaten von Q und z_1, z_2 die von P. Es ist $z_2 \neq 0$. Man hat

$$z_1 = x_{\nu 1}, \; z_2 = x_{\nu 1}^\nu \, y_{\nu 1}, \; \text{d. h.} \; x_{\nu 1} = z_1, \; y_{\nu 1} = \frac{z_2}{z_1^\nu} .$$

Sei $z_1 \not\equiv 0$ auf L. Dann ist

$$z_1 = t^p g_1(t) \,, \; z_2 = t^q g_2(t) \quad \text{für } |t| < \delta$$

mit $p \geqq 1$ und $q \geqq 1$ eine Parameterdarstellung von L in einer Umgebung des Nullpunktes, wobei $g_\nu(t)$ in $|t| < \delta$ holomorph mit $g_\nu(0) \neq 0$ ist. Es streben

$$\begin{aligned} t^p g_1(t) &= x_{\nu 1} \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0 \\ t^{q-\nu p} \frac{g_2(t)}{g_1^\nu(t)} &= y_{\nu 1} \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0 . \end{aligned}$$

Also ist $q - \nu p > 0$, d. h., $\nu < \frac{q}{p}$. Ist $z_1 \equiv 0$ auf L, so strebt $\sigma_1(P) \to P_1' \neq P_1$ für $P \to P_0$ mit $P \in L \cap A$. Also gibt es eine Nummer ν so, daß $\sigma_\nu \dots \sigma_1(P)$

nicht gegen P_ν für $P \to P_0$ mit $P \in L \cap A$ konvergiert. Da aber $\sigma_\nu \ldots \sigma_1$ meromorph ist, strebt $\sigma_\nu \ldots \sigma_1(P) \to \tilde{P}$ für $P \to P_0$ mit $P \in L \cap A$, wobei $\tilde{P} \in A_\nu$ ist. Es folgt

$$\tau(P) = \alpha_0(P) = \alpha_\nu \sigma_\nu \ldots \sigma_1(P) \to \alpha_\nu(\tilde{P}) \text{ für } P \to P_0 \text{ mit } P \in L \cap A .$$

Die Abbildung τ ist lückenfrei in P_0.

Ist L eine eindimensionale komplexe Teilmannigfaltigkeit von G mit $L \cap M = \tilde{L} \cap M = \{\hat{P}\}$ und $\hat{P} \neq P_0$, so strebt

$$\tau(P) = \alpha_1 \sigma_1(P) \to \alpha_1 \sigma_1(\hat{P}) \qquad \text{für } P \to P_0 \text{ mit } P \in L \cap A .$$

Die Abbildung τ ist lückenfrei und sogar meromorph. Da ihr Graph analytisch ist, ist sie auch R-meromorph.

5. *Die Abbildung $\tau : A \to H$ ist (in P_0) nicht lückenlos*; denn $\Sigma_\tau(P_0)$ ist analytisch, rein eindimensional und hat unendlich viele irreduzible Teile, ist also nicht kompakt[24]).

Damit ist ein Beispiel einer lückenfreien, ja sogar meromorphen und R-meromorphen Abbildung gegeben, die nicht lückenlos, also auch nicht SR-meromorph ist. Diese Abbildung definiert sogar eine holomorphe Modifikation $\mathfrak{M}$. Die Bildmannigfaltigkeit läßt sich nicht so erweitern, daß τ meromorph bleibt, aber lückenlos wird, da $\Sigma_\tau(P_0)$ analytisch ist und bereits abzählbar viele kompakte irreduzibele Teile hat.

Literatur

[1] AEPPLI, A.: Modifikationen von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helv. **31**, 219—301 (1956). — [2] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Bereiche. Math. Ann. **124**, 1—16 (1950). — [3] CARTAN, H.: Séminaire Èc. norm. sup. Paris 1951/52 (hektographiert). — [4] GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233—259 (1955). — [5] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **129**, 274—296 (1955). — [6] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Z. **67**, 103—128 (1957). — [7] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245—318 (1958). — [8] HIRZEBRUCH, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **126**, 1—22 (1953). — [9] HOPF, H.: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat. appl. Ser. V, **10**, 169—182 (1951). — [10] HOPF, H.: Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten. Comm. Math. Helv. **29**, 132—155 (1955).— [11] REMMERT, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. **130**, 410—441 (1956). — [12] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957). — [13] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [14] ROTHSTEIN, W.: Der Satz von CASORATI-WEIERSTRASS und ein Satz von THULLEN. Arch. Math. **5**, 338—343 (1954). — [15] STOLL, W.: Einige Bemerkungen zur Fortsetzbarkeit

[24]) Wie man leicht sieht, hat z. B. die Folge $\tau(P^\nu)$ mit

$$P^\nu = \left(\frac{1}{\nu}, e^{-\nu}\right) \in A$$

keinen Häufungspunkt in H. In jedem Punkt $P_1 = (z_1, 0)$ mit $z_1 \neq 0$ ist τ regulär.

analytischer Mengen. Math. Z. **60**, 287—304 (1954). — [16] STOLL, W.: Über meromorphe Modifikationen. I. Allgemeine Eigenschaften der Modifikationen. Math. Z. **61**, 206—234 (1954). — [17] STOLL, W.: Über meromorphe Modifikationen. II. Allgemeine Eigenschaften meromorpher Modifikationen. Math. Z. **61**, 467—488 (1955). — [18] STOLL, W.: Über meromorphe Modifikationen. III. Streueigenschaften analytischer und meromorpher Modifikationen. Math. Z. **62**, 189—210 (1955). — [19] STOLL, W.: Über meromorphe Modifikationen. IV. Die Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten durch σ-Prozesse. Math. Ann. **130**, 147—182 (1955). — [20] STOLL, W.: Über meromorphe Modifikationen. V. Die Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse. Math. Ann. **130**, 272—316 (1955). — [21] STOLL, W.: Über die Fortsetzbarkeit analytischer Mengen endlichen Oberflächeninhaltes. Arch. Math. **9**, 167—175 (1957). — [22] THIMM, W.: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen I. Über die Änderung der Monodromiegruppe parameterabhängiger analytischer Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **125**, 145—164 (1952). — [23] THIMM, W.: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen II. Math. Ann. **125**, 264—283 (1953). — [24] THIMM, W.: Über die Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung. Math. Z. **57**, 456—480 (1953). — [25] THIMM, W.: Untersuchungen über ausgeartete meromorphe Abbildungen. Math. Ann. **127**, 150—161 (1954). — [26] THIMM, W.: Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **128**, 1—48 (1954). — [27] THIMM, W.: Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen. Math. Z. **60**, 435—457 (1954). — [28] THIMM, W.: Die Struktur der Menge der singulären Bildpunkte einer meromorphen Abbildung. Math. Ann. **134**, 143—153 (1957).

(Eingegangen am 5. Mai 1958)

HAHN, W.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 430—441 (1958)

Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen

Von
WOLFGANG HAHN in Braunschweig

HEINRICH BEHNKE zum 60. Geburtstag gewidmet

1.

In der nachstehenden Arbeit untersuche ich die Stabilität der Lösungen von Differenzengleichungen mit Hilfe einer Modifikation der sog. zweiten oder direkten Methode von LJAPUNOV. Ich beweise zunächst einige allgemeine Sätze der Methode in der für Gleichungen vom Typ

$$(1.1) \qquad \mathfrak{x}(t+1) = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t) \qquad (t = t_0, t_0 + 1, \ldots)$$

gültigen Form, da eine unmittelbare Anwendung der auf Differentialgleichungen bezüglichen Sätze von LJAPUNOV und ČETAEV[1]) nicht möglich ist. Sodann zeige ich, wie man für die lineare Differenzengleichung

$$(1.2) \qquad \mathfrak{x}(t+1) = A(t)\, \mathfrak{x}(t) \text{ bzw. } \mathfrak{x}(t+1) = A\, \mathfrak{x}(t)$$

„Ljapunovsche Funktionen" konstruieren kann. Eine wesentliche (wenn auch nur hinreichende) Voraussetzung ist dabei die sog. „exponentielle Stabilität" der trivialen Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$, d. h. die Voraussetzung, daß bei hinreichend kleinen Anfangswerten die allgemeine Lösung einer Abschätzung

$$(1.3) \qquad |\mathfrak{x}(t_0 + k)| \leqq a\, e^{-\alpha k} |\mathfrak{x}(t_0)| \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

genügt, wobei $a > 0$ und $\alpha > 0$ passende, von t_0 unabhängige Konstanten sind. Im Instabilitätsfall hat man entsprechend die „totale exponentielle Instabilität" zu fordern: bei hinreichend kleinen Anfangswerten gilt mit $b > 0$, $\gamma > 0$

$$(1.4) \qquad |\mathfrak{x}(t_0 + k)| \geqq b\, e^{\gamma k} |\mathfrak{x}(t_0)| \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Die Bedingungen (1.3) und (1.4) sind zugleich hinreichend für Stabilität bzw. Instabilität „nach der ersten Näherung", also dafür, daß die nichtlineare Gleichung

$$(1.5) \qquad \mathfrak{x}(t+1) = A(t)\, \mathfrak{x}(t) + \mathfrak{g}(\mathfrak{x}, t)$$

bei hinreichend kleinen Störgliedern $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}, t)$ das gleiche Stabilitätsverhalten zeigt wie die lineare Gleichung (1.2). Zu den sehr wenigen einschlägigen Veröffentlichungen gehören eine vor längerer Zeit erschienene Arbeit von PERRON [5] sowie eine von ihm angeregte Dissertation [7], in denen das Stabilitätsproblem durch direktes Studium der Lösungen behandelt wird. In der

[1]) Vgl. z. B. [3].

Arbeit [7] wird die folgende hinreichende Bedingung für Stabilität nach der ersten Näherung bewiesen: Jede Gleichung der Form

$$\mathfrak{x}(t+1) = A(t)\,\mathfrak{x}(t) + \mathfrak{g}(t) \tag{1.6}$$

darf bei beliebigem beschränktem $\mathfrak{g}(t)$ nur beschränkte Lösungen haben. Dies Kriterium sieht ganz anders als das oben genannte aus; ich zeige aber, daß es dem der „exponentiellen Stabilität" äquivalent ist.

Am Schluß der Arbeit finden sich zwei kleine Anwendungen der Theorie auf lineare Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten und auf die Stabilität des Differenzenverfahrens zur Lösung von Differentialgleichungen.

2.

In den folgenden Differenzengleichungen (Dzgl.n) ist die unabhängige Variable t auf ganzzahlig fortschreitende Werte $t = t_0, t_0 + 1, \ldots$ beschränkt. Der „Anfangspunkt" t_0 ist ebenfalls als ganzzahlig variabler Parameter anzusehen, dessen Werte jeweils in einer festen Zahlenfolge

$$t^*, t^* + 1\,,\ t^* + 2, \ldots \tag{2.1}$$

enthalten sind. Der Übergang von t zu $t+1$ im Argument wird durch den Operator Θ bezeichnet. Kleine Frakturbuchstaben bedeuten n-reihige Spaltenvektoren; $f(\mathfrak{x})$ steht für $f(x_1, \ldots, x_n)$; $\mathfrak{x}^T$ ist der gestürzte Vektor.

Eine skalare Funktion $v(\mathfrak{x}, t)$ heißt *positiv definit*, wenn $v(\mathfrak{o}, t) = 0$ für $t \geqq t^*$ ist und wenn eine stetige, monoton wachsende Funktion $\varphi(r)$ der reellen Veränderlichen r so angegeben werden kann, daß $\varphi(0) = 0$ und in einem Bereich

$$\mathfrak{B}_{h,t^*}: |\mathfrak{x}| \leqq h;\quad t = t^*,\ t^* + 1, \ldots \tag{2.2}$$

stets

$$v(\mathfrak{x}, t) \geqq \varphi(|\mathfrak{x}|) \tag{2.3}$$

gilt. Wenn eine Funktion $\psi(r)$ mit den gleichen Eigenschaften wie $\varphi(r)$ so existiert, daß in (2.2)

$$v(\mathfrak{x}, t) \leqq \psi(|\mathfrak{x}|) \tag{2.4}$$

ist, soll $v(\mathfrak{x}, t)$ *dekreszent* heißen. (In der Ljapunovschen Theorie wird hierfür die etwas umständliche Bezeichnung „v läßt eine unendlich kleine obere Grenze zu" benutzt.)

Von den später auftretenden Funktionen v, w usw. soll bei festem t Stetigkeit hinsichtlich der x_i in (2.2) vorausgesetzt sein.

3.

Die rechte Seite der Dzgl.

$$\Theta\,\mathfrak{x} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t) \tag{3.1}$$

sei für die Argumente aus einem Bereich (2.2) erklärt, beschränkt und bezüglich der x_i stetig; ferner sei beständig $\mathfrak{f}(\mathfrak{o}, t) = \mathfrak{o}$, so daß (3.1) die *triviale*

Lösung (tr. L.) $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$ zuläßt. Diejenige Lösung von (3.1), die für $t = t_0$ den (vektoriellen) *Anfangswert* $\mathfrak{q}$ annimmt, sei mit

$$\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0) \tag{3.2}$$

bezeichnet. Es ist also

$$\mathfrak{p}(t_0, \mathfrak{q}, t_0) = \mathfrak{q}\,. \tag{3.3}$$

Man nennt die tr. L. ebenso wie bei Differentialgleichungen *stabil*, wenn (3.2) bei hinreichend kleinem $\mathfrak{q}$ nach Vorgabe klein bleibt. Im Gegensatz zu den bei Differentialgleichungen bestehenden Verhältnissen hängt aber die Eigenschaft, stabil zu sein, auch von der Wahl des Anfangsaugenblicks t_0 ab, da man nicht jede bei t_1 beginnende Lösung als „Fortsetzung" einer bei $t_0 < t_1$ anfangenden auffassen kann[2]). Man muß daher die Unabhängigkeit von t_0 in die Stabilitätsdefinition aufnehmen:

Definition 1. Die tr. L. heißt *stabil*, wenn sich für jedes $t_0 \geqq t^*$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so angeben läßt, daß

$$|\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0)| < \varepsilon \qquad (t \geqq t_0) \tag{3.4}$$

wird, sofern nur

$$|\mathfrak{q}| < \delta \tag{3.5}$$

ist.

Definition 2. Die tr. L. heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie stabil im Sinne der Def. 1 ist und wenn ein $h > 0$ derart existiert, daß

$$\lim \mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0) = \mathfrak{o} \qquad (t = t_0, t_0 + 1, \ldots) \tag{3.6}$$

für alle $|\mathfrak{q}| < h$ ist.

Derjenige Bereich von Werten $(\mathfrak{q}, t_0)$, von dem aus Lösungen (3.2) ausgehen, die (3.6) befriedigen, heißt *Einzugsbereich* der tr. L.

Definition 3. Die tr. L. heißt *instabil*, wenn es zu jedem $t_0 \geqq t^*$ ein $\varepsilon > 0$, eine gegen $\mathfrak{o}$ konvergierende Folge von Anfangswerten $\mathfrak{q}_n$ und eine Folge von Zeitpunkten $t_n \to \infty$ derart gibt, daß für hinreichend große n entweder $\mathfrak{p}(t_n, \mathfrak{q}_n, t_0)$ nicht mehr existiert oder

$$|\mathfrak{p}(t_n, \mathfrak{q}_n, t_0)| \geqq \varepsilon \tag{3.7}$$

wird. Gilt diese Aussage für jede Lösung (3.4) mit hinreichend kleinem $|\mathfrak{q}| < \eta$, so heißt die tr. L. *total instabil*.

Satz 1. *Wenn zu der Gleichung* (3.1) *eine positiv definite Funktion* $v(\mathfrak{x}, t)$ *derart existiert, daß die Bildung*

$$w(\mathfrak{x}, t) = \Theta\, v - v = v(\Theta\, \mathfrak{x}, t + 1) - v(\mathfrak{x}, t) \tag{3.8}$$

in einem gewissen Bereich $\mathfrak{B}_{h, t^*}$ *existiert und dort nichtpositiv ist, so ist die tr. L. stabil.*

Beweis. Man wähle bei gegebenem $\varepsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ so, daß für $|\mathfrak{q}| < \delta$ gleichzeitig

$$|\mathfrak{q}| < \varepsilon \text{ und } v(\mathfrak{q}, t_0) < \varphi(\varepsilon)$$

---

[2]) Vgl. dazu PERRON [5] mit etwas anderer Terminologie.

ist. $\varphi(r)$ ist die in Nr. 2 eingeführte Funktion. Wegen der vorauszusetzenden Stetigkeit von v ist eine solche Wahl von δ möglich. Dann ist stets (3.4) erfüllt. Wäre nämlich für $t_1 > t_0$ einmal $|\mathfrak{p}(t_1, \mathfrak{q}, t_0)| \geqq \varepsilon$, so wäre wegen der Definition von $\varphi(r)$

$$v(\mathfrak{p}(t_1, \mathfrak{q}, t_0), t_1) \geqq \varphi(\varepsilon) > v(\mathfrak{q}, t_0) .$$

Da aber $w(\mathfrak{x}, t) \leqq 0$ ist, kann v, als Funktion von t betrachtet, mit wachsendem t nicht zunehmen.

Satz 2. *Zu den Voraussetzungen von Satz 1 nehme man die Bedingungen hinzu, daß v dekreszent und w negativ definit ist. Dann ist die tr. L. asymptotisch stabil.*

Beweis. Es ist mit passend gewählten Funktionen $\psi(r)$, $\chi(r)$

$$v(\mathfrak{x}, t) \leqq \psi(|\mathfrak{x}|),\ w(\mathfrak{x}, t) \leqq -\chi(|\mathfrak{x}|) .$$

Aus dem Beweis zu Satz 1 folgt, daß die Zahlenfolge

$$\tilde{v}(t) = v(\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0), t) \qquad (t = t_0, t_0 + 1, \ldots)$$

einen nichtnegativen Limes v_0 hat. Wäre nun $v_0 > 0$, so wäre beständig $\psi(|\mathfrak{p}|) \geqq v_0 > 0$, d. h. $|\mathfrak{p}|$ beständig größer als eine positive Zahl $p_0 > 0$, was $w(\mathfrak{p}, t) \leqq -\chi(p_0) < 0$ nach sich zöge. Nun ist aber $w(\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0), t)$, als Funktion $\tilde{w}(t)$ von t angesehen, die „Differenz" von $\tilde{v}(t)$, also

$$\tilde{v}(t_0 + k) = \tilde{v}(t_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{w}(t_0 + j) \leqq \tilde{v}(t_0) - k\,\chi(p_0) . \tag{3.9}$$

Wäre $\chi(p_0) > 0$, so wäre dieser Ausdruck für große Werte von k sicher negativ; das ist aber nicht möglich. Mithin ist $v_0 = 0$ und $p_0 = 0$.

Satz 3. *Es sei eine bezüglich $\mathfrak{x}$ stetige Funktion $u(\mathfrak{x}, t)$ mit folgenden Eigenschaften vorhanden: a) Bei jedem festen $t_1 = t_0 + k$ gibt es zu jedem $h > 0$ im Gebiet $|\mathfrak{x}| \leqq h$ ein Teilgebiet $\mathfrak{G}$, in dem $u > 0$ ist; $\mathfrak{G}$ ist durch die Punkte $\mathfrak{x}$ mit $u(\mathfrak{x}, t_1) = 0$ bzw. $|\mathfrak{x}| = h$ begrenzt. b) Es ist $u(\mathfrak{o}, t) = 0$. c) In $\mathfrak{G}$ ist u nach oben beschränkt. d) Ist in $\mathfrak{G}$ $u \geqq \alpha > 0$, so genügt die Funktion $w = \Theta u - u$ einer Ungleichung der Gestalt $0 < \beta \leqq w$. (Dabei darf β von α abhängen). Unter diesen Voraussetzungen ist die tr. L. instabil.*

Beweis. Man wähle in beliebiger Nähe des Nullpunktes ein $\tilde{\mathfrak{q}}$ so, daß

$$u(\tilde{\mathfrak{q}}, t_0) > \alpha ,\ w(\tilde{\mathfrak{q}}, t_0) > 0$$

ist. Dann ist wegen d) sicher beständig

$$\tilde{u}(t) = u(\mathfrak{p}(t, \tilde{\mathfrak{q}}, t_0), t) > \alpha \qquad (t > t_0) .$$

Analog zu (3.9) erhält man jetzt

$$\tilde{u}(t) \geqq \tilde{u}(t_0) + k\,\beta .$$

Dieser Ausdruck wird beliebig groß. Die Lösung muß daher wegen der Voraussetzung c den Bereich $\mathfrak{G}$ verlassen, und das geschieht wegen $\tilde{u} > \alpha$ auf der Begrenzung $|\mathfrak{x}| = h$. Die tr. L. ist also instabil.

Satz 4. *Existiert eine positiv definite dekreszente Funktion $v(\mathfrak{x}, t)$ derart, daß $w(\mathfrak{x}, t)$ positiv definit ist, so ist die tr. L. total instabil.*

Beweis. Die Voraussetzungen besagen, daß eine ganze Umgebung des Nullpunktes die Eigenschaften des oben mit $\mathfrak{G}$ bezeichneten Gebietes besitzt. Die Überlegung gilt mithin für jedes $\mathfrak{q}$ aus dieser Umgebung.

Ähnlich wie bei Differentialgleichungen kann man mit Hilfe einer geeigneten „Ljapunovschen Funktion" v Abschätzungen für den Einzugsbereich der tr. L. gewinnen. Betrachtet man z. B.

$$\Theta x_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad \Theta x_2 = 2 x_1 x_2$$

und wählt $v = x_1^2 + x_2^2$, so wird $\Theta v = (x_1^2 - x_2^2)^2 + (2 x_1 x_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2$ und $w = \Theta v - v = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1)$. Offenbar ist w im Bereich $x_1^2 + x_2^2 < 1$ negativ definit; das Innere des Einheitskreises gehört also zum Einzugsbereich. (In diesem Fall ist der offene Einheitskreis sogar der genaue Einzugsbereich.)

4.

Es sei A eine Matrix mit reellen konstanten Koeffizienten und den Eigenwerten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Ferner seien $g(\mathfrak{x})$ und $h(\mathfrak{x})$ zwei homogene Polynome k-ten Grades mit konstanten Koeffizienten. Es gilt der folgende

Hilfssatz 1. Dann und nur dann, wenn keins der $\binom{n+k-1}{k}$ Produkte

$$\alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \ldots \alpha_n^{j_n} \qquad (j_1 + j_2 + \cdots + j_n = k) \tag{4.1}$$

den Wert eins hat, existiert ein wohlbestimmtes homogenes Polynom $g(\mathfrak{x})$, das der Gleichung

$$g(A\,\mathfrak{x}) - g(\mathfrak{x}) = h(\mathfrak{x}) \tag{4.2}$$

mit vorgegebenem $h(\mathfrak{x})$ genügt.

Beweis. Wir sehen die Potenzprodukte

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} \qquad (i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k)$$

als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{r}(\mathfrak{x})$ der Ordnung $\binom{n+k-1}{k}$ an und schreiben die Formen $g(\mathfrak{x})$ und $h(\mathfrak{x})$ symbolisch als Skalarprodukte:

$$g(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}^T \mathfrak{r}, \quad h(\mathfrak{x}) = \mathfrak{h}^T \mathfrak{r},$$

so daß die Gleichung (4.2) die Gestalt

$$\mathfrak{g}^T(\mathfrak{r}(A\,\mathfrak{x}) - \mathfrak{r}(\mathfrak{x})) = \mathfrak{h}^T \mathfrak{r}(\mathfrak{x}) \tag{4.3}$$

annimmt. Durch den Übergang von $\mathfrak{x}$ zu $A\,\mathfrak{x}$ erfährt $\mathfrak{r}$ eine lineare Substitution $\mathfrak{r} \to S_A \mathfrak{r}$. Dabei bilden die Matrizen S_A eine Darstellung der Gruppe der Substitutionen A. Aus (4.3) folgt

$$\mathfrak{g}^T (S_A - S_E)\, \mathfrak{r} = \mathfrak{h}^T \mathfrak{r} \qquad (E \text{ die Einheitsmatrix}).$$

Diese Gleichung ist nach $\mathfrak{g}$ auflösbar, wenn

$$\det(S_A - S_E) \neq 0$$

ist. Nun sind aber die Eigenwerte von S_A gerade die Bildungen (4.1); diese

müssen also von eins verschieden sein. Wählt man $\mathfrak{h}(\mathfrak{x})$ als quadratische Form

$$\mathfrak{h}(\mathfrak{x}) = -\mathfrak{x}^T C\, \mathfrak{x} \qquad (C^T = C),$$

so ist

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^T B\, \mathfrak{x}$$

ebenfalls eine quadratische Form, und zwar entspricht (4.3) der Matrizenbeziehung

$$A^T B A - B = -C\,, \tag{4.4}$$

und die Lösbarkeitsbedingung ist

$$\alpha_i \alpha_j \neq 1 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{4.5}$$

Über die Lösung B von (4.4) besteht

Hilfssatz 2. Es sei C positiv definit. Dann und nur dann ist auch die Lösung B positiv definit, wenn $|\alpha_i| < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt.

Der Beweis dieses Hilfssatzes stimmt fast wörtlich mit dem Beweis eines ähnlichen Matrizensatzes überein, den ich kürzlich an anderer Stelle[3]) veröffentlicht habe, so daß eine erneute Darstellung nicht erforderlich zu sein scheint. Auch von der naheliegenden Verallgemeinerung der beiden Hilfssätze auf das Komplexe wollen wir der Kürze halber absehen.

5.

Wir betrachten die lineare Differenzengleichung

$$\Theta\, \mathfrak{x} = A\, \mathfrak{x} \tag{5.1}$$

mit konstanten Koeffizienten. Bildet man die quadratische Form

$$v(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^T B\, \mathfrak{x} \tag{5.2}$$

mit der durch (4.4) bestimmten Matrix bei gegebenem positiv definiten C, so ist $w = -\mathfrak{x}^T C\, \mathfrak{x}$ negativ definit. Wenn die Beträge $|\alpha_i| < 1$ sind, ist nach Hilfssatz 2 die Form (5.2) positiv definit, mithin Satz 2 anwendbar, und es folgt

Satz 5. *Wenn alle Eigenwerte der Matrix A dem Betrage nach kleiner als eins sind, so ist die tr. L. von* (5.1) *asymptotisch stabil.*

Sind einzelne der Größen $|\alpha_i| > 1$ und ist (4.5) erfüllt, so ist (5.2) nicht positiv semi-definit, und man kann Satz 3 anwenden. Treten Eigenwertpaare auf, deren Produkt gleich eins ist, so betrachte man anstelle von A eine Matrix $A_1 = \frac{1}{\gamma} A$ und wähle γ so, daß für die Eigenwerte von A_1 die Bedingung (4.5) gilt und daß die zu A_1 gehörende Matrix B_1 ebenfalls nicht positiv semi-definit ist. Bildet man nun $v = \mathfrak{x}^T B_1\, \mathfrak{x}$, so ist $\Theta\, v - v$ eine quadratische Form, deren Matrix $A^T B_1 A - B_1 = -\gamma^2 C + (\gamma^2 - 1)\, B_1$ negativ definit ist, falls γ nahe genug bei eins liegt, und man kann wieder Satz 3 anwenden. Es folgt

Satz 6. *Ist mindestens ein Eigenwert von A dem Betrage nach größer als eins, so ist die tr. L. instabil.*

---

[3]) Vgl. [1], Nr. 3.

Als Korollar ergibt sich durch Anwendung von Satz 4, daß *die tr. L. total instabil ist, wenn alle* $|\alpha_i| > 1$ *sind.*

Durch die Sätze 5 und 6 sind die sog. kritischen Fälle noch nicht erfaßt, bei denen $|\alpha_i| \leqq 1$ ist und „kritische" Eigenwerte des Betrages eins wirklich auftreten. Hier gilt

Satz 7. *Wenn die kritischen Eigenwerte einfach sind oder zu einfachen Elementarteilern gehören, so ist die tr. L. stabil, aber nicht asymptotisch; andernfalls ist sie instabil.*

Satz 7 läßt sich bekanntlich (ebenso wie auch Satz 5 und 6) sofort aus der expliziten Darstellung der Lösungen mittels der Eigenwerte von A ablesen. Der Beweis von Satz 7 mit Hilfe der direkten Methode stößt jedoch auf charakteristische Schwierigkeiten. Man kann zwar ebenso wie bei der entsprechenden Differentialgleichung Ljapunovsche Funktionen[4]) angeben, die die Voraussetzungen von Satz 1 bzw. Satz 3 erfüllen, kann aber damit nicht ohne weiteres zeigen, daß die Lösung niemals asymptotisch stabil ist. Dieser Nachweis benötigt tiefer liegende Sätze über *notwendige* Stabilitätsbedingungen, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

Wenn das Stabilitätsverhalten bekannt ist, kann man unter Verwendung von Hilfssatz 1 auch Formen höherer Ordnung als Ljapunovsche Funktionen konstruieren.

Die folgenden Betrachtungen erfordern eine Verschärfung des Begriffes der asymptotischen Stabilität der tr. L. von (3.1).

Definition 4. Die tr. L. heißt *exponentiell stabil*, wenn es drei positive Zahlen a, h und α derart gibt, daß für $|\mathfrak{q}| < h$

$$|\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0)| \leqq a\, |\mathfrak{q}|\, e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{5.3}$$

gilt. Gibt es in jeder Umgebung von $\mathfrak{o}$ Anfangswerte $\tilde{\mathfrak{q}}$ derart, daß

$$|\mathfrak{p}(t, \tilde{\mathfrak{q}}, t_0)| \geqq a_1\, |\tilde{\mathfrak{q}}|\, e^{\gamma(t-t_0)} \qquad (a_1 > 0\,,\ \gamma > 0) \tag{5.4}$$

erfüllt ist, so heißt die tr. L. *exponentiell instabil*; gilt (5.4) für alle hinreichend kleinen Anfangswerte, so liegt *totale exponentielle Instabilität* vor. Die in den Ungleichungen auftretenden Konstanten sind von t_0 unabhängig.

Exponentielle Stabilität besagt mehr als exponentielles Abklingen aller Lösungen. In [7] findet sich eine lineare Gleichung, deren sämtliche Lösungen exponentiell abklingen, ohne daß die tr. L. exponentiell stabil ist.

Wir bilden mit Hilfe einer für alle $t = t_0, t_0 + 1, \ldots$ beschränkten und nichtsingulären Matrix $A(t)$ die Dzgl.

$$\Theta\, \mathfrak{x} = A(t)\, \mathfrak{x}\,. \tag{5.5}$$

Satz 8. *Wenn die tr.L. von* (5.5) *exponentiell stabil ist, läßt sich eine positiv definite dekreszente quadratische Form* $v(\mathfrak{x}, t)$ *so konstruieren, daß* $w = \Theta v - v$ *gleich einer gegebenen negativ definiten quadratischen Form* $-\ \mathfrak{x}^T C(t)\, \mathfrak{x}$ *mit beschränkter Matrix* $C(t)$ *ist, und zwar ist*

$$v(\mathfrak{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{p}^T(t+k, \mathfrak{x}, t)\, C(t+k)\, \mathfrak{p}(t+k, \mathfrak{x}, t)\,. \tag{5.6}$$

[4]) Vgl. [1], Nr. 4.

Beweis. Man wähle ein Fundamentalsystem linear unabhängiger Lösungen von (5.5) so aus, daß die aus ihnen gebildete Matrix $X(t)$ für $t = t^*$ [vgl. (2.2)] gleich der Einheitsmatrix wird. Es ist dann

$$\mathfrak{p}(t_0 + k, \mathfrak{x}, t_0) = X(t_0 + k)\, X^I(t_0)\, \mathfrak{x}\,. \tag{5.7}$$

(X^I bezeichnet die inverse Matrix.) Wegen (5.3) konvergiert die Reihe (5.6) und stellt eine positiv definite quadratische Form mit beschränkten Koeffizienten dar; die letzte Eigenschaft verbürgt die Dekreszenz. Ferner ist

$$\Theta\, X(t) = A(t)\, X(t)\,, \quad \Theta\, X^I(t) = X^I(t)\, A^I(t)\,.$$

Setzt man (5.7) in (5.6) ein, so folgt

$$\begin{aligned}\Theta\, v &= \mathfrak{x}^T A^T A^{IT} X^{IT}(t) \sum_{k=1}^{\infty} X^T(t+k)\, C(t+k)\, X(t+k) \quad X^I(t)\, A^I A\, \mathfrak{x}\\ &= \mathfrak{x}^T X^{IT}(t) \sum_{k=1}^{\infty} X^T(t+k)\, C(t+k)\, X(t+k) \quad X^I(t)\, \mathfrak{x}\end{aligned}$$

und

$$\Theta\, v - v = -\,\mathfrak{x}^T C(t)\, \mathfrak{x}\,.$$

Satz 9. *Ist die tr. L. total exponentiell instabil, so läßt sich eine quadratische Form $v(\mathfrak{x}, t)$ konstruieren, die den Voraussetzungen von Satz 4 genügt.*

Beweis. Wählt man als obere Summationsgrenze in (5.6) eine endliche Zahl $m - 1$, so wird

$$\Theta\, v - v = \mathfrak{p}^T(t+m, \mathfrak{x}, t)\, C(t+m)\, \mathfrak{p}(t+m, \mathfrak{x}, t) - \mathfrak{x}^T C(t)\, \mathfrak{x}\,. \tag{5.8}$$

Wegen der totalen exponentiellen Instabilität kann man m so wählen, daß für alle hinreichend kleinen Anfangswerte $\mathfrak{x} = \mathfrak{q}$ der Ausdruck (5.8) positiv wird. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt.

Man kann Satz 8 bzw. Satz 9 etwas verallgemeinern, indem man w als negativ definite Form beliebiger Ordnung vorgibt.

6.

Wir betrachten wieder die nichtlineare Dzgl. (3.1). Es gilt

Satz 10. *Wenn sich eine positiv definite Funktion v derart konstruieren läßt, daß für kleine $|\mathfrak{x}|$ mit passend gewählten $a > 0$, $b > 0$*

$$v(\mathfrak{x}, t) < a\, |\mathfrak{x}|^2 \tag{6.1}$$

und

$$w(\mathfrak{x}, t) = \Theta\, v - v \leqq -\, b\, |\mathfrak{x}|^2$$

ist, dann ist die tr. L. exponentiell stabil.

Beweis. Aus den Voraussetzungen ergibt sich unter Beachtung von (2.3) für die Bildungen

$$\tilde{v}(t) = v(\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0), t) \ \text{ und } \ \tilde{w}(t) = w(\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0), t) \tag{6.2}$$

die Ungleichung $\tilde{w}(t) \leqq -c\,\tilde{v}(t)$, und nach (3.8) folgt daraus $\tilde{v}(t) \leqq \tilde{v}(t_1)\, e^{-\gamma(t-t_1)}$ mit passenden positiven Konstanten c und γ für $t \geqq t_1 \geqq t_0$. Es sei $t_1 = t_0 + p$. Die Zahl p läßt sich so wählen, daß für alle $\mathfrak{q}$ aus einer gewissen Umgebung des Nullpunkts $\tilde{v}(t_1) \leqq d|\mathfrak{q}|^2$ mit von $\mathfrak{q}$ unabhängigem d ist. Da $\tilde{w}(t) \leqq -\, c\,\tilde{v}(t_1) e^{-\gamma(t-t_1)}$

ist, wird $|\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0)| \leqq \frac{c}{b} \tilde{v}(t_1)\, e^{-\gamma(t-t_1)} \leqq \frac{dc}{b} |\mathfrak{q}|\, e^{-\gamma(t-t_1)}\, e^{\gamma p}$, und das ist eine Ungleichung vom Typ (5.3).

Aus den Eigenschaften der Form (5.2) folgt, daß sich Satz 10 anwenden läßt, daß also die tr. L. von (5.1) exponentiell stabil oder exponentiell instabil ist, sofern kein kritischer Fall vorliegt.

Die Dzgl. (3.1) habe die spezielle Form

$$\Theta\, \mathfrak{x} = A(t)\, \mathfrak{x} + \mathfrak{g}(\mathfrak{x}, t) \tag{6.3}$$

mit $\mathfrak{g}(\mathfrak{o}, t) = \mathfrak{o}$; außerdem soll der nichtlineare Bestandteil in einem Bereich $\mathfrak{B}_{h, t_0}$ einer Abschätzung der Gestalt

$$|\mathfrak{g}(\mathfrak{x}, t)| \leqq a\, |\mathfrak{x}| \tag{6.4}$$

genügen, wobei a von t unabhängig ist. Es besteht

Satz 11. *Wenn die tr. L. der linearen Gleichung*

$$\Theta\, \mathfrak{x} = A(t)\, \mathfrak{x} \tag{6.5}$$

exponentiell stabil ist, so gilt das gleiche für die tr. L. von (6.3), *sofern die Zahl a hinreichend klein ist.*

Beweis. Man wähle die durch Satz 5 bzw. Satz 8 garantierte Ljapunovsche Funktion $v(\mathfrak{x}, t)$. Dann ist

$$w = \Theta\, v - v = -\mathfrak{x}^T C(t)\, \mathfrak{x} - \mathfrak{g}^T C(t)\, \mathfrak{g}\,.$$

Der zweite Summand ist dem Betrage nach kleiner als $a^2 g\, |\mathfrak{x}|^2$, worin g eine nur von C abhängende Konstante darstellt. Bei hinreichend kleinem a ist w also negativ definit, und es ist sogar $w \leqq -c'\, |\mathfrak{x}|^2$ mit $c' > 0$, so daß man Satz 10 anwenden kann.

Satz 12. *Ist die tr. L. von* (6.5) *total exponentiell instabil, so ist bei hinreichend kleinem a auch die tr. L. von* (6.3) *instabil.*

Man beweist das mit Hilfe der durch Satz 9 garantierten Funktion ebenso wie die Aussage von Satz 11. Wenn (6.5) konstante Koeffizienten hat, kann man auf die Einschränkung „total" verzichten, da in diesem Fall durch den Beweis zu Satz 6 die Existenz einer geeigneten Ljapunovschen Funktion gesichert ist.

Die Voraussetzungen über $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}, t)$ sind insbesondere erfüllt, wenn die Komponenten von $\mathfrak{g}$ Potenzreihenentwicklungen nach den x_i zulassen, die mit Gliedern von mindestens zweiter Ordnung beginnen und deren Koeffizienten in t beschränkt sind.

Als Beispiel für Satz 12 betrachten wir das Gleichungssystem

$$h_{n+1} = b\, h_n \exp(-a\, p_n)\,, \quad p_{n+1} = b\, h_n - h_{n+1}\,,$$

das bei der mathematischen Behandlung von Erbvorgängen eine Rolle spielt. Dabei ist n die unabhängige Variable, $a > 0$ und $b > 1$ sind Konstanten[5]). Das System hat die beiden Gleichgewichtsstellen

$$h_n = p_n = 0; \quad h_n = \frac{1}{a} \frac{\log b}{b-1}\,, \quad p_n = \frac{1}{a} \log b\,.$$

[5]) Vgl. [4]. Das System wird dort mit einer Methode behandelt, die auf die Konstruktion einer Ljapunovschen Funktion hinausläuft, ohne daß dem die allgemeine Theorie zugrunde liegt.

Bildet man zu diesen beiden Stellen die „Gleichung der ersten Näherung", so wird man auf Matrizen $A(t)$ der Form

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\log b}{b-1} \\ b-1 & \dfrac{\log b}{b-1} \end{pmatrix}$$

geführt. Da die beiden Eigenwerte der zweiten Matrix absolut größer als eins sind, ist diese Gleichgewichtslage total instabil, während der Nullpunkt nur instabil ist.

7.

Wir wollen noch zeigen, daß das durch Satz 11 gelieferte Kriterium dem in der Einleitung genannten Kriterium aus der Arbeit [7] gleichwertig ist.

Hilfssatz 3. Es sei die Funktion $f(t)$ für $t = 0, 1, 2, \ldots$ definiert und von Null verschieden. Man setze für $p \geqq 0$, $k \geqq 0$

$$g(p, p+k) = |f(p)\, f(p+1) \ldots f(p+k)|\,,$$
$$h(p, p+k) = g(p, p+k) + g(p+1, p+k) + \cdots + g(p+k, p+k)\,.$$

Dann und nur dann, wenn $h(0, k)$ für $k = 0, 1, \ldots$ beschränkt ist, ist

$$g(p, p+k) \leqq a\, e^{-\beta k}, \tag{7.1}$$

wobei $a > 0$, $\beta > 0$ von p und k unabhängig sind.

Beweis. Es sei $h(0, k) = h(1, k) + g(0, k) \leqq K$; dann ist auch $h(p, p+k)$ beschränkt. Ferner ist

$$h(p, p+k) = g(p, p+k)\left(1 + \frac{1}{g(p, p)} + \cdots + \frac{1}{g(p, p+k-1)}\right).$$

Aus dieser Beziehung folgt nacheinander

$$g(p, p+k) \leqq K\,, \quad \frac{1}{g(p, r)} \geqq K^{-1} \qquad (r \geqq p)\,,$$
$$h(p, p+k) \geqq \frac{k}{K}\, g(p, p+k)\,,$$
$$g(p, p+k) \leqq \frac{K^2}{k}\,.$$

Nun ist bei festem ganzzahligem s

$$g(p, p+rs) = \frac{g(p, p+rs)}{g(p, p+(r-1)s)}\, \frac{g(p, p+(r-1)s)}{g(p, p+(r-2)s)} \ldots g(p, p)$$

und

$$\frac{g(p, p+ms)}{g(p, p+(m-1)s)} = g(p+(m-1)s+1\,,\; p+ms) \leqq \frac{K^2}{s-1}\,,$$

also

$$g(p, p+rs) < \frac{K^{2r+1}}{s^r}\,.$$

Wählt man s so groß, daß $\dfrac{K^2}{s} = e^{-\alpha} < 1$ wird, so kommt

$$g(p, p+rs) \leqq K e^{-\alpha r} = K e^{-\beta s r} \qquad (s\beta = \alpha)\,.$$

Das ist eine Aussage wie (7.1) für diejenigen Argumente, die Vielfache von s sind; ein Wert $g(p, p+k)$ mit $ms < k < (m+1)s$ kann sich aber von $g(p, p+ms)$ nur durch einen beschränkten Faktor unterscheiden, so daß (7.1) mit passender Konstanten a allgemein gilt. Die Notwendigkeit der Voraussetzung liegt auf der Hand.

Es sei nun die Matrix $A(t)$ in (6.3) bzw. (6.5) eine Dreiecksmatrix, die oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen aufweist. Die Diagonalglieder $f_i(t)$ sollen einzeln der Voraussetzung von Hilfssatz 3 genügen. Dann ist die tr. L. von (6.5) exponentiell stabil. Zum Beweis wähle man unter den durch Hilfssatz 3 garantierten Zahlen β die kleinste und bilde eine Dreiecksmatrix B, die in der Hauptdiagonale die Zahlen $e^{-\beta}$, unterhalb überall eine Zahl P enthält, die absolut größer als alle Elemente von $A(t)$ ist. Sodann betrachte man die Dzgl.

$$\Theta\,\tilde{\mathfrak{x}} = B\,\tilde{\mathfrak{x}}\,. \tag{7.2}$$

Wählt man für (6.5) und (7.2) gleiche Anfangswerte $\mathfrak{q}$, so ist beständig

$$|\mathfrak{p}(t, \mathfrak{q}, t_0)| \leqq |\tilde{\mathfrak{p}}(t, \mathfrak{q}, t_0)|\,;$$

Da die tr. L. von (7.2) aber exponentiell stabil ist, gilt das gleiche für (6.5).

In der Arbeit [7] wird gezeigt: *Die in der Einleitung mittels* (1.6) *formulierte Bedingung ist im Fall einer Dreiecksmatrix genau dann erfüllt, wenn deren Diagonalelemente $f_i(t)$ einzeln die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 erfüllen.* Ist $A(t)$ keine Dreiecksmatrix, so muß (vgl. [7]) eine beschränkte Matrix $P(t)$ mit beschränkter Reziproken existieren, derart, daß $P(t+1)\,A(t)\,P^I(t) = B(t)$ eine Dreiecksmatrix mit der genannten Eigenschaft wird. Im letzten Fall ist nach unseren Überlegungen die tr. L. der Gleichung $\Theta\,\mathfrak{y} = B(t)\,\mathfrak{y}$ exponentiell stabil, und da $\mathfrak{x} = P^I(t)\,\mathfrak{y}$ die allgemeine Lösung von (6.5) ist, ist deren tr. L. auch exponentiell stabil. Damit ist die behauptete Äquivalenz bewiesen.

8.

Es sei

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = P(t)\,\mathfrak{y} \qquad (P(t+1) = P(t)) \tag{8.1}$$

eine Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten. Bekanntlich genügt die aus einem Fundamentalsystem gebildete Matrix Y einer linearen Dzgl. der Form $\Theta Y = YR$; die konstante Matrix R hängt nur von P ab. Jede Zeile $\mathfrak{x}$ der Matrix Y genügt also der Gleichung

$$\Theta\,\mathfrak{x} = R^T\,\mathfrak{x}\,.$$

Das ist eine Gleichung wie (5.1), und man erhält mit Hilfe der Sätze 5 bis 7 sofort die bekannten Ergebnisse über das Stabilitätsverhalten von (8.1) in Abhängigkeit von den Eigenwerten der Matrix R. Dabei wird die besondere Gestalt der Lösungen von (8.1) nicht benutzt.

b) Es sei

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t) \tag{8.2}$$

eine Differentialgleichung, die die tr. L. besitzt. Die rechte Seite sei für $|\mathfrak{x}| < h$, $t \geqq t_0$ stetig[6]) und erfülle eine Lipschitz-Bedingung hinsichtlich $\mathfrak{x}$. Ersetzt man (8.2) durch die Differenzengleichung

$$\Theta\,\mathfrak{x} = \mathfrak{x} + \omega\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t) \tag{8.3}$$

mit der Spanne ω (Θ bezeichnet jetzt den Übergang von t zu $t + \omega$), so entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen aus der Stabilität der tr. L. von (8.2) auf die Stabilität der tr. L. von (8.3) geschlossen werden kann.

Wir wollen annehmen, daß sich zu (8.2) eine Ljapunovsche Funktion $v(\mathfrak{x}, t)$ (mit stetigen partiellen Ableitungen) konstruieren läßt, die positiv definit ist und für hinreichend kleine $|\mathfrak{x}|$ Abschätzungen der Form

$$v < a\,|\mathfrak{x}|^\alpha\,, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| < b\,|\mathfrak{x}|^{\alpha-1} \qquad (a > 0,\, b > 0,\, \alpha > 1) \tag{8.4}$$

gleichmäßig in t zuläßt. Die totale Ableitung

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(\mathfrak{x}, t) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

sei negativ definit. Bildet man zu dieser Funktion unter Beachtung von (8.3) die Größe

$$w = \Theta\,v - v = v(\mathfrak{x} + \omega\,\mathfrak{f}(\mathfrak{x}, t), t + \omega) - v(\mathfrak{x}, t)\,,$$

so liefert der Mittelwertsatz

$$w = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_0 f_i(\mathfrak{x}, t) + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0.$$

Der Index 0 soll andeuten, daß in den partiellen Ableitungen als Argumente die Größen $\mathfrak{x} + \vartheta\,\omega\,\mathfrak{f}$, $t + \vartheta\,\omega$ mit $0 < \vartheta < 1$ zu nehmen sind. Aus den Voraussetzungen über v folgt aber, daß bei hinreichend kleiner Spanne die Bildung w ebenso wie $\frac{dv}{dt}$ negativ definit ist. Nach Satz 2 ist daher die tr. L. von (8.3) ebenfalls asymptotisch stabil[7]). Die Voraussetzungen über v sind z. B. erfüllbar, wenn die tr. L. von (8.2) exponentiell stabil ist[8]).

Literatur

[1] Hahn, W.: Eine Bemerkung zur zweiten Methode von Ljapunov. Math. Nachr. **14**, 349—354 (1956). — [2] Krasovskij, N. N.: Über die Stabilität nach der ersten Näherung (russ.). Prikladnaja Mat. Mech. **19**, 516—530 (1955). — [3] Malkin, I. G.: Theorie der Stabilität einer Bewegung (russ.); deutsche Übersetzung (Berlin und München) (im Druck). Moskau 1952. — [4] Meredith, C. A.: On a non-linear difference equation in two variables. J. London math. Soc. **15**, 260—272 (1940). — [5] Perron, O.: Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen. J. reine angew. Math. **161**, 41—64 (1929). — [6] Skalkina, M. A.: Über die Erhaltung der asymptotischen Stabilität beim Übergang von Differentialgleichungen zu den entsprechenden Differenzengleichungen (russ.). Dokl. Akad. Nauk SSSR **104**, 505—508 (1955).— [7] Ta Li: Die Stabilitätsfrage bei Differenzengleichungen. Acta math. **63**, 99—141 (1934).

(Eingegangen am 20. Februar 1958)

[6]) t und gegebenenfalls t_0 sind hier natürlich stetig veränderlich.

[7]) Vgl. [6] In dieser Arbeit wird nicht die direkte Methode verwandt.

[8]) Vgl. [2].

Kasch, F. und Volkmann, B.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 442—453 (1958)

Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen

Von

Friedrich Kasch in Heidelberg und Bodo Volkmann in Mainz

1. Bei der Mahlerschen Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen betrachtet man bekanntlich[1]), wenn $\mathfrak{P}(n, H)$ die Menge aller Polynome $P(x)$ mit ganzrationalen Koeffizienten von einem Grad $\leq n$ und einer Höhe $\leq H$ ist, zu einer vorgegebenen Zahl ξ die Größen

$$w_n(H, \xi) = \min_{\substack{P \in \mathfrak{P}(n,H) \\ P(\xi) \neq 0}} |P(\xi)| \quad \text{und} \quad w_n(\xi) = \overline{\lim_{H \to \infty}} \frac{\log \frac{1}{w_n(H,\xi)}}{\log H}.$$

Setzt man ferner $\vartheta_n(\xi) = \frac{w_n(\xi)}{n}$, so ergibt sich in der Bezeichnungsweise von [8] der Typ einer (reellen oder komplexen) Zahl ξ als

$$\vartheta(\xi) = \sup_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(\xi).$$

Unter S-Zahlen versteht man dann diejenigen, deren Typ positiv und endlich ist. Der kleinste Wert, den $\vartheta(\xi)$ für transzendente Zahlen ξ annehmen kann, ist $\vartheta(\xi) = 1$ für reelles und $\vartheta(\xi) = \frac{1}{2}$ für komplexes ξ, und eine Vermutung von K. Mahler [7] besagt, daß dies für fast alle reellen bzw. fast alle transzendenten ξ auch wirklich eintritt. Diese Mahlersche Vermutung ist also, da für reelle transzendente ξ auch immer $\vartheta_n(\xi) \geq 1$ ist, in ihrem reellen Teil mit der Aussage äquivalent, daß für fast alle reellen ξ die Gleichungen

$$\vartheta_n(\xi) = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

gelten.

Bisher ist (1), von dem bekannten Fall $n = 1$ abgesehen, nur für $n = 2$ bewiesen worden, nämlich von J. F. Kubilyus [5]. Einer der Verfasser [4] gab kürzlich für diesen Satz einen vereinfachten Beweis und erzielte zugleich das bestmögliche Ergebnis für den komplexen Fall, wonach für fast alle komplexen ξ

$$\vartheta_2(\xi) = \frac{1}{4} \tag{2}$$

gilt. Für allgemeines n dagegen besagt die bisher beste Vorstufe der Mahlerschen Vermutung, ein Satz von W. J. Leveque [6], nur, daß für fast alle reellen bzw. fast alle komplexen ξ die Ungleichung

$$1 \leq \vartheta(\xi) \leq 2\,, \text{ bzw. } \frac{1}{2} \leq \vartheta(\xi) \leq \frac{3}{2} \tag{3}$$

gilt. Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist der folgende

[1]) Siehe Th. Schneider [8], 3. Kap.

Satz 1. *a) Für fast alle reellen ξ ist*

$$1 \leq \vartheta_n(\xi) \leq 2 - \frac{2}{n} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

b) Für fast alle komplexen ξ ist

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq \vartheta_n(\xi) \leq \frac{3}{2} - \frac{2}{n} \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Aussage a) ist offenbar für $n = 2$ mit dem Resultat von J. F. Kubilyus identisch; dieses wird jedoch hier nicht bewiesen, da die hier angewandte Methode von der in [5] und auch von der in [4] abweicht und nicht auf den Fall $n = 2$ übertragbar ist. Aussage b) würde sich mit unserer Methode zwar auch für den Fall $n = 2$ beweisen lassen, jedoch dann weniger scharf sein als (2). Satz 1, der offensichtlich das Ergebnis von W. J. LeVeque einschließt, wird sodann durch Einführung des Hausdorffschen Dimensionsbegriffs verschärft (Satz 2). Man erhält speziell die Aussage, daß die Menge aller T-Zahlen und die Menge aller U-Zahlen im Sinne der Mahlerschen Klasseneinteilung beide die Hausdorffsche Dimension Null haben.

2. Zum Beweis von Satz 1 benötigen wir die folgenden Hilfssätze. Die darin auftretenden Größen $C_1, C_2, \ldots$ bedeuten von H unabhängige Konstanten, die jedoch von n abhängen dürfen.

Hilfssatz 1. *Für jede S-Zahl ξ und jedes natürliche n ist $\vartheta_n(\xi) \geq 1$ bzw. $\vartheta_n(\xi) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, je nachdem, ob ξ reell oder komplex ist.*

Beweis. Siehe Th. Schneider [8], Seite 69.

Hilfssatz 2. *Sei $P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n \in \mathfrak{P}(n, H)$ ein Polynom mit den Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Dann gilt, wenn die Indizes $i_1, \ldots, i_m$ voneinander verschieden sind,*

$$|\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_m}| \leq C_1 \frac{H}{|a_0|}.$$

Beweis[2]. Die Nullstellen von $P(x)$ seien dem absoluten Betrag nach geordnet:

$$|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_{n_1}| \leq \frac{1}{2} < |\alpha_{n_1+1}| \leq \cdots \leq |\alpha_{n_2}| \leq 1 < |\alpha_{n_2+1}| \leq \cdots \leq |\alpha_n|.$$

Für jedes $x = z$ mit $|z| = 1$ gilt offenbar

$$|P(z)| \leq (n+1) H.$$

Daraus folgt

$$\prod_{i=n_1+1}^{n} |z - \alpha_i| = \left| \frac{P(z)}{a_0} \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{|z - \alpha_i|} \right| \leq (n+1)\, 2^{n_1} \frac{H}{|a_0|}.$$

Auf Grund des Satzes vom Maximum einer analytischen Funktion erhält man damit

$$\prod_{i=n_2+1}^{n} |\alpha_i| \leq 2^{n_2 - n_1} \prod_{i=n_1+1}^{n} |\alpha_i| \leq (n+1)\, 2^{n_2} \frac{H}{|a_0|},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

[2]) Siehe N. I. Feldman [2]; der Beweis wird der Vollständigkeit halber hier angegeben.

Hilfssatz 3. *Sei $n \geq 2$ und $P(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{P}(n, H)$ mit einer von Null verschiedenen Diskriminante $D(P)$. Dann gilt für jede seiner Nullstellen α_m:*

$$|P'(\alpha_m)| \geq C_2 \frac{\sqrt{|D(P)|}}{H^{n-2}}.$$

Beweis. Offenbar ist

$$|D(P)| = \left|a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2\right| = \left|a_0^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} (\alpha_m - \alpha_j)^2\right| \cdot \left|a_0^{2n-4} \prod_{\substack{i<j \\ i,j \neq m}} (\alpha_i - \alpha_j)^2\right|,$$

und wegen

$$\left|a_0^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} (\alpha_m - \alpha_j)^2\right| = |P'(\alpha_m)|^2$$

folgt somit

$$|P'(\alpha_m)| = \frac{\sqrt{|D(P)|}}{|a_0|^{n-2} \left|\prod\limits_{\substack{i<j \\ i,j \neq m}} (\alpha_i - \alpha_j)\right|}. \tag{4}$$

Bei Ausmultiplikationen des Produktes im Nenner entsteht eine Summe von $2^{\binom{n-1}{2}}$ Summanden, von denen jeder seinerseits ein Produkt von $\binom{n-1}{2}$ Faktoren aus der Menge der $n-1$ Wurzeln α_i mit $i \neq m$ ist. In diesen Produkten kommt jedes α_i höchstens in der $(n-2)$-ten Potenz vor. Daher gilt nach Hilfssatz 2

$$\left|a_0^{n-2} \prod_{\substack{i<j \\ i,j \neq m}} (\alpha_i - \alpha_j)\right| \leq |a_0|^{n-2}\, 2^{\binom{n-1}{2}} (n+1)^{n-2}\, 2^{n(n-2)} \frac{H^{n-2}}{|a_0|^{n-2}} = C_3 H^{n-2},$$

so daß sich die Behauptung nach (4) ergibt.

Hilfssatz 4. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 3 gilt, wenn ξ eine beliebige reelle oder komplexe Zahl und*

$$|\xi - \alpha_m| = \min_{i=1,\ldots,n} |\xi - \alpha_i|$$

ist,

$$|\xi - \alpha_m| \leq C_4 \frac{H^{n-2}}{\sqrt{|D(P)|}} |P(\xi)|.$$

Beweis. Da $|\alpha_m - \alpha_i| \leq |\alpha_m - \xi| + |\xi - \alpha_i| \leq 2\,|\xi - \alpha_i|$ ist, folgt

$$|P'(\alpha_m)| \leq 2^{n-1} |a_0| \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} |\xi - \alpha_i|.$$

Somit ist nach Hilfssatz 3

$$1 \leq \frac{1}{C_2} 2^{n-1} \frac{H^{n-2}}{\sqrt{|D(P)|}} |a_0| \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n} |\xi - \alpha_i|,$$

und hieraus folgt die Behauptung durch Multiplikation mit $|\xi - \alpha_m|$.

Hilfssatz 5. *Seien $\tilde{w}_n(H, \xi)$, $\tilde{w}_n(\xi)$, $\tilde{\vartheta}_n(\xi)$ und $\tilde{\vartheta}(\xi)$ analog den Ausdrücken $w_n(H, \xi)$, $w_n(\xi)$, $\vartheta_n(\xi)$ und $\vartheta(\xi)$ definiert, jedoch unter Beschränkung auf irreduzible Polynome $P(x)$. Dann gibt es für jedes ξ und jedes n eine natürliche Zahl*

$\nu = \nu(n) \leq n$ so, daß

$$\tilde{\vartheta}_n(\xi) \leq \vartheta_n(\xi) \leq \tilde{\vartheta}_\nu(\xi) \tag{5}$$

gilt.

Beweis. Der linke Teil von (5) folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Menge aller irreduziblen Polynome von einem Grad $\leq n$ und einer Höhe $\leq H$ eine Untermenge von $\mathfrak{P}(n, H)$ ist[3]). Zum Beweis des rechten Teils betrachten wir ein Polynom $P(x) \in \mathfrak{P}(n, H)$ mit $|P(\xi)| = w_n(H, \xi)$. Es sei $P = P_1 \ldots P_r$ mit irreduziblen Polynomen P_ϱ; ferner sei Grad $P_\varrho = n_\varrho$ und Höhe $P_\varrho = H_\varrho$. Dann ist wegen $|P(\xi)| = \prod_{\varrho=1}^{r} |P_\varrho(\xi)|$ und

$$|P_\varrho(\xi)| \geq \tilde{w}_{n_\varrho}(H_\varrho, \xi) \text{ offenbar } w_n(H, \xi) \geq \prod_{\varrho=1}^{r} \tilde{w}_{n_\varrho}(H_\varrho, \xi),$$

also

$$\frac{\log \dfrac{1}{w_n(H,\xi)}}{\log H} \leq \sum_{\varrho=1}^{r} \frac{\log \dfrac{1}{\tilde{w}_{n_\varrho}(H_\varrho,\xi)}}{\log H} \leq \sum_{\varrho=1}^{r} \left(1 + \frac{\log c_n}{\log H}\right) \frac{\log \dfrac{1}{\tilde{w}_{n_\varrho}(c_n H,\xi)}}{\log c_n H},$$

wobei in der zweiten Ungleichung benutzt worden ist, daß es eine nur von n abhängende Konstante c_n mit $H_\varrho \leq c_n H$ gibt[4]). Durch indirekte Schlußweise folgt daraus[5])

$$w_n(\xi) \leq \max_{n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n} \sum_{\varrho=1}^{r} \tilde{w}_{n_\varrho}(\xi),$$

also

$$\begin{aligned} \vartheta_n(\xi) &\leq \max_{n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n} \frac{\tilde{w}_{n_1}(\xi) + \cdots + \tilde{w}_{n_r}(\xi)}{n_1 + \cdots + n_r} \\ &\leq \max_{n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n} \left(\frac{\tilde{w}_{n_1}(\xi)}{n_1}, \ldots, \frac{\tilde{w}_{n_r}(\xi)}{n_r}\right), \end{aligned}$$

d. h. es ist $\vartheta_n(\xi) \leq \tilde{\vartheta}_\nu(\xi)$ für ein gewisses $\nu \leq n$, wie behauptet.

Ist also für eine Zahl ξ eine Abschätzung der Form

$$\tilde{\vartheta}_\nu(\xi) \leq F(\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

bewiesen, bei der $F(\nu)$ eine monoton wachsende Funktion ist, so gilt für jedes natürliche n auch

$$\vartheta_n(\xi) \leq \tilde{\vartheta}_{\nu(n)}(\xi) \leq F(\nu(n)) \leq F(n).$$

Daher werden wir uns beim Beweis von Satz 1 auf irreduzible Polynome beschränken können; doch wird davon nur in Form der Voraussetzung Gebrauch gemacht, daß keine mehrfachen Nullstellen auftreten sollen.

---

[3]) Vgl. auch Abschn. 6 dieser Arbeit.

[4]) Siehe z. B. [8], 3. Kap., Hilfssatz 16.

[5]) Zu beachten ist, daß die Zerlegung $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ von H abhängt.

Der folgende Hilfssatz erscheint uns auch unabhängig von dem hier vorliegenden Zusammenhang bemerkenswert; er wird daher etwas allgemeiner formuliert, als es für das Folgende notwendig ist.

Hilfssatz 6. *Zu jeder Zahl $\beta > 0$ und jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ gibt es eine Konstante $C > 0$ derart, daß für jedes Polynom $V(x)$ vom Grad n mit ganzrationalen Koeffizienten und alle natürlichen Zahlen H gilt:*

$$\sum_{\substack{x=-H\\ V(x)\neq 0}}^{H} \frac{1}{|V(x)|^{\beta}} < \begin{cases} C\,H^{1-\beta n} & \text{für } \beta n < 1\,,\\ C\log(H+1) & \text{für } \beta n = 1\,,\\ C & \text{für } \beta n > 1\,.\end{cases}$$

Beweis. Das Intervall $[-H, H]$ werde durch die Punkte

$$x_0 = -H,\ x_1, \ldots, x_q = H$$

so in Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ zerlegt, daß in jedem von ihnen die Polynome[6]) $V(x), \Delta V(x), \ldots, \Delta^{n-1} V(x)$ sämtlich monoton und im Innern von Null verschieden sind. Dies ist bei festem $V(x)$ offenbar mit einem $q \leqq n^2 + 1$ möglich. Dann genügt es, die Behauptung für ein einziges Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ an Stelle von $[-H, H]$ zu beweisen.

Auf Grund der Wahl der x_i sind auch die Funktionen

$$F_j(x) = |\Delta^{n-j} V(x)| \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

sämtlich in den Intervallen $[x_i, x_{i+1}]$ monoton. Daher gilt, wenn $x_i \leqq x \leqq x_{i+1} - 1$ ist,

$$(6)\qquad \Delta F_{j+1}(x) = \begin{cases} F_j(x), & \text{falls } F_{j+1}(x) \text{ in } [x_i, x_{i+1}] \text{ monoton wächst},\\ -F_j(x), & \text{falls } F_{j+1}(x) \text{ in } [x_i, x_{i+1}] \text{ monoton fällt}.\end{cases}$$

Sei r_i die kleinste ganze Zahl $\geqq x_i$ und $s_i = [x_{i+1}]$. Im folgenden denken wir uns das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ festgehalten und betrachten nur ganze Zahlen $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Durch Induktion soll gezeigt werden:

$$(7)\qquad F_j(x) \geqq \begin{cases} \dfrac{1}{j!}(x - r_i - (j-1))^j & \text{für } r_i + j - 1 \leqq x \leqq s_i\,,\\ & \text{falls } F_j(x) \text{ monoton wächst},\\ \dfrac{1}{j!}(s_i - x - (j-1))^j & \text{für } r_i \leqq x \leqq s_i - (j-1)\\ & \text{falls } F_j(x) \text{ monoton fällt}.\end{cases}$$

Wir nehmen zuerst an, die Funktion $F_1(x)$ sei in $[x_i, x_{i+1}]$ monoton wachsend. Da sie auf Grund der Voraussetzungen linear und ganzwertig ist, folgt

$$F_1(r_i) \geqq 0 \text{ und } F_1(x) \geqq x - r_i \quad \text{für} \quad r_i \leqq x \leqq s_i.$$

Analog ergibt sich, falls $F_1(x)$ monoton fällt,

$$F_1(s_i) \geqq 0 \text{ und } F_1(x) \geqq s_i - x \quad \text{für} \quad r_i \leqq x \leqq s_i\,.$$

Die Behauptung (7) sei nun für ein j mit $1 \leqq j < n$ erfüllt. Ist $F_{j+1}(x)$ monoton

---

[6]) Dabei ist, wie üblich, $\Delta F(x)$ die Funktion $F(x+1) - F(x)$ und $\Delta^{j+1} = \Delta(\Delta^j)$.

wachsend bzw. fallend, so gilt[7])

$$F_{j+1}(x) = F_{j+1}(r_i) + \sum_{\nu=r_i}^{x-1} \Delta F_{j+1}(\nu)$$

bzw.

$$F_{j+1}(x) = F_{j+1}(s_i) - \sum_{\nu=x}^{s_i-1} \Delta F_{j+1}(\nu) .$$

Wegen (6) und (7) erhält man daraus im ersten Falle[7a]) für $r_i + j \leq x \leq s_i$:

$$F_{j+1}(x) = F_{j+1}(r_i) + \sum_{\nu=r_i}^{x-1} \Delta F_{j+1}(\nu) \geq \sum_{\nu=r_i+j-1}^{x-1} F_j(\nu)$$

$$\geq \frac{1}{j!} \sum_{\nu=r_i+j-1}^{x-1} (\nu - r_i - (j-1))^j \geq \frac{1}{j!} \int\limits_0^{x-r_i-j} t^j\, dt = \frac{1}{(j+1)!} (x - r_i - j)^{j+1}$$

Analog folgt im zweiten Fall[7a]) für $r_i \leq x \leq s_i - j$:

$$F_{j+1}(x) = F_{j+1}(s_i) - \sum_{\nu=x}^{s_i-1} \Delta F_{j+1}(\nu) \geq \sum_{\nu=x+1}^{s_i-j+1} F_j(\nu)$$

$$\geq \frac{1}{j!} \sum_{\nu=x+1}^{s_i-j+1} (s_i - \nu - (j-1))^j \geq \frac{1}{j!} \int\limits_0^{s_i-x-j} t^j\, dt = \frac{1}{(j+1)!} (s_i - x - j)^{j+1}.$$

Damit ist (7) bewiesen, und man erhält speziell:

$$F_n(x) = |V(x)| \geq \begin{cases} \frac{1}{n!}(x - r_i - (n-1))^n & \text{für } r_i + n - 1 \leq x \leq s_i, \\ & \text{falls } |V(x)| \text{ monoton wächst,} \\ \frac{1}{n!}(s_i - x - (n-1))^n & \text{für } r_i \leq x \leq s_i - (n-1), \\ & \text{falls } |V(x)| \text{ monoton fällt.} \end{cases}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\sum_{x=r_i+n}^{s_i-n} \frac{1}{|V(x)|^\beta} \leq (n!)^\beta \sum_{x=1}^{s_i-r_i-2n+1} \frac{1}{x^{\beta n}} .$$

Schätzt man noch $|V(x)|$ für die restlichen Werte $r_i \leq x < r_i + n$ und $s_i - n < x \leq s_i$ trivial durch $|V(x)| \geq 1$ ab, so folgt

$$\sum_{\substack{x=r_i \\ V(x)\neq 0}}^{s_i} \frac{1}{|V(x)|^\beta} \leq 2n + (n!)^\beta \sum_{x=1}^{s_i-r_i-2n+1} \frac{1}{x^{\beta n}}$$

$$\leq 2n + (n!)^\beta \int\limits_1^{s_i-r_i} t^{-\beta n} dt \leq 2n + (n!)^\beta \int\limits_1^{2H} t^{-\beta n}\, dt ,$$

[7]) Ist der obere Summationsindex einer Summe kleiner als der untere, so soll sie den Wert 0 haben.

[7a]) Siehe „Zusatz bei der Korrektur" am Ende der Arbeit.

wobei die Ungleichung jetzt für alle Intervalle gilt. Wegen

$$\int_1^{2H} t^{-\beta n}\,dt \leqq \begin{cases} \dfrac{2^{1-\beta}}{1-\beta n} H^{1-\beta n} & \text{für} \quad \beta n < 1\,, \\ \log 2H & \text{für} \quad \beta n = 1\,, \\ \dfrac{1}{\beta n - 1} & \text{für} \quad \beta n > 1 \end{cases}$$

folgt die Behauptung.

Hilfssatz 7. *Ist $n \geqq 3$, so treten in dem Polynom*

$$D(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \text{Diskriminante von } a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

wenigstens zwei der $n+1$ Veränderlichen a_i in höherer als erster Potenz auf.

Beweis. Aus der Resultantendarstellung der Diskriminante folgt unmittelbar, daß in ihr das Glied $n^n a_0^{n-1} a_n^{n-1}$ auftritt.

3. Wir beweisen nun Satz 1, wobei wir uns im Hinblick auf Hilfssatz 1 auf den rechten Teil beider Behauptungen beschränken können. Zum Beweis von a) betrachten wir bei festem $\sigma > 0$ und natürlichem n die Menge $\mathfrak{R}_n(\sigma)$ der reellen Zahlen ξ mit $\vartheta_n(\xi) > 1 + \sigma$. Wie aus der Definition von $\vartheta_n(\xi)$ folgt, gehört eine Zahl ξ genau dann zu $\mathfrak{R}_n(\sigma)$, wenn zu unendlich vielen H ein Polynom P aus der Komplementärmenge $\mathfrak{P}_0(n, H)$ von $\mathfrak{P}(n, H-1)$ in $\mathfrak{P}(n, H)$ mit

$$0 < |P(\xi)| < H^{-n(1+\sigma)} \tag{8}$$

existiert. Wir ordnen jeder Nullstelle α_i eines Polynoms $P \in \mathfrak{P}(n, H)$ das Intervall

$$\mathrm{i}(\alpha_i) = \left[\operatorname{Re}\alpha_i - C_4 \frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}},\ \operatorname{Re}\alpha_i + C_4 \frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\right]$$

zu. Dann gilt für jedes reelle ξ mit (8), wenn α_i die nächstliegende Nullstelle von $P(x)$ ist, nach Hilfssatz 4

$$|\xi - \operatorname{Re}\alpha_i| \leqq |\xi - \alpha_i| < C_4 \frac{H^{n-2}|P(\xi)|}{\sqrt{|D(P)|}} < C_4 \frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\,,$$

d. h. $\xi \in \mathrm{i}(\alpha_i)$. Folglich wird $\mathfrak{R}_n(\sigma)$ für jedes H_0 durch die Gesamtheit dieser Intervalle $\mathrm{i}(\alpha_i)$ mit zugehörigen Polynomen $P \in \mathfrak{P}_0(n, H)$, $H \geqq H_0$, überdeckt. Also ist, wenn man mit μ_1 das lineare Lebesguesche Maß bezeichnet[*]),

$$\mu_1(\mathfrak{R}_n(\sigma)) \leqq \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)}' C_4 \frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\,. \tag{9}$$

Zur Abschätzung der Summe

$$\Sigma = \sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)}' \frac{1}{\sqrt{|D(P)|}}$$

haben wir zu berücksichtigen, daß wenigstens ein Koeffizient, etwa a_i, den Betrag H hat. Hält man dann alle Koeffizienten bis auf einen, etwa a_j mit $j \neq i$, fest, so wird $D(P)$ ein Polynom $V(a_j)$ in a_j, dessen Grad nach Hilfssatz 7 bei geeigneter Wahl von j sicher $\geqq 2$ ist. Daher wird nach Hilfssatz 6

[*]) Der Strich am Summenzeichen soll andeuten, daß nur Polynome P ohne mehrfache Nullstellen betrachtet werden, für die also $D(P) \neq 0$ ist.

für $\varepsilon > 0$ bei genügend großem H

$$\Sigma < C_8 H^{n-1} \sum_{\substack{a_j=-H \\ V(a_j)\neq 0}}^{H} \frac{1}{\sqrt{|V(a_j)|}} < C_9 H^{n-1+\varepsilon}.$$

Folglich ergibt sich auf Grund von (9)

$$\mu_1(\mathfrak{R}_n(\sigma)) \leq C_{10} \varliminf_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-2-\sigma n+n-1+\varepsilon}. \tag{10}$$

Ist nun $\sigma > 1 - \frac{2-\varepsilon}{n}$, so wird in der letzten Reihe der Exponent < -1, so daß Konvergenz eintritt und $\mu_1(\mathfrak{R}_n(\sigma)) = 0$ folgt. Läßt man σ eine Folge von Werten $\sigma_1; \sigma_2, \ldots$ mit $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ und $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_i = 1 - \frac{2}{n}$ durchlaufen, so erhält man

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\sigma_i) = \mathfrak{R}_n\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

und daher

$$\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\sigma_i)\right) = \mu_1\left(\mathfrak{R}_n\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right) = 0.$$

Also hat die Menge aller reellen Zahlen ξ mit $\vartheta_n(\xi) \leq 2 - \frac{2}{n}$, wie behauptet, das Lebesguesche Maß Eins.

Der Beweis der Aussage b) verläuft analog. Man betrachtet für festes $\sigma > 0$ die Menge $\mathfrak{K}_n(\sigma)$ der komplexen Zahlen ξ mit $\vartheta_n(\xi) > \frac{1}{2} + \sigma$. An Stelle des Intervalls $\mathfrak{i}(\alpha_i)$ verwenden wir jeweils den Kreis $\mathfrak{k}(\alpha_i)$ der Zahlen z mit $|z - \alpha_i| \leq C_4 \frac{H^{n(\frac{1}{2}-\sigma)-2}}{\sqrt{|D(P)|}}$. Dann erkennt man wie oben, daß jedes $\xi \in \mathfrak{K}_n(\sigma)$ von einem solchen Kreis überdeckt wird. Statt (10) erhält man, wenn man die Summe $\sum\limits_{P\in\mathfrak{P}(n,H)}' \frac{1}{|D(P)|}$ mit Hilfssatz 6 abschätzt und mit μ_2 das zweidimensionale Lebeguesche Maß bezeichnet, die Ungleichung

$$\mu_2(\mathfrak{K}_n(\sigma)) \leq \varliminf_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \sum_{P\in\mathfrak{P}_0(n,H)}' C_{11} \frac{H^{n(1-2\sigma)-4}}{|D(P)|} \leq C_{12} \varliminf_{H_0\to\infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{n(1-2\sigma)+n-5}.$$

Daraus ergibt sich ähnlich wie oben $\mu_2\left(\mathfrak{K}_n\left(1 - \frac{2}{n}\right)\right) = 0$, womit alles bewiesen ist.

4. Die Aussagen von Satz 1 lassen sich verallgemeinern, wenn man statt des Lebesgueschen Maßes den Hausdorffschen Maß- und Dimensionsbegriff[9]) heranzieht. Man erhält so den

Satz 2. *Für jedes $\sigma \geq 0$ und $n \geq 3$ ist*

$$\dim \mathfrak{R}_n(\sigma) \leq \frac{n+1}{\sigma n + 3} \tag{11}$$

---

[9]) Definitionen und hier verwendete Schreibweise findet man z. B. bei B. Volkmann [9].

und

$$\dim \mathfrak{R}_n(\sigma) \leqq \begin{cases} \dfrac{n}{(\sigma-\frac{1}{2})n+2}, & \textit{falls } \dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{n} \leqq \sigma \leqq \dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{n}, \\ \dfrac{n+1}{(\sigma-\frac{1}{2})n+3}, & \textit{falls } \dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{n} \leqq \sigma. \end{cases} \tag{12}$$

Es sei bemerkt, daß man, um aus diesem Satz nichttriviale Abschätzungen, also solche von der Form $\dim \mathfrak{R}_n(\sigma) < 1$ bzw. $\dim \mathfrak{R}_n(\sigma) < 2$ zu erhalten, die Ungleichungen (11) und (12) auf den Bereich $\sigma > 1 - \frac{2}{n}$ beschränken muß, wie dies gemäß Satz 1 zu erwarten ist.

Beweis. a) Für jedes H_0 bildet die Menge der Intervalle $\mathfrak{i}(\alpha_i)$ mit zugehörigem $H \geqq H_0$ eine $(2\,C_4\,H_0^{-2-\sigma n})$-Überdeckung von $\mathfrak{R}_n(\sigma)$. Daher gilt bei gegebenem δ mit $0 < \delta < 1$ für das δ-dimensionale Hausdorffsche Maß

$$\{\mathfrak{R}_n(\sigma)\}^\delta \leqq \varliminf_{H_0 \to \infty} C_{10} \sum_{H=H_0}^{\infty} \sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)}' \left(\frac{H^{-2-\sigma n}}{\sqrt{|D(P)|}}\right)^\delta.$$

Für die Summe $\sum'_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)} |D(P)|^{-\delta/2} = \Sigma$ erhält man nach Hilfssatz 6 die Abschätzung $\Sigma \leqq C_{11} H^{1-\delta+n-1} = C_{11} H^{n-\delta}$, so daß sich schließlich

$$\{\mathfrak{R}_n(\sigma)\}^\delta \leqq \varliminf_{H_0 \to \infty} C_{11} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-\delta(\sigma n+3)+n}$$

ergibt. Somit gilt $\{\mathfrak{R}_n(\sigma)\}^\delta = 0$ für alle $\delta > \dfrac{n+1}{\sigma n+3}$, woraus der erste Teil der Behauptung folgt.

b) Der Beweis für den komplexen Fall verläuft analog; nur muß man Werte δ mit $0 < \delta < 2$ zulassen, so daß sich — unter Verwendung von Hilfssatz 6 — die Abschätzung

$$\sum_{P \in \mathfrak{P}_0(n,H)}' |D(P)|^{-\frac{\delta}{2}} < \begin{cases} C_{12}\,H^{n-\delta} & \text{für } \delta < 1, \\ C_{12}\,H^{n-1}\log H & \text{für } \delta = 1, \\ C_{12}\,H^{n-1} & \text{für } \delta > 1 \end{cases}$$

ergibt, die dann zur Unterscheidung der beiden in der Behauptung (12) auftretenden Fälle führt.

5. Der Vollständigkeit halber führen wir auch Dimensionsabschätzungen für die beiden in Satz 3 nicht erwähnten Fälle $n = 1$ und $n = 2$ an. Für $n = 1$ ist nach v. JARNÍK [3]

$$\dim \mathfrak{R}_1(\sigma) = \frac{2}{\sigma+1} \quad (\sigma \geqq 1). \tag{13}$$

Ferner bestätigt man leicht, daß

$$\mathfrak{K}_1(\sigma) = \mathfrak{R}_1\left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \tag{14}$$

gilt.

Im Fall $n = 2$ gilt der

Hilfssatz 8. *Zu jedem β mit $0 < \beta < 1$ gibt es von H unabhängige positive Zahlen c und τ so, daß gilt:*

$$\sum_{P \in \mathfrak{P}_0(2,H)}' |D(P)|^{-\beta} < c\, H^{\frac{\tau}{\log\log H} + 2(1-\beta)}.$$

Beweis. Wir übernehmen aus [4] die Abschätzung[10])

$$\sum_{P\in\mathfrak{P}_0(2,H)}' |D(P)|^{-\beta} \leqq C_{13}\, H^{\frac{4}{\log\log H}} \left(H^{2(1-\beta)} + \sum_{m=1}^{5H^2} \frac{r(m)}{m^\beta} \right),$$

wobei $r^2(m)$ der größte gemeinsame quadratische Teiler von m und $4H$ ist. In der rechts stehenden Summe kommen zu vorgegebenem $r(m)=k$ höchstens die folgenden Glieder vor:

$$\sum_{i=1}^{\left[\frac{5H^2}{k}\right]} \frac{k}{(k\,i)^\beta} \leqq \frac{1}{1-\beta}\, k^{1-\beta} \left(\frac{5H^2}{k}\right)^{1-\beta} = C_{14}\, H^{2(1-\beta)}\,.$$

Die Anzahl der möglichen k ist jedenfalls kleiner oder gleich der Anzahl $d(4H)$ der Teiler von $4H$, und dafür gilt bekanntlich

$$d(4H) \leqq C_{15}\, H^{\frac{2}{\log\log H}}\,.$$

Die vorstehenden Ungleichungen zusammen liefern die Behauptung.

Auf Grund von Hilfssatz 8 erhält man, ähnlich wie beim Beweis von Satz 2, die Abschätzungen

$$\dim \mathfrak{R}_2(\sigma) \leqq \frac{3}{2\sigma+3} \qquad (\sigma \geqq 0) \tag{15}$$

und

$$\dim \mathfrak{K}_2(\sigma) \leqq \frac{2}{2\sigma+2} \qquad \left(\sigma \geqq -\frac{1}{4}\right). \tag{16}$$

Aus Satz 2 und den obigen Betrachtungen ergeben sich zwei Folgerungen.

Folgerung 1. Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}(\sigma)$ bzw. $\mathfrak{K}(\sigma)$ die Menge der reellen bzw. komplexen ξ mit $\vartheta(\xi) > 1+\sigma$ bzw. $\vartheta(\xi) > \frac{1}{2}+\sigma$, so ist für $\sigma \geqq 1$

$$\dim \mathfrak{R}(\sigma) \leqq \frac{2}{\sigma+1}$$

und

$$\dim \mathfrak{K}(\sigma) \leqq \frac{2}{\sigma+\frac{1}{2}}\,.$$

Beweis. Ist $\xi \in \mathfrak{R}(\sigma)$, so gibt es ein n mit $\vartheta_n(\xi) > 1+\sigma$. Somit ist

$$\mathfrak{R}(\sigma) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}_n(\sigma)$$

und folglich

$$\dim \mathfrak{R}(\sigma) \leqq \sup_{n=1}^{\infty} \dim \mathfrak{R}_n(\sigma) = \tau\,,$$

also nach (13), (15) und (11)

$$\tau \leqq \max\left(\frac{2}{\sigma+1}\,,\ \frac{3}{2\sigma+3}\,,\ \sup_{n=3,4,\ldots} \frac{n+1}{\sigma n+3}\right) = \frac{2}{\sigma+1}\,.$$

[10]) [4], Seite 267, Formeln (12) und (14).

Ähnlich erhält man nach (14), (16), (12) und (11) die Abschätzungen

$$\dim \mathfrak{K}(\sigma) \leq \begin{cases} \max\left(\frac{2}{\sigma+\frac{1}{2}}, \frac{3}{2\sigma+2}, \sup\limits_{n=3,4,\ldots} \frac{n}{(\sigma-\frac{1}{2})n+2}\right) & \text{für } 1 \leq \sigma < \frac{3}{2}, \\ \max\left(\frac{2}{\sigma+\frac{1}{2}}, \frac{3}{2\sigma+2}, \sup\limits_{n=3,4,\ldots} \frac{n+1}{(\sigma-\frac{1}{2})n+3}\right) & \text{für } \frac{3}{2} \leq \sigma, \end{cases}$$

und daraus ergibt sich die zweite obige Behauptung.

Folgerung 2. Für die Mengen T und U aller T- bzw. U-Zahlen[11]) gilt

$$\dim T = \dim U = 0\,.$$

Beweis. Für jedes (noch so große) σ gilt $T \subseteq \mathfrak{K}(\sigma)$ und $U \subseteq \mathfrak{K}(\sigma)$.

6. Die Definition des Typs ϑ einer transzendenten Zahl ξ läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: Sei $\mathfrak{Q}$ eine beliebige Menge von Polynomen mit ganzrationalen Koeffizienten und $\mathfrak{Q}(n, H)$ die Menge der $Q \in \mathfrak{Q}$ mit Grad $Q \leq n$ und Höhe $Q \leq H$. Dann setzt man für jede transzendente Zahl ξ

$$w_n(H, \xi, \mathfrak{Q}) = \min_{Q \in \mathfrak{Q}(n,H)} |Q(\xi)|$$

und definiert $w_n(\xi, \mathfrak{Q})$, $\vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q})$ und $\vartheta(\xi, \mathfrak{Q})$ entsprechend den Größen $w_n(\xi)$, $\vartheta_n(\xi)$ und $\vartheta(\xi)$. Für zwei solche Mengen $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ mit $\mathfrak{Q}_1 \subseteq \mathfrak{Q}_2$ gelten dann trivialerweise die Ungleichungen

$$w_n(H, \xi, \mathfrak{Q}_1) \geq w_n(H, \xi, \mathfrak{Q}_2), \quad \vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q}_1) \leq \vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q}_2)$$
$$w_n(\xi, \mathfrak{Q}_1) \leq w_n(\xi, \mathfrak{Q}_2), \quad \vartheta(\xi, \mathfrak{Q}_1) \leq \vartheta(\xi, \mathfrak{Q}_2)$$

für jedes ξ und jedes natürliche n. Man kann nun die Frage aufwerfen, unter welchen Voraussetzungen über $\mathfrak{Q}$ das Analogon der Mahlerschen Vermutung bewiesen werden kann. Wir geben dazu den folgenden Satz an, dessen Beweis wie der von Satz 1 verläuft.

Satz 3. *Sei $\mathfrak{Q}$ eine Menge von Polynomen mit ganzrationalen Koeffizienten, die mit jedem Polynom Q auch alle seine Teiler als Elemente enthält, und $\tilde{\mathfrak{Q}}$ die Teilmenge der Elemente von $\mathfrak{Q}$ ohne mehrfache Nullstellen. Gilt dann für ein natürliches n beim Grenzübergang $H \to \infty$ die Aussage*

(17) $$\sum_{Q \in \tilde{\mathfrak{Q}}_s(n,H)} \frac{1}{\sqrt{|D(Q)|}} = O(H^{\sigma n}) \qquad (\sigma > 0, \textit{ fest})$$

oder

(18) $$\sum_{Q \in \tilde{\mathfrak{Q}}_s(n,H)} \frac{1}{|D(Q)|} = O(H^{\sigma n}),$$

so ist für fast alle reellen ξ die Ungleichung $\vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q}) \leq 1 + \sigma - \frac{1}{n}$ bzw. für fast alle komplexen ξ die Ungleichung $\vartheta_n(\xi, \mathfrak{Q}) \leq \frac{1+\sigma}{2} - \frac{3}{2n}$ erfüllt.

Folgerung. Gilt (17) oder (18) für alle natürlichen n (oder auch nur für unendlich viele), so gilt für fast alle reellen ξ die Ungleichung $\vartheta(\xi, \mathfrak{Q}) \leq 1 + \sigma$ bzw. für fast alle komplexen ξ die Ungleichung $\vartheta(\xi, \mathfrak{Q}) \leq \frac{1+\sigma}{2}$.

[11]) Siehe Th. Schneider, a. a. O.[1])

Für Satz 3 lassen sich leicht Beispiele bilden, wenn man bedenkt, daß die Voraussetzungen (17) und (18) immer erfüllt sind, wenn die Anzahl $A_n(H)$ der Elemente von $\mathfrak{Q}_0(n, H)$ der Bedingung $A_n(H) = O(H^{\sigma n})$ genügt. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn man verlangt, daß die auftretenden Grade n oder auch die Koeffizienten a_i gewissen Mengen angehören sollen, über die man geeignete Dichtevoraussetzungen macht.

Zusatz bei der Korrektur. Im Beweis von Hilfssatz 6 sind nur die Fälle behandelt, daß $F_{j+1}(x)$ und $F_j(x)$ im Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ entweder beide monoton wachsen oder beide monoton fallen. Nimmt man nun an, daß $F_{j+1}(x)$ monoton wächst, aber $F_j(x)$ monoton fällt, so erhält man

$$F_{j+1}(x) \geqq \sum_{\nu = r_i + j - 1}^{x-1} F_j(\nu) \geqq \frac{1}{j!} \sum_{\nu = r_i + j - 1}^{x-1} (s_i - \nu - (j-1))^j$$

$$\geqq \frac{1}{j!} \sum_{\nu=1}^{x - r_i - j + 1} \nu^j \geqq \frac{1}{j!} \int_0^{x - r_i - j} t^j \, dt,$$

womit auch in diesem Falle der Induktionsschluß durchgeführt ist. Analog schließt man, wenn $F_{j+1}(x)$ monoton fällt, aber $F_j(x)$ monoton wächst.

Schließlich möchten wir erwähnen, daß Hilfssatz 6 einfacher und kürzer dadurch zu beweisen ist, daß man von der Intervalleinteilung $-H, \beta_1, \ldots, \beta_n, H$ ausgeht, wobei $\beta_1, \ldots, \beta_n$ die nach wachsender Größe geordneten Realteile der Nullstellen von $V(x)$ sind, und die Summation über $|V(x)|^{-\beta}$ in diesen Intervallen einzeln ausführt.

Literatur

[1] Chintschin, A. J.: Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Perron. Math. Z. **22**, 274—284 (1925). — [2] Feldman, N. I.: Approximation einiger transzendenter Zahlen. I. (russ.). Iswestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **15**, 53—74 (1951). — [3] Jarník, V.: Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Maß. Mat. Sbornik **36**, 371—382 (1929). — [4] Kasch, F.: Über eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen. Math. Z. **70**, 263—270 (1958). — [5] Kubilyus, J. F.: Über die Anwendung einer Winogradowschen Methode auf die Lösung eines Problems aus der metrischen Zahlentheorie (russ.). Dokl. Akad. Nauk SSSR, N.S. **67**, 783—786 (1949). — [6] LeVeque, W. J.: Note on S-numbers. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 189—190 (1950). — [7] Mahler, K.: Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. Math. Ann. **106**, 131—139 (1932). — [8] Schneider, Th.: Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957. — [9] Volkmann, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. I. Math. Z. **58**, 284—287 (1953).

(Eingegangen am 20. Juni 1958)

GANI, J.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 454—465 (1958)

Elementary Methods for an Occupancy Problem of Storage

By
J. GANI in Nedlands, Western Australia

1. Introduction

The publication of MORAN's basic paper [6] on the probability theory of storage systems has led to various developments which are briefly reviewed in [1]; the problem of first emptiness in dams has, however, received little attention except in the recent work of KENDALL [5]. This first emptiness is an event closely analogous to the first free time of a server in single-server queues; for certain such systems, TAKÁCS [8] has obtained general results whose application to the theory of storage has not been sufficiently stressed.

In this paper, the problem is formulated in terms of storage theory. For a dam with the initial content $u > 0$ at time $t = 0$, fed by discrete additive inputs, and with a known release rule, it is required to find the probability that emptiness occurs for the first time at $t = T > 0$. We consider the first emptiness of two such infinite dams, one in discrete and the other in continuous time. For both, the mathematical model leads to a special type of occupancy problem; the probabilities of first emptiness, obtainable from general formulae of KENDALL [5] and TAKÁCS [8], may then be derived by elementary methods.

A model of the finite dam in discrete time subject to inputs with a geometric distribution and a deterministic release rule has already been considered by MORAN [7]. If the dam is infinite, its content $Z_t = 0, 1, \ldots$ is given at the discrete times $t = 0, 1, \ldots$ by the equation

$$Z_{t+1} = Z_t + X_t - \operatorname{Min}\{Z_t + X_t, M\}, \tag{1}$$

where $X_t = 0, 1, \ldots$ is the random input during the interval $(t, t+1)$. These inputs are additive, and are equally and independently distributed in unit time intervals as the geometric distribution

$$f(x, 1) = (1-p)p^x \qquad (0 < p < 1;\ x = 0, 1, \ldots).$$

For the interval of time $\tau (\tau = 1, 2, \ldots)$, the input distribution is negative binomial of the form

$$f(x, \tau) = (1-p)^\tau \binom{\tau + x - 1}{x} p^x \qquad (x = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

The term $\operatorname{Min}\{Z_t + X_t, M\}$ indicates that just before the time $t + 1$, the smaller of $Z_t + X_t$ or M is released from the dam; M is integral, and is taken

as $M = 1$ for simplicity, the methods used throughout being equally applicable if $M > 1$. We denote the initial dam content Z_0, also an integer, by $Z_0 = u > 0$.

Our second model for the infinite dam in continuous time may be represented by

$$(3) \qquad Z(t + \delta t) = Z(t) + \delta X(t) - \operatorname{Min}\{Z(t), \delta t\},$$

where $0 \leq Z(t) < \infty$ is the dam content at time $0 \leq t < \infty$, and $X(t) = 0, h, 2h, \ldots$ the total input up to time t is a Poisson process with constant parameter λ. Inputs are additive, their distribution in any interval τ being

$$(4) \qquad f(x, \tau) = e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^{x/h}}{(x/h)!} \qquad (x = 0, h, 2h, \ldots).$$

In the small interval δt, an amount $\delta X(t) = h$ or 0 flows into the dam with probabilities $\lambda\,\delta t + o(\delta t)$ and $1 - \lambda\delta t - o(\delta t)$ respectively, the probability of more than one input in δt being of order $o(\delta t)$. Lastly the term $\operatorname{Min}\{Z(t), \delta t\}$ indicates a continuous release from the dam at constant unit rate, except when the dam is empty. As before, the initial content of the dam $Z(0)$ is denoted by $Z(0) = u > 0$, where u need no longer be integral.

2. First emptiness as an occupancy problem

Consider the discrete dam (1) whose initial content at $t = 0$ is $Z_0 = u > 0$ (u integral). It is clear that since there is a unit release $M = 1$ just before $t = 1, 2, \ldots,$ emptiness cannot occur before the time $T = u$. The dam may, however, become empty thereafter at any instant $T = u + r\ (r = 0, 1, 2, \ldots)$, depending on the r inputs entering the dam in the interval $(0, T)$. We denote the probability of first emptiness at time $T \geq u$ by

$$g(u, T) = Pr\{Z_T = 0 \mid Z_0 = u, Z_t > 0 \text{ for all } 0 < t < T\}.$$

It is readily seen from Figure 1 that any realisation R of the process Z_t resulting in first emptiness at $T = u + r$ must lie on or above path A, and on or below path B, without touching the time-axis until the instant $T = u + r$. If the region between times $t = 0$ and $t = u$ is thought of as cell r, and that between $t = u + r - (i + 1)$ and $t = u + r - i$ as cell $i\,(i = 0, \ldots, r - 1)$, the non-negative numbers x_j of inputs in each cell $j\,(j = 0, 1, \ldots, r)$ will be

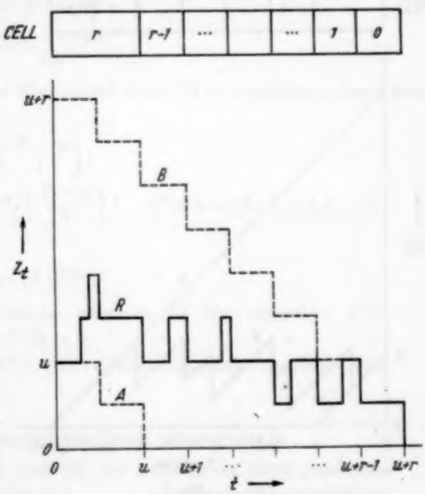

Fig. 1

such that not only is their total

(5) $$\sum_{j=0}^{r} x_j = r\,,$$

but also

(6) $$x_r \geq 1;\ x_r + x_{r-1} \geq 2;\ \ldots;\ x_{r-1} + \cdots + x_1 = r$$

whence $x_0 = 0$. The conditions (6) may more conveniently be written as

$$x_0 = 0;\ x_0 + x_1 \leq 1;\ \ldots;\ x_0 + \cdots + x_{r-1} \leq r-1\,,$$

or simply

(7) $$\sum_{j=0}^{i} x_j \leq i\ (x_j \geq 0;\ i = 0, 1, \ldots, r-1);$$

in conjunction with (5) this gives $x_r \geq 1$.

First emptiness of the dam (3) in continuous time lends itself to precisely the same formulation; here, however, $u > 0$ is not necessarily integral. Since there is a continuous release at constant unit rate, emptiness cannot occur before $T = u$, but the dam may become empty for the first time at any instant $T = u + rh$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ depending on the r inputs in $(0, T)$. As before, the probability of first emptiness at time $T \geq u$ is written

$$g(u, T) = Pr\{Z(T) = 0 \mid Z(0) = u, Z(t) > 0 \text{ for all } 0 < t < T\}\,.$$

From Figure 2, it is clear that any realisation R of the process $Z(t)$ resulting in first emptiness at $T = u + rh$ lies on or above path A, and on or below path B, without touching the time-axis until the instant $T = u + rh$. If, again, the regions between times $(0, u)$, $(u, u+h)$, $\ldots$, $(u + [r-1]\,h,\ u + rh)$ are thought of as cells $r, r-1, \ldots, 0$ respectively, the non-negative numbers x_j of inputs in each cell $j\,(j = 0, 1, \ldots, r)$ will satisfy the conditions (5), and (6) or (7).

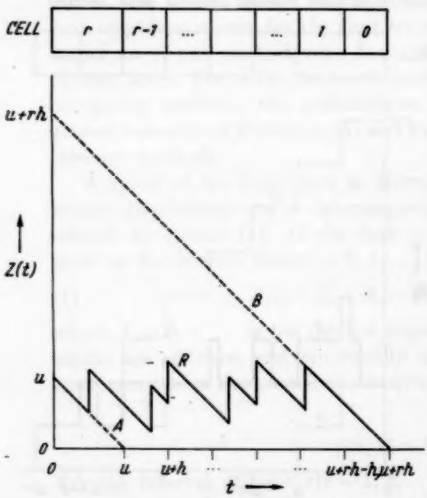

Fig. 2

Our models for first emptiness in the dams (1) and (3) thus lead to a special occupancy problem of the type discussed by FELLER [3]; Chapter II.5). In classical terms, we require the probability of distinguishable arrangements of r indistinguishable objects (inputs in this case) in $r+1$ cells, such that if there are $x_0, \ldots, x_r$ objects in each cell $0, \ldots, r$ prespectively, these are subject not only to the condition (5) that their total be r, but also to the condition (6) or (7).

In deriving the probabilities of these arrangements (or the equivalent first emptiness) by elementary methods, extensive use will be made of

probability generating functions (p. g. f.'s). Before continuing however, we obtain the probabilities of first emptiness $g(u, T)$ for both dams (1) and (3) from Kendall's general formula [5], eqn. 17). For the dam with initial content $u > 0$, fed by additive inputs having a discrete distribution $f(x, \tau)$ in the time-interval τ, it may readily be shown that the probability $g(u, T)$ of first emptiness at time $T \geqq u$ is

$$g(u, T) = \frac{u}{T} f(T-u, T). \tag{8}$$

Kendall has obtained the Laplace transform of this T-distribution, but for uniformity we use its equivalent p. g. f. derived from the following result of Takács's [8], eqn. 67). Let $\{\psi(\theta)\}^{\tau}$ be the p. g. f. of the input distribution $f(x, \tau)$, then the p.g.f. $\varphi(\theta)$ of $g(u, T)$ is given by $\{F(\theta)\}^{u}$, where for $|\theta| \leqq 1, F(\theta)$ is the uniquely determined analytic solution of the functional equation

$$F(\theta) = \theta\, \psi\{F(\theta)\} \tag{9}$$

subject to the condition $F(0) = 0$.

For the case of the dam (1) in discrete time with geometric inputs in unit time-intervals, writing $q = 1 - p$, the probability of first emptiness will be

$$\begin{aligned} g(u, T) &= \frac{u}{T} q^{T} \binom{2T-u-1}{T-u} p^{T-u} \\ &= u q^{T} p^{T-u} \frac{(2T-u-1)!}{(T-u)!\, T!} \quad (T = u + r;\ r = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{10}$$

where the p. g. f. of this distribution is given by

$$\varphi(\theta) = \left\{\frac{1-(1-4pq\theta)^{1/2}}{2p}\right\}^{u}. \tag{11}$$

The probability of first emptiness for the second dam (3) in continuous time, with Poisson inputs, is

$$\begin{aligned} g(u, T) &= \frac{u}{T} e^{-\lambda T} (\lambda T)^{(T-u)h^{-1}} \Big/ \left(\frac{T-u}{h}\right)! \\ &= e^{-\lambda T} \lambda u (\lambda T)^{(T-u)h^{-1}-1} \Big/ \left(\frac{T-u}{h}\right)! \quad (T = u + rh;\ r = 0, 1, \ldots), \end{aligned} \tag{12}$$

and the p. g. f. of the distribution is

$$\varphi(\theta) = \{F(\theta)\}^{u}, \tag{13}$$

where for $|\theta| \leqq 1$, $F(\theta)$ is the unique solution of the equation $F(\theta) = \theta \exp\{-\lambda[1 - F^{h}(\theta)]\}$, such that $F(0) = 0$.

We proceed to derive these results from quite different considerations, using elementary methods.

3. The number of distinguishable input arrangements

We first find for both dams (1) and (3) the number of distinguishable arrangements of r inputs into $r + 1$ cells $0, 1, \ldots, r$, subject to the restrictions (5) and (7).

It is well known that for the occupancy problem giving rise to Bose-Einstein statistics, where r indistinguishable objects are arranged in $m + 1$

cells without any restrictions, the number of distinguishable arrangements is $\binom{m+r}{r}$. This result is usually obtained by simple combinatorial considerations ([3]; Chapter II. 5); we derive it by means of p.g.f.'s to illustrate the methods used later in this paper.

Consider the number x_j ($x_j = 0, 1, \ldots, r$) of objects in cell j ($j = 0, 1, \ldots, m$), such that each value of x_j has equal probability $(r+1)^{-1}$, and is independent of the numbers in the other cells. The p.g.f. of the distribution for x_j is then

$$(14)\quad P_1(\theta_j) = (r+1)^{-1}(1+\theta_j+\cdots+\theta_j^r) = (r+1)^{-1}(1-\theta_j)^{-1}(1-\theta_j^{r+1})$$

while the joint p.g.f. of all x_j ($j = 0, 1, \ldots, m$) is

$$(15)\quad \begin{aligned} P_{m+1}(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m) &= (r+1)^{-m-1} \prod_{j=0}^{m} (1-\theta_j)^{-1}(1-\theta_j^{r+1}) \\ &= \sum_{x_0, \ldots, x_m = 0}^{r} (r+1)^{-m-1}\, \theta_0^{x_0} \cdots \theta_m^{x_m}, \end{aligned}$$

each distinguishable arrangement having the probability $(r+1)^{-m-1}$.

To obtain the probability that $\sum_{j=0}^{m} x_j = r$, we write $\theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_m = \theta$ in the p.g.f. (15), so that this becomes

$$(16)\quad \begin{aligned} \Phi_{m+1}(\theta) = P_{m+1}(\theta, \ldots, \theta) &= (r+1)^{-m-1}\{(1-\theta)^{-1}(1-\theta^{r+1})\}^{m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{r(m+1)} p_{m+1,i}\, \theta^i. \end{aligned}$$

Clearly $p_{m+1,r}$ is the required probability $Pr\left\{\sum_{i=0}^{m} x_j = r\right\}$, and this is readily shown to be

$$(17)\quad \begin{aligned} p_{m+1,r} &= \frac{1}{r!}\left\{\left(\frac{d}{d\theta}\right)^r \Phi_{m+1}(\theta)\right\}_{\theta=0} \\ &= (r+1)^{-m-1}\binom{m+r}{r}. \end{aligned}$$

The number of arrangements of r objects in $m+1$ cells, each having the probability $(r+1)^{-m-1}$, is thus $\binom{m+r}{r}$.

In the occupancy problem associated with our first emptiness processes, we consider the number of arrangements of r objects in $r+1$ cells such that not only will the condition (5) that $\sum_{j=0}^{r} x_j = r$ hold, but also $\sum_{j=0}^{i} x_j \leq i$ ($x_j \geq 0$; $i = 0, 1, \ldots, r-1$) as in (7). The probability of such arrangements is the sum of all those coefficients of terms $\theta_0^{x_0} \ldots \theta_r^{x_r}$ in the p.g.f.

$$(18)\quad \begin{aligned} P_{r+1}(\theta_0, \ldots, \theta_r) &= (r+1)^{-r-1} \prod_{j=0}^{r} (1-\theta_j)^{-1}(1-\theta_j^{r+1}) \\ &= \sum_{x_0, \ldots, x_r = 0}^{r} (r+1)^{-r-1}\, \theta_0^{x_0} \cdots \theta_r^{x_r} \end{aligned}$$

of type (15), for which the x_j ($j = 0, \ldots, r$) are subject to conditions (5) and (7).

Let us construct the polynomials $G_i(\theta) = (r+1)^{-i-1} \sum_{j=0}^{i} a_{ij}\theta^j$ $(i = 0, \ldots, r)$ defined by

$$
(19) \qquad \begin{cases} G_0(\theta) = (r+1)^{-1} \\ G_i(\theta) = \langle P_1(\theta)\, G_{i-1}(\theta)\rangle \qquad (i = 1, \ldots r) \end{cases}
$$

where $P_1(\theta)$ is of the form (14), and the brackets $\langle\,\rangle$ in $G_i(\theta)$ indicate the truncation of all terms in θ whose degree is higher than the i-th. From its definition, it is clear that $G_r(\theta)$, itself not a p.g.f., is that part of $\Phi_{r+1}(\theta) = P_{r+1}(\theta, \ldots, \theta)$ for which the conditions (7) hold. If condition (5) is also applied, $(r+1)^{-r-1}a_{rr}$ is obviously the probability required, a_{rr} being the number of restricted arrangements of r objects in $r+1$ cells. We proceed to evaluate the coefficients a_{ij} $(j = 0, 1, \ldots, i)$.

From (19) we see that a_{00} is defined as $a_{00} = 1$. In general, since

$$
(20) \qquad \sum_{j=0}^{i} a_{ij}\,\theta^j = \left\langle (1+\theta+\cdots+\theta^r) \sum_{k=0}^{i-1} a_{i-1,k}\,\theta^k \right\rangle \qquad (0 < i \leq r),
$$

it follows that

$$
(21) \qquad a_{ij} = \sum_{k=0}^{j} a_{i-1,k} \qquad (j = 0, 1, \ldots, i)
$$

where $a_{i-1,i} = 0$. It is now easily proved by induction that

$$
(22) \qquad a_{ij} = (i-j+1)\frac{(i+j)!}{(i+1)!\,j!} \qquad (j \leq i).
$$

For, assuming (22), we should have by analogy with (21) that

$$
a_{i+1,j} = \sum_{k=0}^{j} \frac{(i-k+1)\,(i+k)!}{(i+1)!\,k!} = \sum_{k=0}^{j} \binom{i+k}{k} - \sum_{k=0}^{j-1} \binom{i+k+1}{k} \quad (j \leq i+1).
$$

This coefficient is the constant term in the expression

$$
\begin{aligned}
(1-\theta)^{-i-1}&(1+\theta^{-1}+\cdots+\theta^{-j}) - (1-\theta)^{-i-2}(1+\theta^{-1}+\cdots+\theta^{-j+1}) \\
&= (\theta^{-j} - 2\,\theta^{-j+1} + \theta^2)\sum_{j=0}^{\infty}\binom{i+j+2}{j}\theta^j,
\end{aligned}
$$

which is readily found to be

$$
\binom{i+j+2}{j} - 2\binom{i+j+1}{j-1} = (i-j+2)\frac{(i+j+1)!}{(i+2)!\,j!}.
$$

Thus $a_{i+1,j}$ is of the form (22). It follows that the number of distinguishable arrangements of r objects in $r+1$ cells subject to conditions (7) is

$$
(23) \qquad a_{rr} = \frac{2r!}{(r+1)!\,r!};
$$

this is the number of distinguishable input arrangements for our equivalent first emptiness problem.

4. Probabilities of first emptiness for the dam with geometric inputs

Precisely the same methods may be used to find the probabilities of first emptiness of the dam (1) at times $T = u + r$, when its initial content is the integer $u > 0$, and the inputs flowing into it per unit time have a geometric

distribution. If, in the model of Section 2, the numbers $x_0, x_1, \ldots, x_r$ of inputs for the $r+1$ cells may take values $x_j = 0, 1, \ldots$ $(j = 0, \ldots, r)$ which are entirely unrestricted, their joint p.g.f. is

$$(24) \qquad P_{r+1}(\theta_0, \ldots, \theta_r) = q^{u+r}(1 - p\,\theta_r)^{-u} \prod_{j=0}^{r-1} (1 - p\,\theta_j)^{-1},$$

where $q = 1 - p (0 < p < 1)$, $q(1 - p\,\theta_j)^{-1} (j = 0, \ldots, r-1)$ is the p.g.f. of the x_j inputs in cell j whose distribution is geometric, and $q^u(1 - p\,\theta_r)^{-u}$ is the p.g.f. of the x_r inputs of cell r whose distribution is negative binomial.

If however, the restrictive conditions (5) and (7) are to hold, we construct the polynomials $F_i(\theta) = q^{i+1+\delta_{ir}(u-1)} \sum_{j=0}^{i} b_{ij}\theta^j$ $(i = 0, \ldots, r)$ defined by

$$(25) \qquad \begin{cases} F_0(\theta) = q \\ F_i(\theta) = \langle q(1 - p\,\theta)^{-1} F_{i-1}(\theta)\rangle \qquad (i = 1, \ldots, r-1) \\ F_r(\theta) = \langle q^u(1 - p\theta)^{-u} F_{r-1}(\theta)\rangle \end{cases}$$

where, as before, the brackets $\langle\,\rangle$ in $F_i(\theta)$ indicate the truncation of all terms in θ of degree higher than the i-th. It is clear once again that $F_r(\theta)$, itself not a p.g.f., is that part of $\Phi_{r+1}(\theta) = P_{r+1}(\theta, \ldots, \theta)$ satisfying the conditions (7); its last term $b_{rr}q^{u+r}$ is the probability of the various input arrangements subject to the additional condition (5).

Since the functions $F_i(\theta)$ are almost identical for $i = 0, 1, \ldots, r-1$ with the polynomials $G_i(\theta)$ of (19), with q substituted for $(r+1)^{-1}$ and $p\theta$ for θ, it is possible from the equation (22) for a_{ij} to write the new coefficients $b_{ij} (j \leq i;\ i = 0, 1, \ldots, r-1)$ directly as

$$(26) \qquad b_{ij} = p^j\,(i - j + 1)\,\frac{(i+j)!}{(i+1)!\,j!}\,.$$

The required coefficient b_{rr} may now be obtained from the equation (25) for $F_r(\theta)$ as

$$(27) \qquad \begin{aligned} b_{rr} &= p^r \sum_{j=0}^{r-1} (r - j)\,\frac{(r+j-1)!}{r!\,j!} \binom{u+r-j-1}{r-j} \\ &= p^r \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1+j}{j} \binom{u+r-j-1}{r-j} - \sum_{j=0}^{r-2} \binom{r+j}{j} \binom{u+r-j-2}{r-j-1} \right\}. \end{aligned}$$

This is readily verified to be the constant term in the expression

$$\begin{aligned} p^r\,[\theta^{-r}(1-\theta)^{-r}\{(1-\theta)^{-u} - 1\} - \theta^{-r+1}(1-\theta)^{-r-1}\{(1-\theta)^{-u} - 1\}] \\ = p^r\,\theta^{-r}(1 - 2\,\theta)\,(1-\theta)^{-u-r-1}\{1 - (1-\theta)^u\}, \end{aligned}$$

so that b_{rr} can be written as

$$(28) \qquad b_{rr} = p^r\,u\,\frac{(u + 2\,r - 1)!}{r!\,(u+r)!}\,.$$

It follows that the probability of first emptiness of the dam at times $T = u + r$ $(r = 0, 1, \ldots)$ is

$$(29) \qquad g(u, u+r) = q^{u+r}\,p^r\,u\,\frac{(u + 2\,r - 1)!}{r!\,(u+r)!}$$

which is precisely of the form (10) obtained from Kendall's equation. We show that this defines a proper distribution only if the mean input per unit time does not exceed the release, or $\frac{p}{q} \leq 1$.

Let $\varphi(\theta)$ be the generating function (g.f.) of the probabilities $g(u, u + r)$ of first emptiness at times $T = u + r$; this is

$$\varphi(\theta) = u(q\theta)^u \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(u + 2r - 1)!}{r!\,(u + r)!} (qp\theta)^r , \tag{30}$$

where for simplicity the values of θ will be restricted to $0 < \theta \leq 1$. This may equally well be written

$$\varphi(\theta) = (q\theta)^u \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} (qp\theta)^r \binom{u + 2r - 1}{r} - qp\theta \sum_{r=0}^{\infty} (qp\theta)^r \binom{u + 2r + 1}{r} \right\}; \tag{31}$$

the terms of (31) are readily seen to be the constant in α of the function

$$\begin{aligned} \psi(\theta, \alpha) = (q\theta)^u \Bigg\{ & \sum_{r=0}^{\infty} (qp\theta)^r (1 - \alpha)^{-u-r} \alpha^{-r} - \\ & - qp\theta \sum_{r=0}^{\infty} (qp\theta)^r (1 - \alpha)^{-u-r-2} \alpha^{-r} \Bigg\} \end{aligned} \tag{32}$$

in which α may be complex, and must clearly have modulus $|\alpha| < 1$. Summing the terms in (32), we obtain

$$\psi(\theta, \alpha) = (q\theta)^u (1 - \alpha)^{-u-1} \alpha \{(1 - \alpha)^2 - qp\theta\} \{(1 - \alpha)\alpha - qp\theta\}^{-1}$$

where $\left| \frac{qp\theta}{(1 - \alpha)\alpha} \right| < 1$ for convergence. This condition is satisfied if, assuming $q \neq p$,

$$\left| \frac{qp\theta}{(1 - \alpha)\alpha} \right| \leq \frac{qp}{|\alpha|\,\{1 - |\alpha|\}} < 1 ,$$

or $|\alpha|^2 - |\alpha| + pq < 0$, so that $\mathrm{Min}\{p, q\} < |\alpha| < \mathrm{Max}\{p, q\}$.

To obtain $\varphi(\theta)$, the constant in α of the function $\psi(\theta, \alpha)$, we need only find the residue of $\alpha^{-1} \psi(\theta, \alpha)$ at its smaller pole $\alpha_0(\theta) = \frac{1}{2}\{1 - (1 - 4pq\theta)^{1/2}\}$ where $\alpha_0(\theta) \leq \mathrm{Min}(p, q)$ for $0 < \theta \leq 1$, the assumption $q \neq p$ continuing to hold. The larger pole is $\alpha_1(\theta) = \frac{1}{2}\{1 + (1 - 4pq\theta)^{1/2}\} \geq \mathrm{Max}(p,q)$ for $0 < \theta \leq 1$. Thus

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= \lim_{\alpha = \alpha_0(\theta)} \alpha^{-1} \psi(\theta, \alpha)(\alpha - \alpha_0) \\ &= (q\theta)^u (1 - \alpha_0)^{-u-1} (\alpha_1 - \alpha_0)^{-1} \{(1 - \alpha_0)^2 - qp\theta\} \\ &= \left\{ \frac{1 - (1 - 4qp\theta)^{1/2}}{2p} \right\}^u , \end{aligned} \tag{33}$$

exactly as in equation (11). A similar result for the g.f. of an analogous stochastic process in queueing theory has been derived by Takács [8]. It may readily be shown that this expression for the g.f. will also hold when $p = q = \frac{1}{2}$.

If $pq^{-1} \leqq 1$, so that the mean input into the dam does not exceed the release per unit time, the probabilities $g(u, u+r)$ define a proper distribution. For

$$\varphi(1) = \sum_{r=0}^{\infty} g(u, u+r) = \left\{\frac{1-|p-q|}{2p}\right\}^u = 1; \tag{34}$$

in this case, the dam must eventually become empty. The restriction $pq^{-1} < 1$ is Foster's condition [4] for the system to be non-dissipative and is necessary for the existence of a statio ıry solution to this infinite dam (1).

The mean and variance of $T = u + r$ when $pq^{-1} < 1$ are easily found from (33); they are

$$\begin{cases} E(T) = \dfrac{qu}{q-p} \\ v(T) = \dfrac{pqu}{(q-p)^3}. \end{cases} \tag{35}$$

It is clear that in the limit, when $p = q = \frac{1}{2}$, $E(T)$ becomes infinite.

For $pq^{-1} > 1$, the sum of the probabilities $g(u, u+r)$ is

$$\varphi(1) = \sum_{r=0}^{\infty} g(u, u+r) = \left\{\frac{1-|p-q|}{2p}\right\}^u = \left(\frac{q}{p}\right)^u. \tag{36}$$

Here, the probabilities of first emptiness do not form a proper distribution, and there is a probability $1 - (qp^{-1})^u > 0$ that the dam never empties.

5. The dam with Poisson inputs

By methods identical with those of Section 4, we may derive the probabilities of first emptiness at times $T = u + rh$ for the dam (3). This is the dam in continuous time with initial content $u > 0$, fed by Poisson inputs h, and subject to a continuous release at constant unit rate except when it is empty. Some of the results below have been obtained differently in another context by Gani and Prabhu [2].

For the model described in Section 2, the joint p.g.f. of the numbers $x_0, \ldots, x_r$ of inputs for the $r+1$ cells, each with entirely unrestricted values $x_j = 0, 1, \ldots$ $(j = 0, \ldots, r)$ is now

$$P_{r+1}(\theta_0, \ldots, \theta_r) = e^{-\lambda(u+rh)}\, e^{\lambda(\theta_0 h + \cdots + \theta_{r-1} h + \theta_r u)}, \tag{37}$$

where $e^{-\lambda h(1-\theta_j)}$ is the p.g.f. of the Poisson distribution associated with the cell j $(j = 0, \ldots, r-1)$ and $e^{-\lambda u(1-\theta_r)}$ that associated with cell r.

If, as before, conditions (5) and (7) for the x_j are to hold, we construct the polynomials

$$H_i(\theta) = e^{-\lambda\{(i+1)h + \delta_{ir}(u-1)\}} \sum_{j=0}^{i} c_{ij}\,\theta^j/j! \qquad (i = 0, \ldots, r)$$

defined by

$$\begin{cases} H_0(\theta) = e^{-\lambda h} \\ H_i(\theta) = \langle e^{-\lambda h(1-\theta)} H_{i-1}(\theta)\rangle \qquad (i = 1, \ldots, r-1) \\ H_r(\theta) = \langle e^{-\lambda u(1-\theta)} H_{r-1}(\theta)\rangle \end{cases} \tag{38}$$

where the brackets $\langle\,\rangle$ in $H_i(\theta)$ indicate the truncation of all terms in θ of degree higher than the i-th. Once again $H_r(\theta)$, itself not a p.g.f., is that part of $\Phi_{r+1}(\theta) = P_{r+1}(\theta, \ldots, \theta)$ satisfying conditions (7), and $e^{-\lambda(u+rh)}\,\frac{c_{rr}}{r!}$ is the probability of the input arrangements also subject to (5). We proceed to obtain the coefficients $c_{ij}(j \leq i;\, i = 0, 1, \ldots, r)$.

Let us first consider c_{ij} for $i = 0, 1, \ldots, r-1$; from (38) we find that

$$(39)\qquad c_{ij} = \sum_{k=0}^{j} c_{i-1,k}\binom{j}{k}(\lambda h)^{j-k}$$

where $c_{i-1,i} = 0$. It is readily shown by induction that this coefficient is

$$(40)\qquad c_{ij} = (i-j+1)\,(i+1)^{j-1}(\lambda h)^j \quad (j \leq i;\, i = 0, 1, \ldots, r-1)\,.$$

For, assuming (40), it follows by the use of equation (39) that

$$c_{i+1,j} = \sum_{k=0}^{j}(i-k+1)\,(i+1)^{k-1}\binom{j}{k}(\lambda h)^j$$
$$= \{(i+2)^j - j(i+2)^{j-1}\}\,(\lambda h)^j = (i-j+2)\,(i+2)^{j-1}\,(\lambda h)^j$$

which is exactly of the form (40).

To obtain the required coefficient c_{rr}, we now consider the polynomial $H_r(\theta)$; this yields

$$(41)\qquad c_{rr} = \sum_{k=0}^{r}(r-k)r^{k-1}\binom{r}{k}(\lambda h)^k(\lambda u)^{r-k}$$
$$= \lambda^r\{(u+rh)^r - rh(u+rh)^{r-1}\} = \lambda^r\,u(u+rh)^{r-1}\,.$$

Thus the probability of emptiness of the dam at times $T = u + rh\,(r = 0, 1, \ldots)$ is

$$(42)\qquad g(u, u+rh) = e^{-\lambda(u+rh)}\,\frac{\lambda^r}{r!}\,u\,(u+rh)^{r-1}\,,$$

precisely as in (12). As for the previous dam, it may be shown that the distribution is proper only if the mean input λh does not exceed the unit release per unit time.

Let

$$(43)\qquad \varphi(\theta) = u(\theta\,e^{-\lambda})^u \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\{\lambda(\theta\,e^{-\lambda})^h\}^r}{r!}(u+rh)^{r-1}$$
$$= (\theta\,e^{-\lambda})^u\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\{\lambda(\theta\,e^{-\lambda})^h\}^r}{r!}(u+rh)^r - \lambda h(\theta\,e^{-\lambda})^h\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\{\lambda(\theta\,e^{-\lambda})^h\}^r}{r!}(u+[r+1]h)^r\right\}$$

be the g.f. of the probabilities $g(u, u+rh)$ of first emptiness at times $T = u + rh$, where $0 < \theta \leq 1$. The terms of (43) are the constant in α of the function

$$(44)\qquad \psi(\theta, \alpha) = (\theta\,e^{-\lambda})^u \times$$
$$\times\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\{\lambda(\theta\,e^{-\lambda})^h\}^r e^{\alpha(u+rh)}\,\alpha^{-r} - \lambda h(\theta\,e^{-\lambda})^h\sum_{r=0}^{\infty}\{\lambda(\theta e^{-\lambda})^h\}^r e^{\alpha(u+[r+1]h)}\,\alpha^{-r}\right\}$$
$$= (\theta\,e^{\alpha-\lambda})^u\,\{1 - \lambda h(\theta\,e^{\alpha-\lambda})^h\}\,\{1 - \lambda\alpha^{-1}(\theta\,e^{\alpha-\lambda})^h\}^{-1}\,,$$

where $|\lambda\alpha^{-1}(\theta e^{\alpha-\lambda})^h| < 1$ for convergence. Since we require that

$$\lambda(\theta e^{-\lambda})^h |\alpha^{-1}e^{\alpha h}| \leqq \lambda e^{-\lambda h}|\alpha|^{-1}e^{|\alpha| h} < 1 ,$$

the expression (44) will be valid for

$$\lambda e^{-\lambda h} < |\alpha| e^{-|\alpha| h}. \tag{45}$$

This is possible only if $\lambda h \neq 1$, when $\text{Min}\{\lambda, \lambda_1\} < |\alpha| < \text{Max}\{\lambda, \lambda_1\}$, λ_1 being the second root of the equation (45).

To obtain $\varphi(\theta)$, we find the residue of $\alpha^{-1}\psi(\theta, \alpha)$ at its pole $\alpha_0(\theta) \leqq \leqq \text{Min}\{\lambda, \lambda_1\}$, where $\alpha_0(\theta)$ is the smaller root of

$$\alpha - \lambda(\theta e^{\alpha-\lambda})^h = \alpha e^{-\alpha h} - \lambda(\theta e^{-\lambda})^h = 0 . \tag{46}$$

Thus

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= \lim_{\alpha=\alpha_0(\theta)} (\theta e^{\alpha-\lambda})^u \{1 - \lambda h(\theta e^{\alpha-\lambda})^h\}\{\alpha - \lambda(\theta e^{\alpha-\lambda})^h\}^{-1}(\alpha-\alpha_0)\\ &= \{\theta e^{\alpha_0(\theta)-\lambda}\}^u ;\end{aligned} \tag{47}$$

it may be shown that this expression holds even when $\lambda h = 1$. The result (47) for $\varphi(\theta)$ is easily seen to be identical with TAKÁCS's form (13); for if $F(\theta) = \theta e^{\alpha_0(\theta)-\lambda}$, then $F(0) = 0$, and from (46) since

$$\alpha_0(\theta) - \lambda = -\lambda[1 - (\theta e^{\alpha_0(\theta)-\lambda})^h] ,$$

it follow that

$$F(\theta) = \theta e^{\alpha_0(\theta)-\lambda} = \theta \exp\{-\lambda[1 - F^h(\theta)]\}$$

as required.

If $\lambda h \leqq 1$, the probabilities $g(u, u + rh)$ define a proper distribution, for

$$\varphi(1) = \sum_{r=0}^{\infty} g(u, u + rh) = e^{(\alpha_0(1)-\lambda)u} = 1$$

and the dam must eventually empty. The condition $\lambda h < 1$ is necessary for the system to be non-dissipative, and ensures that a stationary solution exists for this infinite dam (3) (see GANI and PRABHU [2]).

The mean and variance of $T = u + rh$ when $\lambda h < 1$ are readily found to be

$$\begin{cases} E(T) = \dfrac{u}{1-\lambda h} \\ v(T) = \dfrac{u\lambda h^2}{(1-\lambda h)^3} \end{cases} \tag{48}$$

In the limit as $\lambda h \to 1$, $E(T)$ becomes infinite.

When $\lambda h > 1$, the probabilities $g(u, u + rh)$ sum to

$$\varphi(1) = \sum_{r=0}^{\infty} g(u, u + rh) = e^{(\alpha_0(1)-\lambda)u} = e^{-(\lambda-\lambda_1)u}$$

where $\alpha_0(1) = \lambda_1 < \lambda$ in this case. These probabilities do not define a proper distribution, there being a probability $1 - e^{-(\lambda-\lambda_1)u} > 0$ that the dam never empties.

Summary

This paper considers the probabilities of first emptiness in two storage systems. The first, an infinite dam in discrete time, is fed by inputs whose distribution is geometric in unit time-intervals; at the end of each of these, there occurs a unit release. The second is an infinite dam in continuous time with Poisson inputs, for which the release occurs at constant unit rate except when the dam is empty.

First emptiness in both dams may be formulated as a special type of classical occupancy problem. The probabilities of emptiness are derived by direct elementary methods, and their generating functions found. These are shown to define proper distributions only if the mean input per unit time does not exceed the corresponding release.

Acknowledgment. I am greatly indebted to Mr. N. U. Prabhu of Karnatak University for the many discussions we have had on the previous dam problems, particularly in connection with the material of Section 5.

References

[1] Gani, J.: Problems in the probability theory of storage systems. J. R. Statist. Soc. B **19**, 181—206 (1957). — [2] Gani, J., and N. U. Prabhu: The time-dependent solution for a storage model with Poisson input. (To appear) (1958). — [3] Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1, Second Edition. New York: John Wiley 1957. — [4] Foster, F. G.: On the stochastic matrices associated with certain queueing processes. Ann. Math. Statist. **24**, 355—360 (1953). — [5] Kendall, D. G.: Some problems in the theory of dams. J. R. Statist. Soc. B **19**, 207—212 (1957). — [6] Moran, P. A. P.: A probability theory of dams and storage systems. Aust. J. Appl. Sci. **5**, 116—124 (1954). — [7] Moran, P. A. P.: A probability theory of dams and storage systems: modifications of the release rules. Aust. J. Appl. Sci. **6**, 117—130 (1955). — [8] Takács, L.: Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **6**, 101—129 (1955).

(Eingegangen am 6. Mai 1958)

GANDY, R. O.
Math. Annalen, Bd. 136, S. 466 (1958)

Note on a Paper of Kemeny's

By

R. O. GANDY in Leeds, England

In a recent paper[1]) KEMENY posed the question: do there exist non-standard models of elementary number theory in which every row contains an abnormal number? In fact it can be shown rather easily that such models do not exist. For, let n be any prime number, and let β be any unnatural number; we show that there can be no abnormal number in the row of n^β. Firstly, since integers prime to n do not divide n^β, n^β is not itself abnormal. Suppose now that n^β lay in the row of an abnormal number α; then there would be a positive integer k such that

$$n^\beta = \alpha \pm k\,. \tag{1}$$

Now k is the *largest* integer which divides $\alpha \pm k$. But the following theorem of elementary number theory must hold in the model:

$$(k \mid n^x \,.\, n^x > k) \Rightarrow n\,k \mid n^x. \tag{2}$$

Since n^β is evidently unnatural, $n^\beta > k$, and so $n\,k \mid n^\beta$; i. e., by (1), $n\,k \mid \alpha \pm k$ and therefore k is *not* the largest integer which divides $\alpha \pm k$ — which is absurd.

(Eingegangen am 25. Mai 1958)

[1]) J. G. KEMENY: Undecidable problems of elementary number theory. Math. Ann. 135, 160—169 (1958).